Natuurkunde. — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan: „*Over de wisselingen der intensiteit in het buigingsbeeld van een groot aantal onregelmatig verspreide openingen of lichaampjes*".

§ 1. Voor het objectief van een kijker die op een verwijderd lichtpunt is ingesteld, zij een scherm met een groot aantal onderling gelijke, onregelmatig verstrooide cirkelvormige openingen geplaatst. In het vlak V, loodrecht op de as door het reëele beeld van het lichtpunt gebracht, ontstaat dan een bekend buigingsverschijnsel. De lichtsterkte daarvan kan voor elk punt P worden voorgesteld als het product van twee factoren, waarvan de eerste de intensiteit is, die één opening zou teweegbrengen, terwijl de tweede factor, dien wij i zullen noemen, op een constanten coëfficient na de intensiteit is, waarmede men zou te doen hebben, als het scherm voorzien was van onderling gelijke, uiterst kleine openingen („puntvormige openingen" of „diffracteerende punten") gelegen op de plaatsen van de middelpunten der openingen die in werkelijkheid bestaan.

In de volgende beschouwingen zal steeds van den factor i sprake zijn, en in het bijzonder van zijne grillige en snelle veranderingen van punt tot punt. VON LAUE [1]) heeft deze wisselingen uitvoerig theoretisch onderzocht, met het oog op de vraag [2]) of de klassieke optica rekenschap zou kunnen geven van de structuur met radiaal gerichte lichte en donkere „vezels", die men in het buigingsbeeld opmerkt. Hij komt tot het besluit dat, voor het geval van homogeen licht, in datgene wat de theorie ons over de verdeeling der intensiteit i leert, niets is, dat ons zulk een structuur zou doen verwachten.

Daar het vraagstuk van fundamenteel belang is, is het misschien niet ondienstig te doen zien hoe betrekkelijk eenvoudige berekeningen, al gaan zij minder diep dan die van VON LAUE, zijne uitkomst bevestigen.

§ 2. Wij stellen ons voor dat diffracteerende punten, ten getale van n, naar volgorde van hunne rangnummers, elk naar het toeval, op een cirkelvlak voor het objectief, met den straal R en het middelpunt op de as van den kijker, geplaatst worden en dat voor de zoo

[1]) Sitzungsber. Akad. Berlin, 1914, p. 1144; Mitteilungen d. Phys. Gesellsch. Zürich, 1916, p. 90; Berichte d. deutschen physik. Gesellsch., 1917, p. 19.

[2]) Zie, wat die vraag betreft, de voorafgaande mededeeling van W. J. DE HAAS.

verkregen verdeeling der punten over het scherm, het buigingsbeeld beschouwd wordt. Wij kunnen deze proef een groot aantal malen, stel N malen, nemen en voor deze of gene grootheid die telkens een bepaalde waarde heeft, het gemiddelde nemen van de waarden die zij in de N gevallen aanneemt. Zulke middelwaarden zullen wij door strepen boven de letters aanduiden.

Wij kiezen als eenheid der intensiteit die, welke een enkel diffracteerend punt zou teweegbrengen, welke intensiteit, zooals men weet, onafhankelijk van de ligging van dat punt is en geacht kan worden, over de geheele uitgestrektheid van het beeldvlak even groot te zijn. Stellen wij dan

$$i = n + i', \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

dan zal het blijken dat voor het grootste deel van het vlak

$$\overline{i'} = 0$$

kan gesteld worden. Daaruit volgt

$$\overline{i} = n, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

zoodat de laatste term in (1) de afwijking der intensiteit i van de middelwaarde $\overline{i}$ voorstelt. Om een oordeel over de grootte der afwijkingen te krijgen, kan men

$$\overline{i'^2}$$

bepalen.

Zij verder ϱ de afstand van het beschouwde punt P tot het middelpunt der buigingsfiguur, het punt F nl., waar het beeld van het lichtpunt gevormd wordt, en h een richting loodrecht op FP. Door, zooals VON LAUE gedaan heeft, de waarden

$$\overline{\left(\frac{\partial i'}{\partial \varrho}\right)^2} \quad \text{en} \quad \overline{\left(\frac{\partial i'}{\partial h}\right)^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

te berekenen, kan men eenigszins beoordeelen, of er al dan niet radiale maxima of minima van eenige lengte zijn; immers, zoo die bestaan, mag men verwachten dat van de uitdrukkingen (3) de eerste kleiner zal uitvallen dan de tweede.

Een ander criterium, eveneens door VON LAUE gebezigd, berust op de volgende overweging. De lichte en donkere vlekken in de intensiteitsverdeeling i, of, zooals wij ook kunnen zeggen, de positieve en negatieve vlekken in de verdeeling van i', zullen in elk geval zekere uitgebreidheid hebben. Liggen dus twee punten zeer dicht bij elkaar, dan zullen de waarden van i' in die punten bij de meerderheid der N proeven hetzelfde teeken hebben, terwijl een dergelijke samenhang niet te verwachten is, als de punten verder uiteenliggen. Een aanwijzing van het eerste zullen wij hierin vinden, dat het gemiddelde van het product der twee waarden van i' positief, van de orde van grootte van $\overline{i'^2}$ is, een aanwijzing van het tweede in een aanmerkelijk kleinere middelwaarde van dat product.

