NOTES SUR LA THÉORIE DES ÉLECTRONS[1])

1. *Formules fondamentales* (*unités rationnelles*). — Soient:
ρ la densité de la charge électrique;
$\mathbf{v}$ la vitesse d'un point de la charge;
c la vitesse de la lumière;
$\mathbf{d}$ la force électrique, ou le déplacement diélectrique;
$\mathbf{h}$ la force magnétique.

L'intensité de courant est donnée par $\dot{\mathbf{d}} + \rho\mathbf{v}$, et l'on a les équations

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \mathbf{d}_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathbf{d}_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathbf{d}_z}{\partial z} = \rho, \\[2ex] \dfrac{\partial \mathbf{h}_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathbf{h}_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathbf{h}_z}{\partial z} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial \mathbf{h}_z}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathbf{h}_y}{\partial z} = \dfrac{1}{c}(\dot{\mathbf{d}}_x + \rho\mathbf{v}_x), \quad \ldots, \\[2ex] \dfrac{\partial \mathbf{d}_z}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathbf{d}_y}{\partial z} = -\dfrac{1}{c}\dot{\mathbf{h}}_x, \quad \ldots . \end{array}\right| \qquad (1)$$

La force qui agit sur l'unité de charge est

$$\mathbf{f} = \mathbf{d} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}.\mathbf{h}], \qquad (2)$$

$[\mathbf{v}.\mathbf{h}]$ étant le produit vectoriel de $\mathbf{v}$ et de $\mathbf{h}$.

2. *Les équations fondamentales s'accordent avec le principe de relativité.*

La transformation dont on se sert dans la théorie de la relativité spéciale peut être mise sous la forme

[1]) Rapport à la Réunion Solvay, avril 1921. Gauthier-Villars, Paris, 1923.

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = az - bct, \quad t' = at - \frac{b}{c}z, \tag{3}$$

où a et b sont des constantes reliées entre elles par l'équation

$$a^2 - b^2 = 1.$$

Si l'on pose

$$\left.\begin{array}{lll} \mathbf{d}'_x = a\mathbf{d}_x - b\mathbf{h}_y, & \mathbf{d}'_y = a\mathbf{d}_y + b\mathbf{h}_x, & \mathbf{d}'_z = \mathbf{d}_z, \\ \mathbf{h}'_x = a\mathbf{h}_x + b\mathbf{d}_y, & \mathbf{h}'_y = a\mathbf{h}_y - b\mathbf{d}_x, & \mathbf{h}'_z = \mathbf{h}_z, \\ & \rho' = \left(a - b\dfrac{\mathbf{v}_z}{c}\right)\rho, & \end{array}\right| \tag{4}$$

on aura pour les grandeurs $\mathbf{d}'$, $\mathbf{h}'$ des équations qui ont exactement la même forme que les formules du paragraphe 1.

3. La théorie de la relativité exige qu'un électron animé d'une vitesse de translation $\mathbf{v}$ s'aplatisse dans la direction de cette translation dans le rapport de 1 à $\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}$. La quantité de mouvement et l'énergie sont données par les expressions

$$\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \tag{5}$$

et

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}}, \tag{6}$$

dans lesquelles m est une constante (masse de l'électron).

4. C'est pour l'électron que ces expressions ont été déduites en premier lieu, mais on a reconnu plus tard qu'elles s'appliquent à un corps quelconque qui, en se déplaçant avec la vitesse $\mathbf{v}$, se trouve dans un état stationnaire, les mouvements internes, quelle qu'en soit du reste la nature, ne conduisant à aucun changement, qui irait toujours dans le même sens.

Démonstration. — Désignons:
par X_x, X_y, ... les tensions par unité de surface,
par $\mathbf{G}_x, \mathbf{G}_y, \mathbf{G}_z$ les quantités de mouvement par unité de volume,

par E l'énergie par unité de volume,
et par $\mathbf{S}_x$, $\mathbf{S}_y$, $\mathbf{S}_z$ les composantes du courant d'énergie,

et supposons qu'entre ce courant et la quantité de mouvement il y ait toujours la relation

$$\mathbf{S} = c^2\,\mathbf{G}. \tag{7}$$

Nous aurons alors les formules de transformation suivantes:

$$X'_x = X_x, \qquad Y'_y = Y_y, \qquad X'_y = X_y,$$

$$X'_z = aX_z + bc\mathbf{G}_x, \qquad Y'_z = aY_z + bc\mathbf{G}_y,$$

$$Z'_z = a^2 Z_z + 2abc\mathbf{G}_z - b^2 E, \tag{8}$$

$$\mathbf{G}'_x = \frac{b}{c} X_z + a\mathbf{G}_x, \qquad \mathbf{G}'_y = \frac{b}{c} Y_z + a\mathbf{G}_y,$$

