VRAAGSTUKKEN QUANTUMTHEORIE 2

1. De permutatie groep S_3 die bestaat uit de volgende afbeeldingen

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow i \\ 2 &\rightarrow j \\ 3 &\rightarrow k \\ i,j,k &= 1,2,3 \quad i \neq j \quad j \neq k \quad k \neq i \end{aligned}$$

bevat $3! = 6$ elementen. De vermenigvuldigingsoperatie luidt

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \rightarrow & i \\ 2 & \rightarrow & j \\ 3 & \rightarrow & k \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{ccc} i & \rightarrow & l \\ j & \rightarrow & m \\ k & \rightarrow & n \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \rightarrow & l \\ 2 & \rightarrow & m \\ 3 & \rightarrow & n \end{array} \right\}$$

Voorbeeld van een vermenigvuldiging

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \rightarrow & 2 \\ 2 & \rightarrow & 3 \\ 3 & \rightarrow & 1 \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \rightarrow & 1 \\ 2 & \rightarrow & 3 \\ 3 & \rightarrow & 2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \rightarrow & 3 \\ 2 & \rightarrow & 2 \\ 3 & \rightarrow & 1 \end{array} \right\}$$

Toon door middel van een vermenigvuldigingstabel aan dat deze verzameling een niet-Abelse groep vormt. Wat zijn de ondergroepen?

2. De elementen van de speciale Galileigroep kunnen worden voorgesteld door de vijf bij vijf matrix

$$\begin{pmatrix} \vec{r}' \\ t' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & \vec{v}_0 & \vec{r}_0 \\ 0 & 1 & t_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r} \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

R is een drie bij drie rotatiematrix en $\vec{v}_0$ en $\vec{r}_0$ zijn kolomvektoren met drie componenten.

   a. Laat zien dat de bovenstaande matrix een representatie van de Galileigroep is. Hoeveel parameters telt deze groep?

b. De generatoren van de Lie-algebra van de Galileigroep worden gegeven door:

$$\begin{pmatrix} I_{ij} & \vec{d} & \vec{b} \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} I_{ij} & \vec{0} & \vec{0} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b_i = \begin{pmatrix} \emptyset & \vec{0} & \vec{e}_i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d_i = \begin{pmatrix} \emptyset & \vec{e}_i & \vec{0} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad f = \begin{pmatrix} \emptyset & \vec{0} & \vec{0} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

met $(\vec{e}_i)_j = \delta_{ij}$ en $I_{ij} \in \mathcal{L}(SO(3))$. Laat zien dat de generatoren aan de volgende algebra voldoen

$$[a_{ij}, a_{kl}] = -\delta_{jk}\, a_{il} + \delta_{ik}\, a_{jl} - \delta_{il}\, a_{jk} + \delta_{jl}\, a_{ik}$$

$$[a_{ij}, b_k] = -\delta_{jk}\, b_i + \delta_{ik}\, b_j \qquad [b_i, b_j] = 0$$

$$[a_{ij}, d_k] = -\delta_{jk}\, d_i + \delta_{ik}\, d_j \qquad [d_i, d_j] = 0$$

$$[d_i, b_j] = 0 \qquad [a_{ij}, f] = 0 \qquad [b_i, f] = 0 \qquad [d_i, f] = b_i$$

c. Om de volledige Galileigroep te krijgen moet men aan de speciale groepselementen weer de discrete transformaties zoals de ruimtelijke inversie, de tijdsomkeer en de totale inversie toevoegen. Hoe zien deze discrete transformaties eruit als deze in vijf bij vijf matrices worden uitgedrukt?

3. Gegeven zijn de volgende infinitesimale transformaties

$$t \quad \to \quad t' = t + X(t)\Delta\omega(t)$$

$$q_i'(t') = q_i(t) + \Delta q_i(t) \quad \text{met} \quad \Delta q_i(t) = \Phi(t)\,\Delta\omega(t)$$

$$\frac{d\ q_i'(t')}{d\ t'} = \frac{d\ q_i(t)}{d\ t} + \Delta\frac{d\ q_i(t)}{d\ t}$$

$$q_i'(t) = q_i(t) + \delta q_i(t)$$

$$\frac{d\ q_i'(t)}{d\ t} = \frac{d\ q_i(t)}{d\ t} + \delta \frac{d\ q_i(t)}{d\ t} \quad \text{met} \quad \delta \frac{d\ q_i(t)}{d\ t} = \frac{d}{d\ t} \delta q_i(t)$$