Wij zullen onder P_1 een punt verstaan, dat op het verlengde van FP ligt, onder P_2 een tweede punt van den om het middelpunt F beschreven, door P gaanden cirkel. De in de drie punten P, P_1, P_2 bestaande afwijkingen van de gemiddelde intensiteit noemen wij i', i_1', i_2' en wij berekenen

$$\overline{i' \, i_1'} \quad \text{en} \quad \overline{i' \, i_2'}.$$

Eindelijk zullen wij nog de integraal

$$j = \int_{\rho}^{\rho'} i' \, d\rho, \qquad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

uitgestrekt langs zeker deel van een uit F getrokken rechte lijn, beschouwen; daarbij zijn ρ en ρ' $(\rho' > \rho)$ de afstanden waarop het beginpunt P en het eindpunt P' van dat deel van F verwijderd zijn. Ook de waarde van

$$\overline{j^2}$$

kan ons iets over de verdeeling der afwijkingen i' over het vlak V leeren.

§ 3. Wij voeren een coördinatenstelsel in, met F tot oorsprong, de assen FX en FY in het beeldvlak V, en FZ langs de as, naar de zijde van de lens. Laat ξ en η de coördinaten van het beschouwde punt P zijn, x_a en y_a die van het diffracteerende punt met het rangnummer a, f de afstand van de lens tot het beeldpunt F, en λ de golflengte. Wordt dan de trilling die een diffracteerend punt op de as gelegen, in P zou geven, door $\cos \nu t$ voorgesteld, dan vindt men gemakkelijk voor die, welke het diffracteerende punt a teweegbrengt

$$\cos \left[\nu t + k\left(\xi \, x_a + \eta \, y_a\right)\right],$$

waarin

$$k = \frac{2\pi}{\lambda f}$$

is.

Ter vereenvoudiging is voor de amplituden 1 gesteld.

De resulteerende trilling is

$$\Sigma\,(a) \cos \left[\nu t + k\left(\xi \, x_a + \eta \, y_a\right)\right], \qquad \ldots \ldots \quad (5)$$

als wij in de som aan het rangnummer a alle waarden van 1 tot n geven. Wij zullen spoedig dergelijke uitdrukkingen aantreffen, in welke naar twee of drie rangnummers gesommeerd moet worden; de bedoeling is dan dat die alle van 1 tot n gaan, behoudens zekere nader te geven aanwijzingen.

Uit (5) volgt voor de intensiteit

$$i = [\Sigma\,(a)\cos k\,(\xi\, x_a + \eta\, y_a)]^2 + [\Sigma\,(a)\sin k\,(\xi\, x_a + \eta\, y_a)]^2,$$

of wel, als wij de x-as door het beschouwde punt P laten gaan, zoodat $\xi = \varrho$, $\eta = 0$ wordt,

$$i = [\Sigma\,(a)\cos k\,\varrho\, x_a]^2 + [\Sigma\,(a)\sin k\,\varrho\, x_a]^2.$$

Hiervoor kunnen wij schrijven

$$i = \Sigma\,(a\,b)\cos k\,\varrho\,(x_a - x_b). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

en dus is blijkens (1)

$$i' = \Sigma\,(a \neq b)\cos k\,\varrho\,(x_a - x_b), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

daar men juist de waarde n krijgt als men in de som (6) aan a de waarden $1, \ldots n$ geeft, en telkens $b = a$ neemt.

Uit (7) volgt verder

$$\frac{\partial i'}{\partial \varrho} = -\,k\,\Sigma\,(a \neq b)\,(x_a - x_b)\sin k\,\varrho\,(x_a - x_b), \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

terwijl men ook gemakkelijk zal vinden

$$\frac{\partial i'}{\partial h} = k\,\Sigma\,(a \neq b)\,(y_a - y_b)\sin k\,\varrho\,(x_a - x_b) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Voor de in de vorige § ingevoerde grootheden i_1' en i_2' kan men overeenkomstig (7) schrijven

$$i_1' = \Sigma\,(a \neq b)\cos k\,\varrho'\,(x_a - x_b), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

als $FP_1 = \varrho'$ is, en

$$i_2' = \Sigma\,(a \neq b)\cos k\,\varrho\,(x_a' - x_b'), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

in welke laatste uitdrukking de grootheden met accenten de coördinaten der diffracteerende punten zijn, ten opzichte van assen FX en FY', die uit FX en FY door een wenteling in het vlak V ontstaan en waarvan de eerste door P_2 gaat.

Eindelijk is, blijkens (4) en (7)

$$j = \Sigma\,(a \neq b)\left\{\frac{\sin k\,\varrho'\,(x_a - x_b)}{k\,(x_a - x_b)} - \frac{\sin k\,\varrho\,(x_a - x_b)}{k\,(x_a - x_b)}\right\} \quad . \quad . \quad (12)$$

De berekening der in § 2 genoemde middelwaarden komt nu steeds neer op de bepaling der middelwaarde van uitdrukkingen van een der vormen

$$P = \Sigma\,(a \neq b)\,\varphi\,(a, b), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

$$Q = \Sigma\,(a \neq b,\; c \neq d)\,\varphi\,(a, b)\,\psi\,(c, d), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

waarin $\varphi\,(a, b)$ en $\psi\,(a, b)$ functiën van de coördinatenverschillen $x_a - x_b$, $y_a - y_b$ zijn, en wel functiën die dezelfde grootte en hetzelfde teeken behouden als men de algebraïsche teekens dier verschillen omkeert.

Neemt men voor ψ dezelfde functie als voor φ, dan gaat Q in P^2 over.