$$\mathbf{G}'_z = \frac{ab}{c} Z_z + (a^2 + b^2)\,\mathbf{G}_z - \frac{ab}{c} E, \tag{9}$$

$$E' = -\,b^2 Z_z - 2abc\,\mathbf{G}_z + a^2 E. \tag{10}$$

Supposons maintenant que, dans le système x, y, z, t, la quantité de mouvement totale soit nulle, et que l'énergie ait une valeur que nous représenterons par mc^2. En d'autres termes, si dS est un élément de volume et si les intégrales sont calculées pour une valeur déterminée du temps t,

$$\int \mathbf{G}_z\, dS = 0 \tag{11}$$

et

$$\int E\, dS = mc^2. \tag{12}$$

Cela posé, on peut calculer, pour une valeur déterminée τ de t', la quantité de mouvement du corps dans le système x', y', z', t', c'est-à-dire la grandeur

$$\int \mathbf{G}'_z\, dS'.$$

Si l'on représente par $\varphi\,(x, y, z, t)$ le second membre de l'équation (9), on peut écrire

$$\int \mathbf{G}'_z\, dS' = \frac{1}{a}\int \varphi\left(x, y, z, \frac{1}{a}\tau + \frac{b}{ac} z\right) dS.$$

Comme le résultat doit être une constante, on peut remplacer ici φ par sa valeur moyenne

$$\bar{\varphi}\left(x, y, z, \frac{1}{a}\tau + \frac{b}{ac}z\right),$$

prise pour un intervalle très étendu de la variable τ.

Pour un état stationnaire cette valeur est égale à

$$\bar{\varphi}\ (x, y, z, t),$$

prise pour un intervalle très long de la variable t.

Donc, en vertu de l'équation (9),

$$\int \mathbf{G}'_z\, dS' = \frac{b}{c}\int \bar{Z}_z\, dS + \left(a + \frac{b^2}{a}\right)\int \overline{\mathbf{G}}_z dS - \frac{b}{c}\int \bar{E}\, dS.$$

On peut démontrer [1]) que la première intégrale s'annule, et on a donc, si l'on tient compte de (11) et de (12),

$$\int \mathbf{G}'_z\, dS' = -bmc.$$

Si l'on applique le même raisonnement à l'équation (10), on trouve pour l'énergie du corps, dans le système x', y', z', t', la valeur

$$amc^2.$$

Comme la quantité de mouvement est nulle dans le système x, y, z, t, on peut bien dire que dans ce système le corps n'a pas de mouvement de translation et que, dans le système x', y', z', t', il a la vitesse avec laquelle le point $x = y = z = 0$ se déplace dans ce système. Cette vitesse a la direction de l'axe des z et la grandeur

$$v = -\frac{b}{a}c, \tag{13}$$

---

[1]) Soit, pour une valeur déterminée de z, $\int Z_z\, dx\, dy = Q$. Alors, en vertu de la signification de Z_z et de $\mathbf{G}_z$,

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{d}{dt}\int \mathbf{G}_z\, dx\, dy.$$

Cela nous donne pour la moyenne $\partial\bar{Q}/\partial z = 0$ et $\bar{Q} = 0$, parce que $\bar{Q}$ doit être nul pour $z = -\infty$. Mais

$$\int \bar{Z}_z\, dS = \int \bar{Q}\, dz.$$

de sorte qu'on a

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad b = -\frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{14}$$

Les valeurs que nous venons de trouver pour la quantité de mouvement et l'énergie se réduisent maintenant aux expressions (5) et (6). Ces expressions peuvent être appliquées à un atome ou à une molécule, et même à un corps de grandeur quelconque, ou au rayonnement noir enfermé dans une enceinte.

5. *Application à un système qui se divise en deux parties ayant les masses m_1 et m_2, et se mouvant dans la direction de OZ avec les vitesses v_1 et $-v_2$.*

Si le système primitif a la masse m et la vitesse 0, on a

$$\frac{m_1 v_1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} - \frac{m_2 v_2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} = 0,$$

$$\frac{m_1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} + \frac{m_2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} = m.$$

Ces formules, qui expriment la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie, nous permettent de calculer m_2 et v_2, si m, m_1, v_1, sont connus.

Si m_1 est très petit par rapport à m, on a en première approximation

$$m_2 = m - \frac{m_1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}, \qquad v_2 = \frac{m_1}{m_2} v_1.$$

6. *Constitution de l'électron.* — Dans ce qui suit, l'électron sera regardé comme étant, à l'état de repos, une sphère de rayon R, portant une charge e uniformément distribuée sur la surface. Une translation v la change en ellipsoïde aplati.

Il est facile de déterminer le champ électromagnétique qui entoure l'électron mobile et de calculer la quantité de mouvement et l'énergie dont ce champ est le siège. Le résultat est

$$\frac{e^2 v}{6\pi c^2 R}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{15}$$

pour la quantité de mouvement et

$$\frac{e^2}{6\pi R}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}-\frac{e^2}{24\pi R}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{16}$$

pour l'énergie.

