Ueber eine Aufgabe aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die mit der kinetischen Deutung der Entropievermehrung zusammenhängt.

Paul und **Tatiana Ehrenfest**-Wien.

Sonderabdruck aus „Mathematisch-Naturwissenschaftliche Blätter“ No. 11 und 12 1906.

Ohne fürs erste den im Titel angedeuteten Zusammenhang zu erörtern[1]), wenden wir uns unmittelbar der speziellen Frage zu. Es seien N (z. B. 100) Kugeln gegeben. Dieselben sind zur individuellen Unterscheidung fortlaufend numeriert $1 - N$. Sie sind augenblicklich so über zwei Urnen verteilt, daß die Urne A enthalte P_0 (z. B. 90), die Urne B hingegen $Q_0 = N - P_0$ (also 10) Kugeln. Doch sei nicht bekannt, welche individuellen Kugeln in A und welche in B liegen. In einem Sack befinden sich ferner N Lotteriezettel mit den Nummern 1 bis N. Nach je 10 Sekunden wird ein Zettel gezogen, die Nummer ausgerufen, zurückgelegt, gut gemischt. Dann wird aufs neue gezogen, ausgerufen usw. Jedesmal, wenn eine Nummer ausgerufen wird, hüpft die Kugel, die diese Nummer trägt, aus derjenigen Urne, in der sie sich gerade befindet, in die andere Urne hinüber und bleibt dort so lange liegen, bis später einmal wieder ihre Nummer gezogen wird. Man sieht: es ist immer wahrscheinlicher, daß die eben aufgerufene Kugel gerade in der volleren, als daß sie in der leereren Urne angetroffen wird. Solange also die Urne A noch viel voller als die Urne B ist, wird sich bei den meisten der folgenden Ziehungen die Urne A in die Urne B entleeren und nur selten wird sie aus der Urne B eine Kugel erhalten.

Zur Veranschaulichung: Auf einem Millimeterpapier bedeute das horizontale Fortschreiten um je einen Millimeter den Uebergang von der $r$ten zur $r+1$ten Ziehung. Ueber dem r — ten Millimeterpunkt tragen wir als Ordinate auf

$$y_r = |P_r - Q_r| \qquad y_0 = |P_0 - Q_0|$$

P_r und Q_r Urneninhalte nach der $r$ten Ziehung. $|P_r - Q_r|$ Absolutwert[2]) ihrer Differenz. Man erhält so eine Folge von Punkten, die man vielleicht bequem durch einen Polygonalzug verbunden denkt. Der erste Punkt liegt verhältnismäßig sehr hoch $y_0 = 80$. Jeder Punkt dieser Folge liegt immer um zwei Einheiten tiefer oder um zwei Einheiten höher als der nächstvorausgehende. Ein dritter Fall ist ausgeschlossen. Besitzt y_r noch einen sehr hohen Wert, so wird man in der Regel y_{r+1} tiefer liegend finden[3]). Die „Kurve“ zeigt also zunächst eine entschiedene Tendenz, abwärts zu laufen, nur hin und wieder geht sie auch um ein oder gar mehrere Schritte wieder aufwärts. Erst wenn sie schon sehr weit heruntergegangen ist (die Urneninhalte sind nicht mehr stark verschieden), dann erst kommen solche „verkehrte“ Ziehungen häufiger vor: die Abwärtsbewegung wird schwächer. Schließlich verläuft sie nahe der Nullaxe, indem bald die eine, bald die andere Urne ein wenig voller wird. — Wird sie nun in aller Zukunft nahe der Nulllinie verlaufen? — Nein. Wir denken uns die Ziehungen enorm lange fortgesetzt. Die Aufeinanderfolge einer Reihe solcher Züge, die wieder zu einer merklichen oder gar großen Verschiedenheit von P und Q führt, mag

[1]) Siehe zwei Briefe Boltzmanns im Bd. 51 der engl. Zeitschrift „Nature“ (1894/95) pag. 413 und 581. Ferner ebendort pag. 31, 78, 152, 175, 221, 293, 319. — Boltzmann Math. Annalen Bd. 50. — Boltzmann Gastheorie Bd. II, § 88 bis 91.

[2]) Der Absolutwert ist nur deshalb gewählt, um weiterhin nicht immer zwischen positiven und negativen Ordinaten unterscheiden zu müssen.