§ 4. Als het somteeken S op de N verschillende proeven betrekking heeft, kan men schrijven

73

$$\overline{P} = \frac{1}{N} S P = \frac{1}{N} S \Sigma (a \neq b) \varphi (a, b) = \frac{1}{N} \Sigma (a \neq b) S \varphi (a, b).$$

Nu is klaarblijkelijk $S \varphi (a, b)$ steeds hetzelfde, onverschillig welke getallen voor a en b worden genomen. Daaruit volgt, daar elke waarde van a met $n-1$ waarden van b gecombineerd kan worden,

$$\overline{P} = \frac{n(n-1)}{N} S \varphi (1, 2).$$

Verdeel nu den cirkel met den straal R, waarvan wij het oppervlak door A zullen voorstellen, in elementen $d\sigma$ en vat twee bepaalde elementen $d\sigma_1$ en $d\sigma_2$ in het oog.

Onder de N proeven zijn er

$$\frac{N}{A} d\sigma_1$$

bij welke het eerste diffracteerende punt in $d\sigma_1$ valt, en onder deze zijn er

$$\frac{N}{A^2} d\sigma_1 \, d\sigma_2$$

bij welke tevens het tweede punt in $d\sigma_2$ komt te liggen. Daaruit blijkt dat

$$\overline{P} = \frac{n(n-1)}{A^2} \iint \varphi (1, 2) \, d\sigma_1 \, d\sigma_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

is, waar wij zoowel bij de integratie naar $d\sigma_1$ als bij die naar $d\sigma_2$ het geheele cirkelvlak A moeten doorloopen.

De berekening van $\overline{Q}$ is ingewikkelder. Men moet n.l. hier onderscheiden het geval dat één der getallen c en d met a en tevens het andere met b samenvalt, het geval dat slechts één der getallen c en d met een der getallen a en b samenvalt, en eindelijk het geval dat de getallen a, b, c, d alle verschillend van elkaar zijn. Dit brengt er toe te stellen

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3,$$

waarbij

$$Q_1 = 2 \Sigma (a \neq b) \varphi (a, b) \psi (a, b),$$
$$Q_2 = 4 \Sigma (a \; b \; c \neq) \varphi (a, b) \psi (a, c),$$
$$Q_3 = \Sigma (a \; b \; c \; d \neq) \varphi (a, b) \psi (c, d)$$

is. In de laatste formules beteekent $=|=$ dat bij het opmaken der som nooit aan twee indices dezelfde waarde wordt gegeven.

Men heeft nu

$$\overline{Q} = \overline{Q_1} + \overline{Q_2} + \overline{Q_3}$$

en kan de laatste drie middelwaarden op dergelijke wijze berekenen als zoo even $\overline{P}$. Men vindt daarbij

$$\overline{Q_1} = \frac{2n(n-1)}{A^2} \iint \varphi (1, 2) \psi (1, 2) \, d\sigma_1 \, d\sigma_2, \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

$$\overline{Q_2} = \frac{4n(n-1)(n-2)}{A^3} \iiint \varphi(1,2)\,\psi(1,3)\,d\sigma_1\,d\sigma_2\,d\sigma_3,$$

$$\overline{Q_3} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{A^4} \iint \varphi(1,2)\,d\sigma_1\,d\sigma_2 \,.\iint \psi(1,2)\,d\sigma_1\,d\sigma_2.$$

Daar het aantal der diffracteerende punten zeer groot ondersteld wordt, zullen wij bij de toepassing dezer formules de factoren $n-1$, $n-2$, $n-3$ veelal door n vervangen.

Voor het geval $Q = P^2$ geven bovenstaande vergelijkingen dan

$$\overline{P^2} = U_1 + U_2 + (\overline{P})^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

waarin

$$U_1 = \frac{2n^2}{A^2} \iint [\varphi(1,2)]^2\,d\sigma_1\,d\sigma_2, \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

$$U_2 = \frac{4n^3}{A^3} \iiint \varphi(1,2)\,\varphi(1,3)\,d\sigma_1\,d\sigma_2\,d\sigma_3 \,. \quad \ldots \quad (19)$$

is.

§ 5. Om nu $\overline{i'}$, d. w. z. de gemiddelde waarde van den laatsten term in (1) te vinden, stellen wij met het oog op (7) en (13)

$$\varphi(1,2) = \cos k\varrho\,(x_1 - x_2)$$

en passen (15) toe. Er komt dan

$$\overline{i'} = \frac{n(n-1)}{A^2} \iint \cos k\varrho\,(x_1 - x_2)\,.\,d\sigma_1\,d\sigma_2 = \frac{n(n-1)}{A^2} \left[\int \cos k\varrho\,x\,.\,d\sigma\right]^2 \quad (20)$$

Uitgestrekt over den cirkel A met den straal R is

$$\int \cos k\varrho x\,.\,d\sigma = \frac{2\pi R}{k\varrho} J_1(k\varrho R), \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

waarin de laatste factor de Besselsche functie J_1 is. Derhalve:

$$\overline{i'} = 4n(n-1) \left[\frac{J_1(k\varrho R)}{k\varrho R}\right]^2. \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

Wij merken hierbij op dat, op een constanten coëfficient na, de laatste factor de intensiteit i_0 voorstelt, die men in het beschouwde punt zou hebben als de cirkel A zelf als buigende opening diende, zoodat wij kunnen schrijven

$$\overline{i'} = 4n(n-1)\,i_0.$$

Strikt genomen is dus $\overline{i'}$ niet nul. Zelfs wordt (daar voor kleine waarden van x, $J_1(x) = \frac{1}{2}x$ is), in het beeldpunt $F(\varrho = 0)$

$$\overline{i'} = n(n-1)$$

en volgens (1)

$$\overline{i} = n + \overline{i'} = n^2,$$

zooals te verwachten was.