Reste à savoir quelles sont les valeurs de la quantité de mouvement et de l'énergie qui existent à l'intérieur de l'électron, où il n'y a pas de champ électromagnétique. Pour déterminer ces valeurs, je supposerai que l'électron se trouve en repos dans le système x, y, z, t. Il est alors soumis à la tension

$$\frac{e^2}{32\pi^2 R^4}$$

dans la direction des lignes de force extérieures, ce qui nous conduit à poser pour l'intérieur

$$X_x = Y_y = Z_z = \frac{e^2}{32\pi^2 R^4}.$$

Admettons encore que, dans le cas considéré, l'énergie E par unité de volume ait une valeur ε, constante dans toute l'étendue de l'électron. Évidemment, pour l'état de repos, $\mathbf{G} = 0$.

Passons maintenant à un autre système x', y', z', t', en nous servant des formules de transformation (8)-(10). On trouve

$$X'_x = Y'_y = \frac{e^2}{32\pi^2 R^4},$$

$$Z'_z = a^2 \frac{e^2}{32\pi^2 R^4} - b^2\varepsilon,$$

$$\mathbf{G}'_z = \frac{ab}{c}\left(\frac{e^2}{32\pi^2 R^4} - \varepsilon\right),$$

$$E' = a^2\varepsilon - b^2\frac{e^2}{32\pi^2 R^4}.$$

Les deux dernières valeurs, multipliées par $4\pi R^3/3a$ (volume de l'électron) s'ajoutent aux grandeurs (15) et (16). On trouve ainsi pour les valeurs totales de la quantité de mouvement et de l'énergie des expressions qui s'accordent avec (5) et (6) quand on pose

$$m = \frac{e^2}{8\pi c^2 R} + \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{\varepsilon}{c^2}.$$

D'après une hypothèse bien connue de POINCARÉ on aurait

$$\varepsilon = \frac{e^2}{32\pi^2 R^4}.$$

Cela nous donne

$$m = \frac{e^2}{6\pi c^2 R},$$

$$X'_x = Y'_y = Z'_z = \varepsilon, \qquad E' = \varepsilon, \qquad \mathbf{G}'_x = 0.$$

A l'intérieur de l'électron mobile il n'y aurait donc ni quantité de mouvement ni courant d'énergie; les tensions normales et la densité de l'énergie y resteraient toujours les mêmes.

Dans l'hypothèse de POINCARÉ on se heurte à la difficulté que l'équilibre entre les tensions de MAXWELL et une tension intérieure constante n'est pas stable. Pour s'assurer de la stabilité on peut considérer l'électron comme un corps *rigide*, c'est-à-dire comme composé d'une substance ayant des modules d'élasticité infiniment grands, ce qui, bien entendu, ne la mettrait pas à l'abri de la contraction qui est causée par un mouvement de translation.

Si l'électron est rigide, il est naturel de poser $\varepsilon = 0$; en effet, il n'y aurait aucun moyen de se rendre compte d'une valeur différant de 0.

La supposition $\varepsilon = 0$ conduit à

$$m = \frac{e^2}{8\pi c^2 R}$$

et entraîne les conséquences un peu singulières qu'à l'intérieur d'un électron se mouvant avec la vitesse $\mathbf{v}$, il y aurait une quantité de mouvement et une énergie *négatives*, ces grandeurs étant données par

$$\mathbf{G}'_x = -\frac{\mathbf{v}}{c^2 - \mathbf{v}^2} \cdot \frac{e^2}{32\pi^2 R^4}; \qquad E' = -\frac{\mathbf{v}^2}{c^2 - \mathbf{v}^2} \cdot \frac{e^2}{32\pi^2 R^4}.$$

7. *Mouvement d'un système de particules chargées sous l'influence de leurs attractions et répulsions électrostatiques mutuelles.*

Soit k/r^2 la force entre deux particules, k étant positif dans le cas d'une répulsion.

L'énergie potentielle a la valeur

$$U = \Sigma \frac{k}{r}.$$

D'un autre côté le théorème du viriel [1]) nous apprend que, pour un état de mouvement stationnaire, la valeur moyenne de l'énergie cinétique T est égael à la moitié de celle du viriel, changée de signe, c'est-à-dire que $\overline{T}$ est égal à la valeur moyenne de

$$-\frac{1}{2}\Sigma\frac{k}{r}.$$

Entre les valeurs moyennes des énergies potentielle et cinétique il y a donc la relation

$$\overline{U} = -2\,\overline{T}. \qquad (17)$$

Ce résultat peut être étendu au cas où le système est placé dans un champ électrique **E**, homogène et constant. Plaçons l'axe des x dans la direction de ce champ, désignons par e la charge d'une des particules, et soit $\Sigma e = 0$. Comme la force électrique **E** donne lieu à un terme $-\mathbf{E}\Sigma\,(ex)$ dans l'énergie potentielle, et à un terme $\mathbf{E}\Sigma(ex)$ dans le viriel, on trouve

$$\overline{U} = -2\overline{T} - 2\mathbf{E}\Sigma(\overline{ex}).$$

8. *Applications de la relation* (17).