Toon het volgende aan

a.

$$\delta q_i(t) = \Delta q_i(t) - X(t)\,\Delta\omega(t)\,\frac{d\ q_i(t)}{d\ t}$$

b.

$$\delta \frac{d\ q_i(t)}{d\ t} = \Delta \frac{d\ q_i(t)}{d\ t} - X(t)\,\Delta\omega(t) \frac{d^2\ q_i(t)}{d\ t^2}$$

c.

$$\frac{d}{d\ t} \Delta q_i(t) \neq \Delta \frac{d\ q_i(t)}{d\ t}$$

4. Als $f(p, q, t)$ een constante van beweging is dan geldt

$$\frac{d\ f}{d\ t} = \frac{\partial\ f}{\partial\ t} + \{H, f\} = 0$$

Laat nu zien dat als $f(p, q, t)$ en $g(p, q, t)$ constantes van beweging zijn het volgende geldt

$$\frac{d}{d\ t}\{f, g\} = 0$$

5. Een klassiek puntdeeltje wordt beschreven door de Hamiltoniaan

$$H = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} + V$$

De bewegingsvergelijkingen worden gegeven door de Hamiltonvergelijkingen

$$\frac{\partial H}{\partial x_k} = -\dot{p}_k \qquad \frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{x}_k$$

Een puntdeeltje met lading e wordt nu in een electromagnetisch veld geplaats. De magnetische potentiaal en de electrostatische potentiaal worden respectievelijk gegeven door $\vec{A}(\vec{r}, t)$ en $\Phi(\vec{r})$. Vervang nu in de Hamiltoniaan $\vec{p}$ door $\vec{p} - e\ \vec{A}/c$ en V door $e\ \Phi$ (minimale substitutie). Laat zien dat door toepassing van de Hamiltonvergelijkingen de volgende bewegingsvergelijkingen kunnen worden afgeleid

$$\begin{aligned} m\vec{v} &= m\dot{\vec{x}} = \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \quad \vec{p} \text{ is de kanonieke impuls} \\ m\ddot{\vec{x}} &= e\vec{E} + \frac{e}{c}(\vec{v} \times \vec{B}) \quad \text{Lorentzkracht} \end{aligned}$$

met

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\ A}{c\partial t} \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

6. De referentiestelsels S en P worden respectievelijk gegeven door de basisvektoren E_μ en e_μ. Verder is gegeven dat

$$\begin{aligned} E_0 &= e_0 \\ E_3 &= 0.e_0 + \sin\theta\ \cos\phi\, e_1 + \sin\theta\ \sin\phi\, e_2 + \cos\theta\, e_3 \end{aligned}$$

   a. Vind een rotatiematrix $R(\theta, \phi)$ waarvoor geldt

$$E_\mu = R^\nu_\mu e_\nu$$

   b. Het referentiestelsel S' (basis E'_μ) beweegt zich met snelheid v in de positieve z-richting van referentiestelsel S (basis E_μ). Bepaal de speciale Lorentztransformatie $\Lambda(v)$ waarvoor geldt

$$E_\mu = \Lambda^\nu_\mu E'_\nu$$

   c. Referentiestelsel P' wordt uit S' verkregen door dezelfde rotatie toe te passen als in a m.a.w.

$$E'_\mu = R^\nu_\mu e'_\nu$$

   waarbij e'_μ de basis in P' is. Hoe ziet de speciale Lorentztransformatie $\tilde{\Lambda}(v)$ eruit die de stelsels P met P' verbindt

$$e_\mu = \tilde{\Lambda}^\nu_\mu e'_\nu$$

7. Beschouw het volgende verstrooiingsproces $1 + 2 \quad \rightarrow \quad 3 + 4$ waarbij $m_1 = m_2$ en $m_3 = m_4$ (m_i is de massa van deeltje i). De wet van behoud van impuls en energie (vierimpuls) luidt: $p_1^\mu + p_2^\mu = p_3^\mu + p_4^\mu$

   a. Definieer de Mandelstamvariabelen s, t en u

   $$s = (p_1 + p_2)^2 \qquad t = (p_1 - p_3)^2 \qquad u = (p_1 - p_4)^2$$

   Laat zien dat geldt

   $$s + t + u = 2\,m_1^2 + 2\,m_3^2$$

   b. Druk in het zwaartepuntsysteem de energie E_i en de impuls $|\vec{p}_i|$ voor elk deeltje i uit in de variabelen s, t en u.