Wij mogen aannemen dat bij de omstandigheden waaronder de proef genomen wordt, het buigingsbeeld der cirkelvormige opening A slechts een uiterst klein deel van het gezichtsveld, in de onmiddellijke omgeving van het punt F beslaat. Als maat voor zijne afmetingen kunnen wij den straal q van den eersten donkeren ring nemen, welke straal bepaald wordt door

$$q = \frac{3{,}83}{kR}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

daar 3,83 de eerste wortel der vergelijking $J_1(x) = 0$ is,

Zoodra nu de afstand ϱ van het beschouwde punt P tot F een aanmerkelijk veelvoud van q is, is i_0 zeer klein, zoodat $\overline{i'} = 0$ en $\overline{i} = n$ kan worden gesteld.

Om dit nader toe te lichten maken wij gebruik van de stelling dat voor groote waarden van x bij benadering

$$J_1(x) = -\frac{2 \sin\left(\frac{1}{4}\pi - x\right)}{\sqrt{2\pi x}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

is. Op een afstand

$$\varrho = \omega q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

van F, waarbij ω een niet te klein getal is, is dus $\overline{i'}$ van de orde van grootte

$$0{,}045 \frac{n^2}{\omega^3};$$

bij de berekening hiervan heb ik in (22) $n(n-1)$ door n^2 en in (24) $\sin\left(\frac{1}{4}\pi - x\right)$ door 1 vervangen.

Klaarblijkelijk (verg. (1)) zullen wij slechts dan $\overline{i'} = 0$ mogen stellen, als de waarde ervan aanmerkelijk kleiner dan n is. Daartoe is noodig dat

$$\omega^3 \gg 0{,}045\, n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

is. Wij zullen aantoonen dat hieraan zeer goed voldaan kan zijn, zelfs op een afstand van F, die gelijk is aan het tiende van den straal van den eersten donkeren ring, dien men in het buigingsbeeld van een der gebezigde openingen (§ 1) en dus ook in dat van het geheele stelsel openingen waarneemt. Stelt men den straal van dien ring door q' en den straal van een opening door r voor, dan is

$$q' = \frac{R}{\mathrm{r}}\, q,$$

en wordt voor $\varrho = \frac{1}{10} q'$,

$$\omega = \frac{1}{10}\frac{R}{\mathrm{r}}.$$

Voor (26) kan men dus schrijven

$$\frac{R^3}{\mathrm{r}^3} \gg 45n.$$

Daar

$$n < \frac{R^2}{\mathrm{r}^2}$$

is, is aan deze ongelijkheid voldaan zoodra

$$R \gg 45\,\mathrm{r}$$

is, wat zeer goed het geval kan zijn.

Op een afstand $\frac{1}{3} q'$ van F zou aan (26) reeds voldaan zijn, als

$$R \gg 1{,}2\,\mathrm{r}$$

was.

§ 6. Bij de berekening van de overige in § 2 genoemde middelwaarden komen wij tot eenige integralen, die wij $a_1 \ldots a_5$ zullen noemen, en die wij in de eerste plaats zullen beschouwen.

De eerste daarvan is

$$a_1 = \int x^2\, d\sigma = \int y^2\, d\sigma = \frac{A^2}{4\pi},$$

als weer A het oppervlak van den cirkel met den straal R voorstelt.

De tweede integraal is de reeds in (21) aangegevene. Als wij kortheidshalve

$$k\varrho = m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

stellen, is zij

$$a_2 = \int \cos m x \,.\, d\sigma = \frac{2\pi R}{m} J_1(mR).$$

De volgende integralen zijn

$$a_3 = \int x \sin mx \,.\, d\sigma = \frac{4\pi R}{m^2} J_1(mR) - \frac{2\pi R^2}{m} J_0(mR),$$

$$a_4 = \int x^2 \cos mx \,.\, d\sigma = \frac{6\pi R^2}{m^2} J_0(mR) + \left(\frac{2\pi R^3}{m} - \frac{12\pi R}{m^3}\right) J_1(mR),$$

$$a_5 = \int y^2 \cos mx \,.\, d\sigma = -\frac{2\pi R^2}{m^2} J_0(mR) + \frac{4\pi R}{m^3} J_1(mR).$$

Ook zullen de integralen a_2', a_3', a_4' en a_5' voorkomen, die uit $a_2, \ldots a_5$ ontstaan, als men m door $2m$ vervangt. [1])

[1]) De integralen $a_2, \ldots a_5$ kunnen op de volgende wijze worden gevonden.

1. Men heeft

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(u \sin \vartheta)\, d\vartheta = \tfrac{1}{2}\pi J_0(u),$$

Wij zullen nu aanstonds de vereenvoudigingen invoeren, die kunnen worden toegelaten als mR een groot getal is (verg. § 5).

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin(u \sin\vartheta) \sin\vartheta \, d\vartheta = \tfrac{1}{2}\pi J_1(u),$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(u \sin\vartheta) \cos^2\vartheta \, d\vartheta = \frac{\pi}{2u} J_1(u),$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin(u \sin\vartheta) \sin\vartheta \cos^2\vartheta \, d\vartheta = -\frac{\pi}{2u} J_0(u) + \frac{\pi}{u^2} J_1(u),$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(u \sin\vartheta) \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta \, d\vartheta = \frac{3\pi}{2u^2} J_0(u) + \left(\frac{\pi}{2u} - \frac{3\pi}{u^3}\right) J_1(u),$$

van welke formules de eerste en de tweede uit de theorie der Besselsche functiën bekend zijn, terwijl de volgende achtereenvolgens door partieele integratie daaruit en uit elkander worden afgeleid.