a. Si l'on éloigne les particules les unes des autres à des distances infinies, de telle manière qu'elles se trouvent en repos après la séparation, l'énergie augmente de

$$-(U + T) = \overline{T}.$$

Par conséquent, la masse du système est moindre que la somme des masses des particules isolées, la différence étant

$$\frac{\overline{T}}{c^2} = \frac{1}{2c^2}\Sigma\,\overline{mv^2}.$$

b. La formule (17) montre que $\overline{U}$ doit être négatif. Dans la somme

---

[1]) Je rappellerai qu'on donne le nom de *viriel* d'un système de forces X, Y, Z, appliquées aux points x, y, z, à la somme $\Sigma\,(Xx + Yy + Zz)$.

$$\Sigma \frac{k}{r}$$

les termes correspondant aux attractions doivent donc l'emporter sur ceux qui proviennent des répulsions. Ou bien, parce que $k = ee'$, les termes dans lesquels e et e' ont des signes opposés doivent l'emporter sur ceux dans lesquels e et e' ont le même signe.

On pourrait appliquer cette condition au noyau d'un atome, s'il était permis de le considérer comme un système de particules agissant les unes sur les autres selon les lois de l'électrostatique et se mouvant conformément aux règles de la mécanique classique. Prenons comme exemple le noyau de l'oxygène tel que M. RUTHERFORD se l'est imaginé. Il se compose de quatre particules A à charge $+ 2$, une particule B à charge $+ 2$, et deux électrons à charge $- 1$. Entendons par distance moyenne la valeur inverse de la moyenne de $1/r$, et appelons

r_1 la distance moyenne entre deux A,
r_2 la distance moyenne entre un A et B,
r_3 la distance moyenne entre les deux électrons,
r_4 la distance moyenne entre un électron et un A,
r_5 la distance moyenne entre un électron et B.

La condition devient

$$\frac{16}{r_4} + \frac{4}{r_5} > \frac{24}{r_1} + \frac{16}{r_2} + \frac{1}{r_3}. \tag{18}$$

Il semble douteux que cette inégalité puisse se vérifier.

9. *Un théorème plus général.* — Il est probable que les forces entre les particules constituantes d'un noyau sont loin d'être simplement électrostatiques et qu'elles peuvent donner lieu à des déformations considérables des particules. Il y a donc, peut-être, quelque intérêt à faire connaître un théorème analogue à celui du viriel, mais d'une portée plus générale que la proposition dont il fut question au paragraphe 7. Je supposerai seulement que le champ entre les particules se conforme aux équations de MAXWELL et que ce n'est qu'à l'intérieur des particules qu'il y a des forces de nature non-électromagnétique, telles que la tension imaginée par POINCARÉ. De plus, le système sera supposé ne pas avoir de vitesse de translation.

Soient, par unité de volume, X, Y, Z les composantes de la force non-électromagnétique. On aura

$$X = -\rho \mathbf{f}_x, \quad Y = -\rho \mathbf{f}_y, \quad Z = -\rho \mathbf{f}_z,$$

où $\mathbf{f}$ est la force déterminée par la formule (2).

Pour le viriel V des forces non-électromagnétiques

$$V = \int (xX + yY + zZ)\, dS = -\int (x\mathbf{f}_x + y\mathbf{f}_y + z\mathbf{f}_z)\, \rho\, dS,$$

on trouve, en se servant des formules fondamentales et en limitant le champ S des intégrations par une surface fermée σ, dont la normale extérieure est n,

$$V + \int (xX_n + yY_n + zZ_n)\, d\sigma = -\int \frac{1}{2}(\mathbf{d}^2 + \mathbf{h}^2)\, dS +$$

$$+ \frac{d}{dt}\int (x\mathbf{G}_x + y\mathbf{G}_y + z\mathbf{G}_z)\, dS. \quad (19)$$

Ici $\mathbf{G}_x$, $\mathbf{G}_y$, $\mathbf{G}_z$ sont les composantes de la quantité de mouvement électromagnétique, et X_n, Y_n, Z_n celles des tensions de MAXWELL agissant à la surface σ. On voit que la première intégrale n'est autre chose que le viriel de ces tensions.

Eloignons maintenant à l'infini les points de la surface σ. Le viriel des tensions tend alors vers 0, si les forces électrique et magnétique diminuent comme l'inverse du carré de la distance au centre; il en sera ainsi tant que le système ne rayonne pas. Le dernier terme de l'équation s'annule quand on passe aux valeurs moyennes, l'état étant considéré comme stationnaire. On voit donc que la valeur moyenne du viriel des forces non-électromagnétiques devient égale à celle de l'énergie électromagnétique du système, prise avec le signe opposé.

