Tentamen Elektromagnetisme II, 24 februari 1997, 9–12 uur.

1. In een deeltje is een stroomverdeling $\vec{j}(\vec{r})$.
   (a) Geef de formule voor het magnetische dipoolmoment $\vec{\mu}$ van het deeltje en laat zien dat $\vec{\mu}$ niet afhangt van de plaats van het deeltje.
   In bolcoördinaten r, θ, ϕ is de stroomverdeling gegeven door
   $\vec{j} = \hat{\phi} a e^{-br^2} \sin\theta$, waarbij a en b constanten zijn.
   (b) Leid af dat de ladingsverdeling in het deeltje tijdsonafhankelijk is.
   (c) Bereken $\vec{\mu}$.

2. De elektrostatische energie U van een ladingsverdeling ρ is gegeven door de integraal

   $$U = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) d\vec{r},$$

   waarbij Φ de elektrische potentiaal is.
   (a) Leid hieruit af een formule voor U die uitsluitend het elektrische veld $\vec{E}$ bevat (en dus niet ρ en Φ).
   (b) Wat is U voor het geval van een homogeen geladen bol (straal a, totale lading Q)?

3. In het college hebben we in de elektrodynamica gebruik gemaakt van de Lorentz-ijk. In deze opgave onderzoeken we een andere ijk, de zogenaamde Coulomb-ijk. De Coulomb-ijk luidt

   $$\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}, t) = 0.$$

   (a) Laat zien dat in de Coulomb-ijk de scalaire potentiaal Φ voldoet aan de Poisson-vergelijking

   $$\Delta\Phi(\vec{r}, t) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}, t).$$

   (b) Wat is de algemene oplossing van deze vergelijking?
   (c) De potentiaal Φ reageert instantaan op veranderingen in de ladingsdichtheid ρ. Beargumenteer waarom hier geen sprake is van een schending van het principe van de relativiteitstheorie “dat geen signaal zich sneller kan voortplanten dan met de lichtsnelheid”.

4. *(a)* Geef de Liénard-Wiechert formules voor de elektromagnetische potentialen Φ en $\vec{A}$ en leg uit wat de gebruikte symbolen betekenen.

   Een puntlading q beweegt met constante snelheid v langs de x-as. Op tijdstip t_0 bevindt q zich in het punt $(x_0, 0, 0)$.
   (b) Bereken Φ in de oorsprong, door gebruik te maken van de Liénard-Wiechert formules.

5. *(a)* Hoe transformeren de elektromagnetische potentialen Φ en $\vec{A}$ bij verandering van inertiaalstelsel?

   Een puntlading q beweegt met constante snelheid v langs de x-as. Op tijdstip t_0 bevindt q zich in het punt $(x_0, 0, 0)$.
   (b) Bereken Φ in de oorsprong, door gebruik te maken van deze transformatieregels.

TENTAMEN ELEKTROMAGNETISME II, 18 AUGUSTUS 1997, 9–12 UUR.