   c. Het laboratoriumsysteem is het systeem waarbij één van de inkomende deeltjes in rust is. Kies hiervoor deeltje 2. Druk in het laboratoriumsysteem de energie E_i en de impuls $|\vec{p}_i|$ voor elk deeltje i uit in de variabelen s, t en u.

   d. Druk de verstrooingshoeken in b en c, respectievelijk gegeven door $\cos\theta_{zw}$ en $cos\theta_{13,lab}$, $cos\theta_{14,lab}$, uit in de variabelen s, t en u.

8. a. Als $\vec{p}$ en $\vec{q}$ de kanonieke impuls- en plaatsvektor zijn in in drie dimensies, dan geldt $\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$. Leid nu af dat:

   $$\{p_i, a(p,q)\} = \frac{\partial\ a(p,q)}{\partial\ q_i} \qquad \{a(p,q), q_i\} = \frac{\partial\ a(p,q)}{\partial\ p_i}$$

   b. We zoeken nu een representatie van de klassieke Galiliei-algebra in termen van $\vec{p}$ en $\vec{q}$. Gegeven zijn de representaties (zie opgave 2)

   $$f = \frac{1}{2}\vec{p}\cdot\vec{p} \qquad \vec{b} = \vec{p} \qquad a_{ij} = p_i q_j - p_j q_i$$

   Ga nu na dat in termen van $\vec{p}$ en $\vec{q}$ voldaan is als men de commutator $[..,..]$ vervangt door de Poissonhaakjes $\{..,..\}$ m.a.w.

   $$\{a_{ij}, a_{kl}\} = -\delta_{il}a_{jk} - \delta_{jk}a_{il} + \delta_{ik}a_{jl} + \delta_{jl}a_{ik}$$

   $$\{a_{ij}, b_k\} = \delta_{ik}b_j - \delta_{jk}b_i$$

   $$\{a_{ij}, f\} = \{b_i, b_j\} = \{b_i, f\} = 0$$

c. Een representatie van d_i (boosts) ziet er als volgt uit

$$d_i = a(p,q)\, p_i + b(p,q)\, q_i$$

waarin $a(p,q)$ en $b(p,q)$ twee nader te bepalen functies zijn. Reken $\{b_i, d_j\}$ en $\{d_i, f\}$ uit en laat zien dat geen enkele functies $a(p,q)$ en $b(p,q)$ bestaan die voldoen aan de eis

$$\{b_i, d_j\} = 0 \qquad \{d_i, f\} = b_i$$

9. Gegeven is dat

$$M_{\mu\nu} = q_\mu\, p_\nu - q_\nu\, p_\mu \qquad P_\mu = p_\mu$$

$$\{f(p,q), g(p,q)\} = \frac{\partial\, f}{\partial\, p^\lambda} \frac{\partial\, g}{\partial\, q_\lambda} - \frac{\partial\, f}{\partial\, q^\lambda} \frac{\partial\, g}{\partial\, p_\lambda}$$

Controleer dat dit een representatie van de Lorentz-algebra is die gegeven wordt door

$$\{M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}\} = g_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - g_{\nu\sigma} M_{\mu\rho} - g_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} M_{\nu\rho}$$

$$\{P_\mu, M_{\rho\sigma}\} = g_{\mu\rho} P_\sigma - g_{\mu\sigma} P_\rho$$

$$\{P_\mu, P_\nu\} = 0$$

10. De electromagnetische veldtensor is gedefinieerd door

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \qquad A = (A_0, \vec{A}) = (\phi, \vec{A})$$

waarbij de $\vec{E}$ en $\vec{B}$ velden gegeven worden door

$$E_i = F_{i0} \qquad B_i = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{jk}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\, \vec{A}}{c\partial\, t} \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

a. Leid uit het feit dat $F_{\mu\nu}$ een Lorentztensor is de speciale Lorentz-transformaties (boosts) voor de $\vec{E}$- en $\vec{B}$-velden af. Deze volgen uit

$$F'_{\mu\nu}(x') = \Lambda_\mu^\sigma(\vec{v})\Lambda_\nu^\lambda(\vec{v})F_{\sigma\lambda}(x) \quad \text{met} \quad x' = \Lambda\, x$$

Hierbij is $\Lambda(\vec{v})$ de meest algemene vorm zoals die afgeleid is in opgave 6.

b. Laat zien dat de projecties van $\vec{E}$ en $\vec{B}$ op $\vec{v}$ (snelheid) niet veranderen onder de hierboven gegeven Lorentz-transformatie.