Ce théorème, bien différent au premier abord de la proposition du paragraphe 7, la comprend cependant comme cas particulier. Pour le moment, il semble difficile de tirer de cette généralisation quelque conséquence utile.

10. *Un atome placé dans un champ magnétique variable, le noyau étant en repos.*

Dans sa théorie du magnétisme M. LANGEVIN a montré comment on peut calculer le moment magnétique développé dans les substances diamagnétiques par les forces électriques existant dans un champ magnétique variable. Pour le cas d'un noyau entouré d'un certain nombre d'électrons la théorie peut être mise sous une forme simple, qui se rapproche d'un théorème qu'on doit à M. LARMOR. Dans ce qui suit, les forces entre les particules constituantes de l'atome, noyau et électrons, seront considérées comme purement électrostatiques, et les équations de la mécanique ordinaire seront appliquées.

Plaçons l'origine des coordonnées dans le noyau et représentons par $\mathbf{h}_0$ la force magnétique en ce point. Il suffira de connaître la force agissant sur un électron qui se trouve à une distance très petite. Or, en vertu de la dernière des équations (1), on peut décomposer (pour le voisinage immédiat de O) la force électrique $\mathbf{d}$ en deux parties, dont la première a pour composantes

$$\frac{1}{2c}(y\dot{\mathbf{h}}_{0z} - z\dot{\mathbf{h}}_{0y}) \quad \ldots, \tag{20}$$

tandis que la seconde dépend d'un potentiel φ. Comme ce potentiel est dû au changement $\dot{\mathbf{h}}$ du champ magnétique, sa variation dépendra de $\ddot{\mathbf{h}}$ et pourra souvent être négligée pour un temps suffisamment court. Pour un électron qui circule dans une orbite fermée, et pour lequel le travail des forces (20) peut avoir une valeur positive ou négative, le travail de la seconde partie de $\mathbf{d}$ sera nul. On comprend ainsi que cette seconde partie est sans importance pour le magnétisme induit; aussi la négligerons-nous dans ce qui va suivre [1]).

En introduisant encore la force $[\mathbf{v}.\mathbf{h}]\,e/c$ due aux mouvements des électrons dans le champ magnétique $\mathbf{h}$, on trouve pour chaque électron trois équations de la forme

$$m\ddot{x} = \mathbf{F}_x + \frac{e}{c}(\dot{y}\mathbf{h}_z - \dot{z}\,\mathbf{h}_y) + \frac{e}{2c}(y\dot{\mathbf{h}}_z - z\dot{\mathbf{h}}_y), \quad \ldots, \tag{21}$$

où, pour simplifier, j'ai écrit $\mathbf{h}$ au lieu de $\mathbf{h}_0$.

$\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$, $\mathbf{F}_z$ sont les forces qui proviennent de l'action du noyau et des autres électrons.

En nous basant sur *l'égalité* des charges e des différents électrons, nous introduirons maintenant de nouvelles coordonnées

[1]) Le potentiel φ disparaît rigoureusement quand le champ magnétique est symétrique autour d'un axe passant par le noyau.

x', y', z', prises par rapport à des axes qui tournent autour de la ligne de force passant par le point O avec la vitesse angulaire

$$\omega = -\frac{e}{2cm}\mathbf{h}. \tag{22}$$

Les composantes de cette vitesse angulaire, variable avec le champ $\mathbf{h}$, seront

$$-\frac{e}{2cm}\mathbf{h}_x, \qquad -\frac{e}{2cm}\mathbf{h}_y, \qquad -\frac{e}{2cm}\mathbf{h}_z,$$

et, si λ_1, μ_1, ν_1 sont les cosinus directeurs de x' par rapport à x, y, z; λ_2, μ_2, ν_2 ceux de y', et λ_3, μ_3, ν_3 ceux de z', on aura

$$\dot{\lambda}_1 = \frac{e}{2cm}(\mu_1\mathbf{h}_z - \nu_1\mathbf{h}_y), \quad \ldots, \tag{23}$$

et, en négligeant le carré de $\mathbf{h}$,

$$\ddot{\lambda}_1 = \frac{e}{2cm}(\mu_1\dot{\mathbf{h}}_z - \nu_1\dot{\mathbf{h}}_y), \quad \ldots. \tag{24}$$

Ensuite, les relations

$$x' = \lambda_1 x + \mu_1 y + \nu_1 z, \quad \ldots$$

nous donnent

$$\ddot{x}' = \lambda_1\ddot{x} + \mu_1\ddot{y} + \nu_1\ddot{z} + 2(\dot{\lambda}_1\dot{x} + \dot{\mu}_1\dot{y} + \dot{\nu}_1\dot{z}) + \ddot{\lambda}_1 x + \ddot{\mu}_1 y + \ddot{\nu}_1 z, \quad \ldots.$$