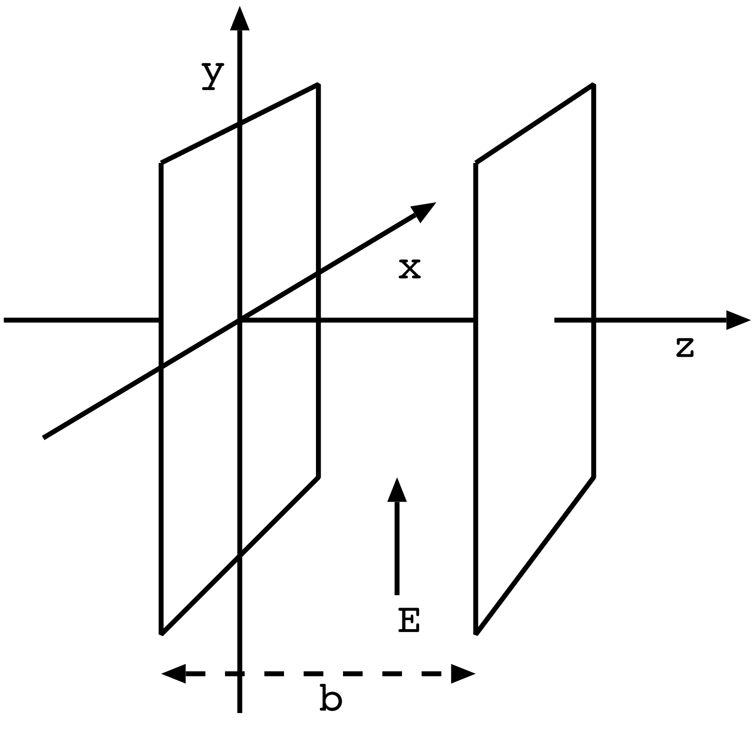
1. *(a)* Een lading q bevindt zich op het punt $(0, 0, d)$ en een tegengestelde lading $-q$ bevindt zich op het punt $(0, 0, -d)$. Geef de elektrostatische potentiaal $\Phi_0(\vec{r})$ tengevolge van beide puntladingen.
   (b) Beschouw nu een oneindige, *geaarde*, metalen plaat in het vlak $z = 0$, en een lading q op het punt $(0, 0, d)$. Beargumenteer dat voor $z \geq 0$ de potentiaal $\Phi_1(\vec{r})$ van dit probleem gelijk is aan de potentiaal $\Phi_0(\vec{r})$ van het vorige probleem. Wat is $\Phi_1(\vec{r})$voor $z < 0$?
   N.B.: een *geaarde* plaat is een plaat die dezelfde potentiaal heeft als in het oneindige.
   (c) Bereken de totale lading op de plaat.

2. We beschouwen de magnetostatica in de ijk $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. We definiëren een nieuw veld $\vec{W}(\vec{r})$ als volgt:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{W} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{W} = \vec{A}.$$

   (a) Beargumenteer waarom het altijd mogelijk is om zo'n veld $\vec{W}$ te construeren.
   (b) Leid een differentiaalvergelijking af tussen $\vec{W}$ en $\vec{B}$.
   (c) Bewijs de algemene relatie

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{B}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \, d\vec{r}\,'.$$



3. Een elektromagnetische golf plant zich voort in de x-richting in de ruimte tussen twee geleidende platen op $z = 0$ en $z = b$ (zie figuur). Beschouw een "transversaal

elektrische" (TE) golf van de vorm $\vec{E}(\vec{r}) = \hat{y}\,\mathrm{Re}\,E'(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$.
(a) Geef de differentiaalvergelijking plus de randvoorwaarden waaraan de functie $E'(z)$ moet voldoen.
(b) Bepaal de oplossing(en) en het bijbehorende magnetische veld.
(c) Voor $\omega < \omega_{\mathrm{c}}$ kan de TE golf zich niet voortplanten. Bepaal deze "cutoff-frequentie" ω_{c}.

4. In de relativiteitstheorie geldt de tweede wet van Newton in de vorm

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \tag{2}$$

maar *niet* in de vorm

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \tag{3}$$

(a) Leg uit wat het verschil is tussen vergelijkingen (1) en (2). Waarom verdwijnt dit verschil in de klassieke mechanica?
(b) Stel een deeltje is in rust in inertiaalstelsel S. We beschouwen nu een tweede inertiaalstelsel S', wat ten opzichte van S met snelheid v_{R} in de x-richting beweegt. Bereken de kracht $\vec{F}'$ op het deeltje in stelsel S', gegeven de kracht $\vec{F}$ in stelsel S.
(c) Toon aan dat de vector $\vec{K} = (1-|\vec{v}|^2/c^2)^{-1/2}\,\vec{F}$ uit te breiden is tot een viervector.