Bepaling van de werkzame doorsnede van elektron-kernverstrooiing

In de niet-relativistische quantummechanica is de volgende werkzame doorsnede afgeleid

$$\frac{d\,\sigma}{d\,\Omega} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2 \mid \left(exp\left(\frac{i\vec{p}_f.\vec{r}}{\hbar}\right), V(\vec{r})\,\Psi_i(\vec{r})\right) \mid^2 \tag{1}$$

Hierbij worden de inkomende en uitgaande golffuncties respectievelijk gegeven door $\Psi_i(\vec{r})$ en $exp(\frac{i\vec{p}_f.\vec{r}}{\hbar})$. De potentiaal wordt gegeven door $V(\vec{r})$. In de Bornbenadering wordt de inkomende golffunctie gegeven door

$$\Psi_i(\vec{r}) = exp\left(\frac{i\vec{p}_i.\vec{r}}{\hbar}\right), \tag{2}$$

zodat de werkzame doorsnede gelijk wordt aan

$$\frac{d\,\sigma}{d\,\Omega} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2 \mid \int d^3\;\vec{r}\,V(\vec{r})\,exp\left(\frac{i(\vec{p}_i - \vec{p}_f).\vec{r}}{\hbar}\right) \mid^2 \tag{3}$$

De impulsoverdracht is

$$\vec{q} = \vec{p}_i - \vec{p}_f \tag{4}$$

Verder is de botsing elastisch hetgeen impliceert

$$\mid \vec{p}_i \mid = \mid \vec{p}_f \mid \equiv p \qquad \rightarrow \qquad q \equiv \mid \vec{q} \mid = 2\,p\,\sin(\theta/2) \tag{5}$$

De potentiaal voor een deeltje met lading $z.e$ dat verstrooit aan een kern met lading $Z.e$ wordt gegeven door

$$V(\vec{r}) = \frac{z.e}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3\,\vec{r}'\,\frac{\rho(\vec{r}')}{\mid \vec{r}' - \vec{r} \mid} \tag{6}$$

De verwachtings waarde in vergelijking (1) wordt dan gelijk aan

$$\left(exp\left(\frac{i\vec{p}_f.\vec{r}}{\hbar}\right), V(\vec{r})\,exp\left(\frac{i\vec{p}_i.\vec{r}}{\hbar}\right)\right) = \int d^3\,\vec{r}\,V(\vec{r})\,exp\left(\frac{i\vec{q}.\vec{r}}{\hbar}\right)$$

$$= \frac{z.e}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3\,\vec{r} \int d^3\,\vec{r}'\,\frac{\rho(\vec{r}')}{\mid \vec{r}' - \vec{r} \mid}\,exp\left(\frac{i\vec{q}.\vec{r}}{\hbar}\right) \tag{7}$$

Na substitutie van $\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}''$ kan de verwachtingswaarde geschreven worden als

$$\frac{z\,e}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3\,\vec{r}''exp\left(\frac{-i\vec{q}.\vec{r}''}{\hbar}\right)\frac{1}{r''} \int d^3\,\vec{r}'\rho(\vec{r}')exp\left(\frac{i\vec{q}.\vec{r}'}{\hbar}\right) \tag{8}$$

Definieer de vormfactor

$$F(q^2) = \frac{1}{Z\,e} \int d^3\,\vec{r}\,\rho(\vec{r})\,exp\left(\frac{i\vec{q}.\vec{r}}{\hbar}\right) \tag{9}$$

zodat de verwachtingswaarde tenslotte gelijk wordt aan

$$\frac{z\,Z\,e^2}{4\pi\varepsilon_0} F(q^2) \int d^3\,\vec{r}\,\frac{1}{r}\,exp\left(\frac{-i\vec{q}.\vec{r}}{\hbar}\right) \tag{10}$$