11. De functie $f_p(x)$, die in het skalaire veld voorkomt, wordt gegeven door

$$f_p(x) = \frac{c}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\sqrt{\frac{\hbar}{2E}}\, e^{-i\,px/\hbar}$$

Leid de volgende relaties af (zie college)

$$(f_p, f_{p'}) = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \quad (f_p^*, f_{p'}^*) = -\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}')$$

$$(f_p^*, f_{p'}) = (f_p, f_{p'}^*) = 0$$

12. Leid de volgende eigenschappen van de Dirac-matrices af

a.

$$\gamma_\mu\, \not{a}\, \gamma^\mu = -2\not{a} \quad \gamma_\mu\, \not{a}\, \not{b}\, \gamma^\mu = 4a\cdot b \quad \gamma_\mu\, \not{a}\, \not{b}\, \not{c}\, \gamma^\mu = -2\, \not{c}\, \not{b}\, \not{a}$$

b.

$$Sp\not{a}\,\not{b} = 4\, a\cdot b \quad Sp\not{a}\,\not{b}\,\not{c}\,\not{d} = 4\Big[(a\cdot b)(c\cdot d) - (a\cdot c)(b\cdot d) + (a\cdot d)(b\cdot c)\Big]$$

c.

$$Sp\not{a}_1\not{a}_2\cdots\not{a}_n = 0 \quad n \text{ is oneven}$$

$$Sp\not{a}_1\not{a}_2\cdots\not{a}_n = (a_1\cdot a_2)Sp\not{a}_3\cdots\not{a}_n - (a_1\cdot a_3)Sp\not{a}_2\not{a}_4\cdots\not{a}_n$$

$$+(a_1\cdot a_4)Sp\not{a}_2\not{a}_3\not{a}_5\cdots\not{a}_n + \cdots + (a_1\cdot a_n)Sp\not{a}_2\not{a}_3\cdots\not{a}_{n-1}$$

n is even

13. Men kan een aantal eigenschappen voor de Dirac-spinoren afleiden.

    a. Laat zien dat de Dirac-spinoren $u(\vec{p}, s)$ en $v(\vec{p}, s)$ eigentoestanden zijn van

    $$h = \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \quad \text{met} \quad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & \emptyset \\ \emptyset & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

    mits voor de kwantisatie-as geldt $\vec{n} = \vec{p}/|\vec{p}|$.

    b. Laat zien dat deze Dirac-spinoren ook eigentoestanden zijn van $\gamma_5 \not{W}$ mits $W \cdot p = 0$ (W is een viervektor). Hierbij mag $\vec{n}$ willekeurig zijn.
    Aanwijzing: gebruik de eigenschap dat de Dirac-spinoren eigentoestanden zijn van $\not{p}$ en laat zien dat

    $$[\gamma_5 \not{W}, \not{p}] = 0$$

    c. Laat zien dat

    $$[\gamma_5 \not{W}, h] = 0 \quad \text{mits} \quad \vec{W} \parallel \vec{p}$$

    d. Voor welke waarde van W commuteren $\not{p}$, h en $\gamma_5 \not{W}$ onderling met elkaar mits wij de extra eis opleggen dat $W^2 = -1$. Waarom geldt altijd dat $W^2 < 0$?

14. Bewijs de volgende identiteit (Gordon-ontbinding)

$$\bar{u}(\vec{p}', s')\, \gamma^\mu\, u(\vec{p}, s) = \bar{u}(\vec{p}', s') \left[\frac{(p' + p)^\mu}{2mc} + \frac{i\sigma^{\mu\nu}(p' - p)_\nu}{2mc} \right] u(\vec{p}, s)$$

15. Bereken het volgende inprodukt

$$(\psi_{i,p,s}, \psi_{j,p',s'}) = \int d^3\vec{x}\, \psi^\dagger_{i,p,s}(x) \psi_{j,p',s'}(x) \quad i, j = 1, 2$$

waarbij $\psi_{1,p,s}$ en $\psi_{2,p,s}$ de oplossingen van de Diracvergelijking zijn die respectievelijk het fermion en het anti-fermion voorstellen.