[3]) Die Wahrscheinlichkeit für Zunahme ist: $\frac{Q_0}{N}$, für Abnahme: $\frac{P_0}{N}$, falls $P_0 > Q_0$.

sehr klein sein. Aber selbst dafür, daß die Ziehungen gelegentlich einmal alle 100 Kugeln in B versammeln, selbst dafür ist die Wahrscheinlichkeit nur sehr klein, aber auch nicht Null. (Ihren Wert kann man leicht berechnen.) Wenn man also die Ziehungen genügend lange fortsetzt, so würde es schließlich geradezu enorm unwahrscheinlich, wenn diese hohen und allerhöchsten „Buckel" in der genügend lang fortgesetzten Kurve ausbleiben wollten. Das aber genügt. Die Ziehungskurve werde nun etwa solange fortgeführt, bis auch noch die allerseltensten Buckel ein paar tausendmal vorkommen. Die Ziehungskurve wird dann überwiegend sehr nahe an Null verlaufen, sich nur selten merklich und außerordentlich selten stark erheben.

Jedesmal, wenn im Verlauf der Ziehungen wieder in der einen Urne 80 Kugeln mehr liegen als in der anderen, sind wir natürlich bereit zu wetten, daß die Differenz bei der nächstfolgenden Ziehung auf 78 abnimmt. Denn es ist neunmal wahrscheinlicher, daß die nächst aufgerufene Kugel eine der 90 Kugeln des volleren Topfes, als eine der 10 Kugeln des leereren Topfes sei. Wie drückt sich dieser Umstand in dem gestaltlichen Verlauf der Ziehungskurve aus. Geht sie von den Punkten, die in der Höhe $y = 80$ liegen, neunmal öfter abwärts als aufwärts? Es drängt sich da folgendes Bild auf: Legen wir in der Höhe $y = 80$ eine horizontale Gerade, so schneidet diese Gerade aus unserer Kurve gerade alle die betrachteten Punkte heraus. Wenn diese Gerade die Kurve $10000 + 1$ mal in einem Punkte trifft, der auf einem rechten (abwärtsgehenden) Abhang eines Buckels liegt, so muß sie die Kurve mindestens 10000mal in einem Punkt treffen, der auf dem linken, aufsteigenden Abhang eines Buckels liegt. Denn um aus einem Buckel rechts herausfahren zu können, muß sie immer erst links in den Buckel hineingefahren sein[1]). Käme man nun auf diesem Weg nicht dazu, zu sagen: Von einem Schnittpunkt mit der geraden Linie geht die Kurve im nächstfolgenden Schnitt ebenso oft aufwärts als abwärts. Müßte man sich also nicht hüten zu wetten, daß die Differenz von 80 auf 78 abnehmen werde?

Natürlich ist die Wette vollkommen berechtigt und der Fehler in der geometrischen Ueberlegung sehr leicht zu finden. — Die ausführliche Klarstellung dieses Fehlers besitzt ein gewisses Interesse, weil sie zur Aufklärung über einen sehr interessanten, aber unberechtigten Einwand verhilft, der wiederholt gegen das Boltzmannsche H-Theorem (kinetische Deutung der Entropievermehrung) erhoben wurde. Boltzmann hat dann zur Abwehr dieses speziellen Einwandes ein Beispiel konstruiert, mit dem das angeführte in allen wesentlichen Zügen übereinstimmt.

Man sieht leicht: Der scheinbare Widerspruch verschwindet, wofern in der Höhe $y = 80$ genügend viele Maxima der Kurve liegen. Dann läuft sie trotz der früheren Bemerkung aus der Höhe 80 im nächsten Schritt wirklich häufiger abwärts als aufwärts. Prozentual noch mehr Maxima müssen in noch höheren Höhen liegen. (Bei $y = 100$ liegen überhaupt nur Maxima.) Sucht man sich vorzustellen, wie die Kurve laufen muß, so stößt man zunächst auf neue Schwierigkeiten. Sie lösen sich, wenn man alle hier in Betracht kommenden Zahlen berechnet. Bezüglich dieser Rechnungen seien noch einige Andeutungen gestattet:

Man denke sich die Kurve enorm lange fortgeführt. $Z(y)$ sei die Zahl der Kurvenpunkte, die in der Höhe y liegen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß von einem bestimmtem dieser Punkte die Kurve im nächsten Schritt abfällt, ist[2]):

$$f(y) = \frac{N+y}{2N}, \tag{A}$$

daß sie ansteigt:

$$S(y) = \frac{N-y}{2N}. \tag{B}$$

Die Zahl der Sehnen vom Typus $(y \to y-2)$ ist also:

$$Z(y)\, f(y) = Z(y)\, \frac{N+y}{2N}. \tag{C}$$

Analog findet sich für die Zahl der Sehnen vom Typus $(y-2 \to y)$ die Zahl:

$$Z(y-2) \cdot S(y-2) = Z(y-2) \cdot \frac{N-(y-2)}{2N}. \tag{D}$$

Aus geometrischen Gründen muß die Kurve ebenso oft den Schritt $y \to y-2$, wie den Schritt $y-2 \to y$ machen. Man erhält so die Rekursionsformel:

---

[1]) Daß es sich hier um keine „Kurve" sondern nur um eine Reihe von einander getrennter Punkte handelt, ändert daran nichts: Wenn der Punkt von der Höhe H auf die Höhe $H+4$ gelangen will, so muß er doch dazwischen einmal die Höhe $H+2$ tatsächlich annehmen. Er kann diese Höhe ebensowenig überspringen, als es eine kontinuierliche Kurve könnte. — Ein überzähliger rechter Abhang kommt in die Abzählung hinein, weil nach Voraussetzung die Kurve mit einem rechten Abhang anfängt.

[2]) Die Summe der Urneninhalte ist N, die Differenz y. In der volleren Urne liegen also $(N+y):2$, in der leereren $(N-y):2$ Kugeln. — Die Gleichungen A, B gelten für jedes y, außer für $y = 0$. Es ist $S(o) = 1$, $f(o) = 0$.

$$Z(y) = Z(y-2)\,\frac{S(y-2)}{f(y)} = Z(y-2)\,\frac{N-(y-2)}{N+y}\,. \qquad (E)$$

Man sieht also, wie viel mal seltener die Kurve bis y vordringt, als bis $y-2$. ($N=100$, $y=80$ liefert: $Z(80):Z(78)=22:180$; $y=98$ liefert: $Z(98):Z(96)=4:198$.)

Die Umgebung jedes Punktes von der Höhe y besitzt eine der folgenden Formen: α) $(y-2)-y-(y-2)$; β) $(y-2)-y-(y+2)$; γ) $(y+2)-y-(y-2)$; δ) $(y+2)-y-(y+2)$. Man berechnet leicht, daß die Häufigkeiten dieser vier Formen sich verhalten[1]) wie:

$$\alpha:\beta:\gamma:\delta = [f(y)\cdot f(y)]:[f(y)\cdot S(y)]:[S(y)\cdot f(y)]:[S(y)\cdot S(y)]$$

oder, wenn man alle Glieder durch $f(y)\cdot S(y)$ dividiert und für f und S die Werte aus A, B einsetzt:

$$\alpha:\beta:\gamma:\delta = \frac{N+y}{N-y}:1:1:\frac{N-y}{N+y}\,. \qquad (F)$$

Für y nahe N ist somit α sehr groß, δ sehr klein. Der letztere Umstand besagt: Die Abhänge der Kurve gehen in ihren höheren Teilen ziemlich „glatt" abwärts. — Aus den Gleichungen E und F lassen sich nun ohne weiteres alle Aussagen über den durchschnittlichen Verlauf der Kurve ablesen. — Zusammenfassend können wir sagen:

I. Die besprochene „Kurve" geht von jedem ihrer höher gelegenen Punkte in der Regel abwärts und nur selten noch weiter aufwärts.

II. Diese Aussage gilt — und das klingt zunächst besonders paradox — ebensowohl, wenn man die „Kurve" von links nach rechts, als wenn man sie von rechts nach links durchläuft[2]).

Göttingen, Oktober 1906.

---

[1]) Die Anzahl, in der die Form α) vorkommt, ist offenbar: $\alpha = Z(y-2)\cdot S(y-2)\cdot f(y)$, denn sie fängt mit dem Punkt $y-2$ an und wenn man zu y hinaufgekommen ist, so ist $f(y)$ die Wahrscheinlichkeit, daß der nächste Schritt abwärts führt. Wegen (E) ist dann weiter: $\alpha = Z(y)\,f(y)\cdot f(y)$. Analog wird $\beta = Z(y)\,f(y)\cdot S(y)$ usw.

[2]) Bei dieser Aenderung des Durchlaufungsinnes geht jeder Schritt abwärts in einen Schritt aufwärts über. Somit würde man bei oberflächlicher Betrachtung schließen, daß die Kurve in beiden Fällen „entgegengesetztes" Verhalten zeigen müßte. Eine analoge Ueberlegung bildet nun gerade den Ausgangspunkt für einen der beiden Trugschlüsse, durch die man a priori die Unmöglichkeit einer kinetischen Deutung der Entropievermehrung zu beweisen versucht hat. (Vergleiche außer der im ersten Artikel angegebenen Literatur noch: Mathematische Enzyklopädie V. 8. Boltzmann, „Kinetische Theorie der Materie". § 14.)