En fin de compte, en introduisant ici les valeurs (23) et (24), on déduit facilement des équations (21)

$$m\ddot{x}' = \mathbf{F}'_x, \qquad m\ddot{y}' = \mathbf{F}'_y, \qquad m\ddot{z}' = \mathbf{F}'_z. \tag{25}$$

Le champ magnétique a disparu et

$$\mathbf{F}'_x = \lambda_1\mathbf{F}_x + \mu_1\mathbf{F}_y + \nu_1\mathbf{F}_z \ \ldots.$$

sont les composantes des forces $\mathbf{F}'$ par rapport aux nouveaux axes des coordonnées. Comme les distances mutuelles et les différences de coordonnées entrent dans ces composantes de la même manière que dans les expressions primitives pour $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$, $\mathbf{F}_z$, les équations du mouvement (25) ont exactement la même forme que celles qui détermineraient le mouvement par rapport à des axes immobiles dans le cas où il n'y aurait pas de champ magnétique.

Donc, lorsque l'on connaît le mouvement des électrons dans ce dernier cas, on pourra dire non seulement comment ce mouvement se modifiera dans un champ constant, mais aussi quelle sera l'influence de l'établissement ou de la disparition d'un champ magnétique.

Considérons, par exemple, l'action d'un champ qui a la direction de l'axe des z, et cherchons le moment magnétique de l'atome dans la direction de cet axe. Ce moment est donné par

$$\frac{e}{2c}\Sigma\,(x\dot{y} - y\dot{x}), \tag{26}$$

la somme étant étendue à tous les électrons. Soit d'abord $\mathbf{h}_z = 0$; l'expression (26) a une certaine valeur que nous représenterons par $\mathbf{m}_0$, et qui ne varie pas dans le cours du temps. Notre théorème nous apprend qu'après l'établissement d'un champ $\mathbf{h}_z = h$, ce sera l'expression (26) avec x, y remplacés par x', y', qui a la valeur $\mathbf{m}_0$, donc

$$\frac{e}{2c}\Sigma\,(x'\dot{y}' - y'\dot{x}') = \mathbf{m}_0;$$

il s'agit d'en déduire

$$\mathbf{m} = \frac{e}{2c}\Sigma\,(x\dot{y} - y\dot{x}),$$

ce qui est le vrai moment magnétique.

Les relations entre x, y, x', y' sont maintenant

$$x = x'\cos\vartheta - y'\sin\vartheta, \quad y = x'\sin\vartheta + y'\cos\vartheta,$$

avec

$$\dot{\vartheta} = -\frac{e}{2cm}h.$$

En substituant ces valeurs on trouve

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 - \frac{e^2}{4c^2m}\Sigma\,(x'^2 + y'^2)\,h. \tag{27}$$

Le dernier terme, dans lequel on peut remplacer la somme par $\Sigma(x^2 + y^2)$ (coordonnées primitives) représente le moment qui est *produit* par le champ magnétique h.

11. *Rotation d'un électron*[1]. — Un électron tournant autour d'un diamètre, disons autour de l'axe OX, avec une vitesse angulaire ω constante ou lentement variable, a un moment magnétique dirigé suivant l'axe de rotation et de grandeur

$$\frac{eR^2}{3c}\,\omega.$$

La rotation produit un champ magnétique qui, à l'extérieur, correspond à ce moment. A l'intérieur le champ est uniforme:

$$\mathbf{h}_x = \frac{e}{6\pi c R}\,\omega. \tag{28}$$

L'énergie magnétique a la valeur

$$\frac{e^2R}{36\pi c^2}\,\omega^2$$

et la quantité de mouvement électromagnétique a, par rapport à l'axe de rotation, le moment

$$\frac{e^2R}{18\pi c^2}\,\omega.$$

On voit donc que l'électron se comporte comme une sphère ayant le moment d'inertie

$$\frac{e^2R}{18\pi c^2}.$$

12. *Action d'un champ sur un électron.* — Un électron, animé d'une vitesse de translation $\mathbf{v}$ et d'une vitesse de rotation ω, se trouve dans un champ électromagnétique produit par des causes extérieures et caractérisé par la force électrique $\mathbf{d}$ et la force magnétique $\mathbf{h}$ (valeurs au centre de l'électron). Ce champ agit sur l'électron avec une force ayant les composantes

$$e\,\mathbf{d}_x + \frac{e}{c}(\mathbf{v}_y\,\mathbf{h}_z - \mathbf{v}_z\,\mathbf{h}_y), \quad \ldots$$

[1]) Dans tout ce qui va suivre, les termes de l'ordre de grandeur v^2/c^2 seront négligés; l'électron sera donc sphérique.

et un couple dont les composantes sont

$$-\frac{eR^2}{3c}\frac{d\mathbf{h}_x}{dt}+\frac{eR^2}{3c}(\omega_y\,\mathbf{h}_z-\omega_z\,\mathbf{h}_y), \quad \ldots . \tag{29}$$

Ici

$$\frac{d\mathbf{h}_x}{dt}=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}_x\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{v}_y\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{v}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{h}_x$$

représente le changement de $\mathbf{h}_x$ au centre de l'électron mobile.