2. Elk der integralen a_2, a_3, a_4 heeft den vorm

$$\int f(x)\, d\sigma,$$

waarvoor men, daar $f(x)$ telkens een even functie is, kan schrijven

$$4\int_0^R f(x) \sqrt{R^2 - x^2}\, dx,$$

of, als men $x = R \sin\vartheta$ stelt

$$4 R^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(R \sin\vartheta) \cos^2\vartheta \, d\vartheta.$$

Zij worden hierdoor teruggebracht tot de zoo even onder 1 beschouwde integralen, met $u = mR$.

3. Wordt de integratie over een cirkel met den straal r uitgestrekt, dan is

$$\int \cos mx \,.\, d\sigma = \frac{2\pi r}{m} J_1(mr).$$

Hieruit volgt voor de bijdrage die de ring tusschen de cirkels om den oorsprong met de stralen r en $r + dr$ beschreven, tot de integraal levert

$$\frac{2\pi}{m} \frac{d}{dr} [r J_1(mr)]\, dr$$

en verder, over den cirkel met den straal R,

$$\int r^2 \cos mx \,.\, d\sigma = \frac{2\pi}{m}\int_0^R r^2 \frac{d}{dr} [r J_1(mr)]\, dr = \frac{2\pi}{m^4}\int_0^{mR} u^2 \frac{d}{du} [u J_1(u)]\, du.$$

Dan geldt formule (24) en de daarmede overeenkomstige

$$J_0(u) = \frac{2\cos(\frac{1}{4}\pi - u)}{\sqrt{2\pi u}}.$$

$J_0(mR)$ en $J_1(mR)$ zijn dus beide van de orde $(mR)^{-1/2}$ en men behoeft in de voor a_3, a_4, a_5 gevonden uitdrukkingen telkens slechts den term met de hoogste macht van R te behouden. Uit (26) kan men, bedenkende dat wegens (27), (25) en (23)

$$mR = k\varrho R = k\omega q R = 3{,}83\,\omega$$

is, de volgende ongelijkheden afleiden:

$$a_2 \ll \frac{A}{\sqrt{n}}, \quad a_3 \ll R\frac{A}{\sqrt{n}}, \quad a_4 \ll R^2\frac{A}{\sqrt{n}}, \quad a_5 \ll R^2\frac{A}{\sqrt[6]{n^5}}.$$

Dezelfde uitkomsten gelden resp. voor a_2', a_3', a_4' en a_5'.

Wij zullen ons van deze ongelijkheden bedienen om in de middelwaarden die wij thans te berekenen hebben, telkens den hoofdterm aan te wijzen, dien wij in eerste benadering alleen behoeven te behouden.

§ 7. Om $\overline{i'^2}$ te bepalen, stellen wij in (13), (18) en (19)

$$\varphi(a, b) = \cos k\varrho\,(x_a - x_b).$$

Wij hebben dan vooreerst (verg. (20))

$$\overline{P} = \overline{i'} = \frac{n^2}{A^2}a_2'^2, \qquad (\overline{P})^2 = \frac{n^4}{A^4}a_2'^4,$$

en vinden verder, met behulp van voor de hand liggende herleidingen

$$U_1 = \frac{n^2}{A^2}\iint\left\{1 + \cos 2k\varrho\,(x_1 - x_2)\right\}d\sigma_1\,d\sigma_2 = n^2 + \frac{n^2}{A^2}a_2'^2, \quad . \quad (28)$$

De onbepaalde integraal is

$$2u^2J_0(u) + (u^3 - 4u)J_1(u),$$

zooals uit de differentiaalvergelijking voor J_0:

$$\frac{d^2J_0}{du^2} + \frac{1}{u}\frac{dJ_0}{du} + J_0 = 0,$$

in verband met

$$\frac{dJ_0(u)}{du} = -J_1(u)$$

volgt.

Derhalve:

$$\int r^2\cos mx\,.\,d\sigma = \frac{4\pi R^2}{m^2}J_0(mR) + \left(\frac{2\pi R^3}{m} - \frac{8\pi R}{m^3}\right)J_1(mR).$$

Trekt men hiervan a_4 af, dan vindt men a_5.

$$U_2 = \frac{4n^3}{A^3}\iiint \cos k\varrho\,(x_1 - x_2)\cos k\varrho\,(x_1 - x_3)\,.\,d\sigma_1\,d\sigma_2\,d\sigma_3 = \frac{2n^3}{A^3}(A + a_2{}')a_2{}^2.$$

De hoofdterm in deze laatste twee uitdrukkingen en $(\overline{P})^2$ is n^2, zoodat blijkens (17)

$$\overline{i'^2} = n^2$$

wordt. Dit bewijst dat de fluctuaties der intensiteit van dezelfde orde van grootte zijn als de gemiddelde intensiteit zelf.

§ 8. Voor de bepaling van

$$\overline{\left(\frac{\partial i'}{\partial \varrho}\right)^2}$$

stellen wij (verg. (8)) in (15), (18) en (19)

$$\varphi\,(a, b) = -\,k\,(x_a - x_b)\sin k\,\varrho\,(x_a - x_b).$$

Dit geeft

$$\overline{P} = -\,\frac{2k\,n^2}{A^2}\,a_2\,a_3,\quad (\overline{P})^2 = \frac{4k^2\,n^4}{A^4}\,a_2{}^2\,a_3{}^2,$$

$$U_1 = \frac{k^2 n^2}{A^2}(2\,a_1\,A - 2\,a'_2\,a'_4 + 2\,a'^2_3),$$

$$U_2 = \frac{2k^2\,n^3}{A^3}\{a_2{}^2\,(a_1 - a'_4) + 2\,a_2\,a_3\,a'_3 + a_3{}^2\,(A + a'_2)\}.$$