We moeten nu de bovenstaande Fouriergetransformeerde functie uitrekenen. Dit gaat als volgt

$$\int d^3\,\vec{r}\,exp\left(\frac{-i\vec{q}.\vec{r}}{\hbar}\right)\frac{1}{r} = 2\pi \int_0^\infty d\,r\,d\,\cos\phi\,r\,exp\left(\frac{-iq.r\cos\phi}{\hbar}\right)$$

$$= \frac{2\pi\hbar}{iq}\int_0^\infty d\,r\left(exp\left(\frac{iq.r}{\hbar}\right) - exp\left(\frac{-iq.r}{\hbar}\right)\right) \tag{11}$$

Bovenstaande integraal is een distributie. Definieer

$$\frac{2\pi\hbar}{iq}\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^\infty d\,r\left(exp\left(\frac{iq.r}{\hbar}\right) - exp\left(\frac{-iq.r}{\hbar}\right)\right) exp(-\epsilon\,r)$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{4\pi\hbar^2}{\epsilon^2\hbar^2 + q^2} = \frac{4\pi\hbar^2}{q^2} \tag{12}$$

De verwachtingswaarde wordt

$$\int d^3\,\vec{r}\,V(\vec{r})\,exp\left(\frac{i\vec{q}.\vec{r}}{\hbar}\right) = \frac{z\,Z\,e^2\,\hbar^2}{\varepsilon_0\,q^2}F(q^2) \tag{13}$$

De werkzame doorsnede voor elektron-kernverstrooiing wordt

$$\frac{d\,\sigma}{d\,\Omega} = \frac{m^2\,z^2\,Z^2\,e^4}{4\pi^2\varepsilon_0^2 q^4} \mid F(q^2)\mid^2 = \left(\frac{d\,\sigma}{d\,\Omega}\right)_{Rutherford} \mid F(q^2)\mid^2 \tag{14}$$

met

$$\left(\frac{d\,\sigma}{d\,\Omega}\right)_{Rutherford} = \frac{z^2\,Z^2\,\alpha^2\,\hbar^2\,c^2}{4\,p^2\,v^2}\frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \tag{15}$$

De bovenstaande formule is geldig als de inkomende deeltjes, hier elektronen ($z = -1$), niet-relativistische snelheden hebben ($v = p/m$).

Bepaling van de werkzame doorsnede van α-deeltje-kernverstrooiing (Rutherford formule)

Verstrooiing van een deeltje met lading z.e aan een atoom (= kern plus elektronen) waarbij de lading van de kern gelijk is aan Z.e. In dit geval voelt het deeltje niet de zuivere Coulomb potentiaal maar een afgeschermde potentiaal ten gevolge van de elektronenwolk, die gegeven wordt door

$$V(r) = \frac{z\,Z\,e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} e^{-a\,r} \tag{16}$$

Indien we de bovenstaande potentiaal in de Bornbenadering (3) substitueren dan verkrijgen we voor de integraal de uitdrukking

$$\begin{aligned} \int d^3\,\vec{r}\,V(r)\,exp\left(\frac{i\vec{q}.\vec{r}}{\hbar}\right) &= \frac{z\,Z\,e^2}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3\,\vec{r}\,\frac{1}{r}\,exp\left(\frac{i\vec{q}.\vec{r}}{\hbar} - a\,r\right) \\ &= \frac{z\,Z\,e^2\,\hbar^2}{\varepsilon_0(q^2 + \hbar^2\,a^2)} \end{aligned} \tag{17}$$

De werkzame doorsnede volgt uit (3) en (17) en wordt gegeven door

$$\frac{d\,\sigma}{d\,\Omega} = \frac{m^2\,z^2\,Z^2\,e^4}{4\pi^2\varepsilon_0^2(q^2 + \hbar^2\,a^2)^2} \tag{18}$$

In the limiet $a \to 0$ krijgen we de Rutherford werkzame doorsnede (15). Echter voor $\theta \to 0$ of $q \to 0$ (zie (5)) is de werkzame doorsnede eindig ten gevolge van het afschermend effect van de elektronen. In dit geval wordt hij

$$\frac{d\,\sigma}{d\,\Omega} = \frac{m^2\,z^2\,Z^2\,e^4}{4\pi^2\varepsilon_0^2\,\hbar^4\,a^4} = \frac{4\,m^2\,z^2\,Z^2\,c^2\,\alpha^2}{a^4\,\hbar^2} \tag{19}$$