A cette action d'un champ étranger s'ajoute celle du champ produit par l'électron même. Elle consiste en deux forces, savoir

$$-\frac{e^2}{6\pi c^2 R}\dot{\mathbf{v}}_x, \ldots \tag{30}$$

et

$$\frac{e^2}{6\pi c^3}\ddot{\mathbf{v}}_x, \ldots \tag{31}$$

et un couple

$$-\frac{e^2 R}{18\pi c^2}\dot{\omega}_x, \ldots \tag{32}$$

Les composantes (30) et (32) correspondent à la masse et au moment d'inertie de l'électron.

En combinant les expressions (29) et (32) on déduit facilement la rotation à laquelle un champ magnétique peut donner lieu. Supposons que d'abord $\mathbf{h} = 0$ et que l'électron soit sans rotation. Alors, si d'une manière ou d'une autre il vient à se trouver dans un champ $\mathbf{h}$, il aura acquis une vitesse de rotation aux composantes

$$\omega_x = -\frac{6\pi c R}{e}\mathbf{h}_x, \quad \ldots$$

La formule (28) montre que cette rotation a pour effet d'annuler $\mathbf{h}$ à l'intérieur de l'électron.

La rotation que nous venons de considérer a lieu autour de la ligne de force magnétique. On peut aussi imaginer une rotation autour d'un axe quelconque.

Supposons que le champ $\mathbf{h}$ soit uniforme et constant. Alors l'axe de rotation de l'électron aura un mouvement de précession qui est déterminé par

$$-\frac{e^2R}{18\pi c^2}\,\dot{\omega}_x + \frac{eR^2}{3c}\,(\omega_y \mathbf{h}_z - \omega_z \mathbf{h}_y) = 0, \quad \ldots.$$

Dans l'espace l'axe décrira un cône de révolution autour de la ligne de force, la vitesse de cette rotation étant

$$-\frac{6\pi cR}{e}\,\mathbf{h}.$$

En tenant compte du signe négatif de e, on voit que dans cette précession le mouvement du *pôle* de l'électron sera opposé à celui des aiguilles d'une montre, pour un spectateur qui se trouve du côté vers lequel tendent les lignes de force.

13. *Rayonnement des électrons et des atomes.* — La théorie exige que tout changement dans le mouvement d'un électron donne lieu à une onde électromagnétique dont la propagation est accompagnée d'un rayonnement d'énergie. Si, à un moment t, l'électron, se trouvant au point P, a une accélération $\mathbf{j}$, cela se fera sentir en un point éloigné Q ($PQ = r$) au temps postérieur $t + r/c$ par une force électrique

$$-\frac{e}{4\pi c^2 r}\,\mathbf{j}_p,$$

où $\mathbf{j}_p$ est la composante de l'accélération perpendiculaire à la ligne PQ. Cette force électrique a la direction de $\mathbf{j}_p$ et est accompagnée d'une force magnétique de grandeur égale, perpendiculaire au plan passant par PQ et $\mathbf{j}$, et ayant un tel sens que le courant d'énergie

$$\frac{e^2}{16\pi^2 c^3 r^2}\,\mathbf{j}_p^2$$

est dirigé suivant le prolongement de PQ.

Ce rayonnement est intimement lié à la force que nous avons représentée par (31) et qui peut être considérée comme une *résistance* s'opposant aux variations du mouvement de l'électron.

Le théorème que je viens de rappeler est bien d'accord avec le phénomène de la diffusion de la lumière par les molécules (formule de RAYLEIGH), mais il conduit à de graves difficultés dans la théorie moderne de la constitution de la matière. On devrait en conclure que les électrons qui circulent autour du noyau perdent continuellement de l'énergie; l'état du système ne pourrait donc pas être permanent.