De term

$$\frac{k^2 n^2}{A^2}\,.\,2\,a_1\,A = \tfrac{1}{2}\,n^2\,k^2\,R^2$$

in U_1 overtreft alle andere in de laatste twee uitdrukkingen en $(\overline{P})^2$ en wij vinden dus uit (17)

$$\overline{\left(\frac{\partial i'}{\partial \varrho}\right)^2} = \tfrac{1}{2}\,n^2\,k^2\,R^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Men vindt de middelwaarde van het vierkant van $\dfrac{\partial i'}{\partial h}$ op een dergelijke wijze; alleen moet men nu met het oog op (9)

$$\varphi\,(a, b) = k\,(y_a - y_b)\sin k\,\varrho\,(x_a - x_b)$$

stellen. Daardoor wordt

$$\overline{P} = 0,\qquad U_1 = \frac{2k^2\,n^2}{A^2}(a_1\,A - a'_2\,a'_5),\qquad U_2 = \frac{2k^2\,n^3}{A^3}\,a_2{}^2\,(a_1 - a'_5).$$

Ook hier is de eerste term van U_1 de hoofdterm, en daar hij dezelfde waarde heeft als in het vorige geval, komt men tot dezelfde uitkomst, nl.

$$\overline{\left(\frac{\partial i'}{\partial h}\right)^2} = \tfrac{1}{2}\,n^2\,k^2\,R^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

De gelijkheid van (29) en (30) wijst op een korrelige, en niet op een vezelige structuur van het buigingsbeeld. Men vindt trouwens ook dezelfde uitkomst voor het gemiddelde quadraat van het intensiteitsverval in een willekeurige richting.

§ 9. Wij kunnen nu ook aangeven van welke orde de afmetingen der lichte en donkere vlekken zijn. Blijkens (23) kan men nl. voor (29) en (30) schrijven

$$7{,}33 \frac{n^2}{q^2}$$

en het intensiteitsverval per eenheid van lengte blijkt dus van de orde van grootte $2{,}7 \frac{n}{q}$ te zijn.

Daar nu de veranderingen der intensiteit van de orde $2n$ kunnen zijn, besluiten wij dat de afstand op welken de onregelmatig verspreide maxima en minima van elkaar liggen, van de orde q is, d. w. z. van dezelfde orde als de afmetingen van het buigingsbeeld eener cirkelvormige opening met den straal R. De granulatie wordt des te fijner naarmate R grooter is, d. w. z, indien de geheele opening van het objectief door de genoemde cirkelvormige opening bedekt wordt, naarmate het oplossend vermogen van den kijker grooter is.

Het behoeft hierbij nauwelijks opgemerkt te worden, dat men in menig geval een grovere korreling zal zien dan aan het zooeven gezegde beantwoordt; elke oorzaak die aan het optische beeld in F eenige uitgebreidheid geeft, dus elk gebrek van den kijker en eveneens een zekere uitgebreidheid van de opening die als lichtbron dient, zal dit gevolg hebben. Zij zal de oorspronkelijke fijne granulatie meer en meer uitwisschen, zoodat nog slechts grootere lichte en donkere vlekken, met kleiner geworden intensiteitsverschillen te zien zijn.

§ 10. Wij zullen nu de middelwaarden $\overline{i' i_1'}$ en $\overline{i' i_2'}$ (§ 2) beschouwen, maar daarbij ter bekorting alleen de termen neerschrijven, die alle andere ver overtreffen; deze termen moeten wij dan vergelijken met den term n^2, die in $\overline{i'^2}$ overbleef.

Voor de berekening van $\overline{i' i_1'}$ (verg. (7) en (10)) moeten wij in $\overline{Q}$ (§ 4) substitueeren

$$\varphi(a, b) = \cos k\, \varrho\, (x_a - x_b), \qquad \psi(a, b) = \cos k\, \varrho'\, (x_a - x_b).$$

Bij nader onderzoek blijkt het dat men alleen op $\overline{Q_1}$ te letten heeft, en men vindt daarvoor uit (16)

$$\overline{Q_1} = \frac{n^2}{A^2} \iint \left\{ \cos k\, (\varrho' - \varrho)\, (x_1 - x_2) + \cos k\, (\varrho' + \varrho)\, (x_1 - x_2) \right\} d\sigma_1\, d\sigma_2.$$

Deze integraal valt in twee deelen uiteen, waarvan het tweede evenmin in aanmerking komt als het overeenkomstige deel van de integraal in (28). Terwijl wij echter in deze laatste integraal den term n^2 vonden, is nu de uitkomst

$$\overline{i' i_1'} = \frac{n^2}{A^2}\iint \cos k\,(\varrho'-\varrho)\,(x_1-x_2)\,d\sigma_1\,d\sigma_2 = 4n^2\left[\frac{J_1(k[\varrho'-\varrho]R)}{k\,(\varrho'-\varrho)\,R}\right]^2 \quad . \ (31)$$

Om verder $\overline{i' i_2'}$ te leeren kennen, moeten wij, met het oog op (7) en (11) in $\overline{Q}$ stellen

$$\varphi\,(a, b) = \cos k\,\varrho\,(x_a - x_b), \qquad \psi\,(a, b) = \cos k\,\varrho\,(x'_a - x'_b),$$

waarin x'_a en x'_b de in § 3 aangewezen beteekenis hebben. Ook nu weer komt het alleen aan op de grootheid $\overline{Q_1}$, waarvoor men vindt

$$\overline{Q_1} = \frac{n^2}{A^2}\iint\Big\{\cos k\,\varrho\,[(x_1-x'_1) - (x_2-x_2')] +$$

$$+ \cos k\varrho\,[(x_1+x'_1) - (x_2+x'_2)]\Big\}\,d\sigma_1\,d\sigma_2 \quad . \ . \ . \ . \ (32)$$

Stel nu dat de assen waarop de coördinaten x'_a, y'_a betrekking hebben, uit de oorspronkelijke assen FX, FY door een wenteling $2\,\vartheta$ ontstaan, zoodat

$$2\,\vartheta = \angle PFP_2$$

is, en laat x_a, y_a de coördinaten van het diffracteerende punt a zijn ten opzichte van de assen waarin FX en FY door een half zoo groote wenteling overgaan. Dan is

$$x_a - x'_a = -\,2\,\mathsf{y}_a \sin\vartheta, \qquad x_a + x'_a = 2\,\mathsf{x}_a \cos\vartheta$$

en wij vinden uit (32)

$$\overline{i' i'_2} = 4n^2\left\{\left[\frac{J_1(2\,k\,\varrho\,R\sin\vartheta)}{2\,k\,\varrho\,R\sin\vartheta}\right]^2 + \left[\frac{J_1(2\,k\,\varrho\,R\cos\vartheta)}{2\,k\,\varrho\,R\cos\vartheta}\right]^2\right\}, \quad (33)$$

waarin de laatste term kan worden weggelaten, omdat de punten P en P_2 dicht bij elkander liggen en dus $\cos\vartheta$ weinig van 1 verschilt, terwijl $2\,k\,\varrho\,R$ een groot getal is.

Schrijft men Δ voor den afstand der twee beschouwde punten P en P_1, of P en P_2, zoodat in het eerste geval $\Delta = \varrho'-\varrho$ en in het tweede $\Delta = 2\,\varrho\sin\vartheta$ is, dan nemen de uitdrukkingen (31) en (33) beide den vorm

$$4\,n^2\left[\frac{J_1(k\,\Delta\,R)}{k\Delta\,R}\right]^2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (34)$$

aan. Deze overeenstemming wijst weer op een korrelige, en niet op een vezelige structuur van het buigingsbeeld.

Bij voortdurende afneming van den afstand Δ nadert (34) tot n^2; de middelwaarden $\overline{i' i_1'}$ en $\overline{i' i_2'}$ vallen daarbij met $\overline{i'^2}$ samen, zooals het geval moest zijn. De middelwaarden (31) en (33) blijven verder met $\overline{i'^2}$ vergelijkbaar, zoolang $kR\Delta$ niet te dicht bij 3,83 en dus Δ (verg. (23)) niet te dicht bij q komt. Wordt echter Δ tamelijk groot in vergelijking met q, dan worden $\overline{i' i_1'}$ en $\overline{i' i_2'}$ veel kleiner dan $\overline{i'^2}$; men kan dan zeggen dat de intensiteiten in P_1 en P_2 onafhankelijk van die in P zijn. Deze gevolgtrekkingen zijn in goede overeenstemming met het in § 9 over de afmetingen der granulaties gevondene.

§ 11. Er blijft ons nu nog over, de waarde van $\overline{j^2}$ (§ 3) te bepalen. Daar wij onderstellen dat de afstanden ϱ en ϱ' waarop de uiteinden van het beschouwde lijntje PP' van F verwijderd zijn, zeer groot zijn in vergelijking met q, d.w.z. met de afmetingen van het buigingsbeeld der opening A, is overal langs de lijn $\overline{i'} = 0$. Dus is ook $\overline{j} = 0$, zoodat wij bij de berekening van $\overline{j^2}$ ons alleen met U_1 en U_2 (§ 4) behoeven bezig te houden. Wegens (12) stellen wij nu

$$\varphi(a, b) = f_{II}(x_a - x_b) - f_I(x_a - x_b),$$

waar

$$f_I(x) = \frac{\sin k\varrho x}{kx}, \qquad f_{II}(x) = \frac{\sin k\varrho' x}{kx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

is.

Laat de coordinaat x in de elementen $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$ van den cirkel A de waarden x_1, x_2, x_3 hebben. Dan kan men U_1 schrijven in den vorm van een integraal naar x_1 en x_2, en evenzoo U_2 als een integraal naar x_1, x_2 en x_3. Door verder in U_1 de grootheden x_1 en $x_2' = x_2 - x_1$ als integratieveranderlijken in te voeren, en evenzoo in U_2 de grootheden x_1, x_2' en $x_3' = x_3 - x_1$, vindt men

$$U_1 = \frac{16\,n^2}{A^2}\int_0^{2R}\int_{-R}^{R-x'_2}[f_I(x'_2) - f_{II}(x'_2)]^2 \sqrt{(R^2 - x_1^2)[R^2 - (x_1 + x'_2)^2]}\,dx'_2\,dx_1 \quad (36)$$

$$U_2 = \frac{64\,n^3}{A^3}\int [f_I(x'_2) - f_{II}(x'_2)]\,[f_I(x'_3) - f_{II}(x'_3)]\,M\,dx'_3\,dx'_2\,dx_1, \quad . \quad (37)$$

in welke laatste uitdrukking het integraalteeken de volgende beteekenis heeft:

$$\int \ldots dx'_3\,dx'_2\,dx_1 =$$

$$\int_0^{2R}\left\{\int_0^{x'_3}\int_{-R}^{R-x'_3} + \int_{x'_3}^{2R}\int_{-R}^{R-x'_2} + \int_{-2R+x'_3}^{0}\int_{-R-x'_2}^{R-x'_3}\right\}\ldots\,dx'_3\,dx'_2\,dx_1$$

terwijl

$$M = \sqrt{(R^2 - x_1^2)\,[R^2 - (x_1 + x'_2)^2]\,[R^2 - (x_1 + x'_3)^2]}$$

is.