A propos de ce rayonnement et de la résistance qui lui correspond, on peut faire les remarques suivantes:

a. Le champ produit par un électron à mouvement variable donne lieu, non seulement à la force (31) agissant sur l'électron même, mais aussi à une force semblable qui agit sur un électron voisin. C'est ainsi que, pour un système d'électrons placés à des distances égales sur une circonférence et se mouvant sur cette ligne avec la même vitesse, la résistance totale, ainsi que le rayonnement, diminuent rapidement à mesure que le nombre des particules augmente. Le mouvement constant d'une charge uniformément répandue sur une ligne circulaire ne produit pas de rayonnement et aucune résistance ne s'y oppose. Il en sera de même quand une charge distribuée sur une ligne fermée quelconque a un mouvement stationnaire comparable à celui d'un fluide incompressible dans un tube fermé sur lui-même.

b. L'étude des spectres dus à des atomes qui ne contiennent qu'un seul électron (hydrogène, hélium à charge $+ 1$) a fait voir que le noyau n'est pas immobile, mais décrit une orbite à dimensions très petites. Cela prouve qu'à la place du noyau le champ produit par l'électron change périodiquement avec la position de cette particule. On s'attendrait donc à ce que cette périodicité existât également à des distances plus grandes, ce qui amènerait nécessairement un rayonnement.

14. *Pourra-t-on maintenir les équations de Maxwell?* — Les spéculations suivantes n'ont aucunement la prétention de résoudre la difficulté que je viens de signaler; elles peuvent montrer tout au plus qu'il n'est pas tout à fait impossible de la reléguer à l'intérieur des atomes et de maintenir les équations de MAXWELL pour l'espace environnant.

a. Les théories développées par M. BOHR et d'autres physiciens montrent clairement que l'électricité négative n'est pas concentrée dans des anneaux, mais dans les électrons ayant la masse et la charge bien connues; par exemple, le mouvement du noyau dont il fut question au paragraphe précédent ne pourrait avoir lieu s'il était entouré d'un anneau d'électricité négative. Donc, si, pour échapper à la difficulté du rayonnement, on désire des anneaux pleins, il faudra admettre qu'il peut y avoir transformation de systèmes d'électrons en anneaux, et inversement.

b. On pourrait imaginer, autour de chaque atome, une surface fermée σ, imperméable aux actions très rapidement variables. La condition à une telle surface serait, par exemple, que les valeurs de $\mathbf{d}$ et de $\mathbf{h}$ à l'extérieur doivent être égales aux valeurs moyennes de ces grandeurs à l'intérieur, prises pour un intervalle de temps suffisamment long. On y ajouterait la supposition que le champ intérieur est le même que si la surface σ n'existait pas et qu'un électron éprouve une force égale et opposée à la résistance (31). Cette force pourrait être exercée par un système matériel M caché dans l'atome. Au travail positif de la force correspondrait une perte d'énergie de ce système M, mais cette perte pourrait être réparée à la surface σ, où M recevrait l'énergie qui y arrive par le rayonnement intérieur.

Bien entendu, dans cette hypothèse, la surface σ laisserait passer librement les actions constantes ou lentement variables. C'est ce qu'il faut nécessairement admettre pour se rendre compte des effets Zeeman et Stark et de l'action magnétique émanant d'un atome.

c. On peut enfin penser à une cause qui donnerait lieu à des vibrations *opposées en phase* à celles qui sont produites par un électron mobile. A cet effet, on peut se figurer une „action électromotrice" convenablement choisie.

Je dirai qu'il y a une force électromotrice $\mathbf{E}$ lorsque le champ électromagnétique est déterminé par les équations

$$\frac{\partial \mathbf{h}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{h}_y}{\partial z} = \frac{1}{c}\,(\dot{\mathbf{d}}_x + \rho \mathbf{v}_x), \quad \ldots,$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{e}_y}{\partial z} = -\frac{1}{c}\,\dot{\mathbf{h}}_x, \quad \ldots,$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{e} + \mathbf{E},$$

prenant la place des formules correspondantes mentionnées au paragraphe 1. Lorsque la force électromotrice est limitée à un espace très petit, l'intégrale $\int \mathbf{E}\, dS$, étendue à cet espace, sera appelée *action électromotrice*. C'est de cette intégrale que dépend, dans ce cas, le champ produit par la force $\mathbf{E}$.

Considérons maintenant un atome dans lequel un seul électron se meut dans une orbite elliptique et appelons $\mathbf{r}$ le rayon vecteur tiré à partir du centre. Une action électromotrice appliquée en ce dernier point et égale à chaque instant en direction et grandeur à $-e\mathbf{r}$ fera disparaître le rayonnement. On peut regarder cette action comme due au système M dont j'ai déjà parlé et l'on trouve une solution possible si l'on n'hésite pas à multiplier un peu les fonctions qu'il faut attribuer à ce système. En effet, il faut encore supposer que M exerce sur l'électron deux forces, l'une égale et opposée à la résistance (31) et l'autre égale et opposée à la force que l'électron subirait à cause de l'action électromotrice $-e\mathbf{r}$, et enfin, comme cette dernière action ferait disparaître le champ magnétique appartenant à l'atome, il faudrait y remédier en introduisant par exemple, au centre de l'orbite, „une force magnétomotrice" proprement choisie. On voit que les circonstances deviendraient extrêmement compliquées. Mais on peut être certain que le système M gagnerait autant d'énergie qu'il en dépense.