Om uit deze ingewikkelde uitkomsten een besluit te trekken, zullen wij onderstellen dat niet alleen ϱ en ϱ' veel grooter dan q zijn, maar dat dit ook geldt van hun verschil, d.w.z. van de lengte van het beschouwde lijntje PP'. Wij kunnen dan een lengte l invoeren, zeer groot ten opzichte van $\frac{1}{k(\varrho'-\varrho)}$ en tevens zeer klein ten opzichte van den straal R van den cirkel A. Immers, men heeft volgens (23) $R = \frac{3,83}{kq}$ en dit is veel grooter dan $\frac{1}{k(\varrho'-\varrho)}$ omdat $\varrho'-\varrho$ veel grooter dan q is.

De functiën $f_I(x_2')-f_{II}(x_2')$ en $f_I(x_3')-f_{II}(x_3')$ hebben nu alleen in het interval $-l$, $+l$, dat zeer klein is in vergelijking met de door R bepaalde afmetingen van het integratiegebied in (36) en (37) merkbare waarden. Voor $x_2'=0$ of $x_3'=0$ is hunne waarde nl. $\varrho-\varrho'$, maar voor $x_2'=l$ of $x_3'=l$ zijn zoowel f_I als f_{II} van de orde van grootte $\frac{1}{kl}$, wat volgens het boven gezegde zeer klein is ten opzichte van $\varrho'-\varrho$.

Daar nu al wat verder in (36) en (37) voorkomt in een interval, zoo klein als het zooeven genoemde, niet merkbaar verandert, zal het geoorloofd zijn, in die vergelijkingen overal buiten de factoren $f_I(x_2')-f_{II}(x_2')$ en $f_I(x_3')-f_{II}(x_3')$ de grootheden x_2' en x_3' door 0 te vervangen; bovendien zullen wij de grenzen $-2R$ en $+2R$ bij de integraties naar x_2' en x_3' vervangen door $-\infty$ en $+\infty$. In het oog houdende dat f_I en f_{II} even functiën zijn, vindt men op deze wijze

$$U_1 = \frac{64 n^2 R^3}{3A^2}\int_0^\infty [f_I(x)-f_{II}(x)]^2\,dx, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

$$U_2 = \frac{48\, n^2 R^2}{A^2}\left\{\int_0^\infty [f_I(x)-f_{II}(x)]\,dx\right\}^2.$$

Vooreerst volgt nu uit (35)

$$\int_0^\infty f_I(x)\,dx = \int_0^\infty f_{II}(x)\,dx = \frac{\pi}{2k},$$

en dus

$$U_2 = 0.$$

Verder vindt men voor de integraal in (38), als men $kx = u$ stelt

$$\frac{1}{k}\int_0^\infty \frac{(\sin \varrho\, u - \sin \varrho'\, u)^2}{u^2}\,du,$$

of, na partieele integratie

$$\frac{1}{k}\left\{\varrho\int_0^\infty \frac{\sin 2\,\varrho\,u}{u}\,du + \varrho'\int_0^\infty \frac{\sin 2\varrho'\,u}{u}\,du - (\varrho'+\varrho)\int_0^\infty \frac{\sin(\varrho'+\varrho)\,u}{u}\,du + \right.$$

$$\left. + (\varrho'-\varrho)\int_0^\infty \frac{\sin(\varrho'-\varrho)\,u}{u}\,du\right\}.$$

Elk der hier voorkomende integralen heeft de waarde $\frac{1}{2}\pi$, en ten slotte wordt, als wij de lengte $\varrho'-\varrho$ der beschouwde lijn PP' door s voorstellen,

$$\overline{j^2} = \frac{32}{3}\cdot\frac{1}{\pi\,k\,R}\,n^2\,s = 0{,}89\,n^2\,q\,s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

Bij de laatste herleiding is van (23) gebruik gemaakt.

§ 12. In de omstandigheid dat het gemiddelde van de *tweede* macht der „intensiteitsafwijking langs de lijn PP'", zooals wij j kunnen noemen, evenredig is met de *eerste* macht van hare lengte s, kunnen wij een aanwijzing van een korrelige structuur van het buigingsbeeld, in tegenstelling met een vezelige structuur zien. Ook is de coëfficient van s in (39) in overeenstemming met de in § 9 aangaande de afmetingen der granulatie gevonden uitkomst. Om dit in te zien zal de volgende ruwe beschouwing voldoende zijn.

Wij zagen dat de afwijkingen van de gemiddelde intensiteit n van dezelfde orde van grootte zijn als die intensiteit zelf en dat de afmetingen der granulaties van de orde q zijn. Stellen wij ons in aansluiting hieraan voor dat de lijn s in een groot aantal stukken, elk van de grootte q, verdeeld wordt, en dat nu, naar het toeval, op deze stukken, telkens over hun volle lengte, de intensiteit $2n$ of 0 is, de afwijking i' dus $+n$ of $-n$. Het aantal stukken is

$$\nu = \frac{s}{q}$$

en als er hiervan $\frac{1}{2}\nu + \nu'$ in het eerste en $\frac{1}{2}\nu - \nu'$ in het tweede geval verkeeren, is de „intensiteitsafwijking langs de lijn", de waarde van de integraal (4)

$$2\,n\,q\,\nu'.$$

Het gemiddelde van de tweede macht hiervan wordt, in goede overeenstemming met (39)

$$4\,n^2\,q^2\,\overline{\nu'^2} = n^2\,q^2\,\nu = n^2\,q\,s,$$

daar volgens een bekende stelling $\overline{\nu'^2} = \frac{1}{4}\nu$ is.