16. De Maxwell-vergelijkingen kunnen op een Lorentz-covariante manier geschreven worden.

a. Laat zien dat de Maxwell-vergelijkingen

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B}-\frac{\partial\,\vec{E}}{c\partial\,t}=\frac{\vec{J}}{c}$$

$$\text{uit}\quad \partial^\mu F_{\mu\nu}=\frac{J_\nu}{c}\quad\text{volgen}$$

b. Toon aan dat de Maxwell-vergelijkingen

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{\partial\,\vec{B}}{c\partial\,t}=0$$

volgen uit de Bianchi-identiteit gegeven door

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda}+\partial_\nu F_{\lambda\mu}+\partial_\lambda F_{\mu\nu}=0$$

17. Het electromagnetische veld $\vec{A}(x)$ in de stralingsijk is gegeven door

$$\vec{A}(x)=\sum_\alpha\int d^3\vec{k}\left[a(\vec{k},\alpha)\,\vec{f}_k^{(\alpha)}+a^*(\vec{k},\alpha)\,\vec{f}_k^{(\alpha)*}\right]$$

$$\text{met}\quad f_k^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\,c\,\frac{\hbar}{\sqrt{2\omega}}\,\epsilon^{(\alpha)}(\vec{k})\,e^{-i\,kx}$$

Laat zien dat voor het inprodukt geldt

$$(f_k^{(\alpha)},f_{k'}^{(\alpha')})=\delta_{\alpha\alpha'}\,\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')$$

$$(f_k^{(\alpha)*},f_{k'}^{(\alpha')*})=-\delta_{\alpha\alpha'}\,\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')$$

$$(f_k^{(\alpha)*},f_{k'}^{(\alpha')})=(f_k^{(\alpha)},f_{k'}^{(\alpha')*})=0$$

18. Laat zien dat $\sigma_{\alpha\beta}=i/2[\gamma_\alpha,\gamma_\beta]$ een oplossing is van de vergelijking

$$\frac{i}{2}[\gamma^\mu,\sigma_{\alpha\beta}]=\left(g_{\alpha\nu}\,\delta^\mu_\beta-g_{\beta\nu}\,\delta^\mu_\alpha\right)\gamma^\nu$$

19. De representatie van de generatoren van de Poincaré-groep in de ruimte van klassieke velden ziet er als volgt uit

$$M_{\mu\nu} = i\hbar(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu + s_{\mu\nu})$$

$$P_\mu = i\hbar \partial_\mu$$

waarbij

$$s_{\mu\nu} = 0 \quad \text{skalair veld}$$

$$s_{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad \text{Dirac-veld}$$

$$s_{\mu\nu} = I_{\mu\nu} \quad \text{electromagnetisch veld}$$

$$\text{met} \quad (I_{\mu\nu})_\alpha^\beta = g_{\mu\alpha}\delta_\nu^\beta - g_{\nu\alpha}\delta_\mu^\beta$$

a. Toon aan dat $s_{\mu\nu}$ aan de commutatierelaties voor de Lie-algebra van de lorentzgroep voldoet m.a.w.

$$[s_{\mu\nu}, s_{\rho\sigma}] = g_{\nu\rho}\, s_{\mu\sigma} - g_{\nu\sigma}\, s_{\mu\rho} - g_{\mu\rho}\, s_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}\, s_{\nu\rho}$$

b. Laat zien dat $M_{\mu\nu}$ en P_μ aan de commutatierelaties voor de Lie-algebra van de Poincaré-groep voldoen

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i\hbar\Big(g_{\nu\rho}\, M_{\mu\sigma} - g_{\nu\sigma}\, M_{\mu\rho} - g_{\mu\rho}\, M_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}\, M_{\nu\rho}\Big)$$

$$[P_\mu, M_{\rho\sigma}] = i\hbar\Big(g_{\mu\rho}\, P_\sigma - g_{\mu\sigma}\, P_\rho\Big)$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0$$

20. Gedefinieerd zijn de volgende bilineaire covariante dichtheden

$$F_S(x) = \bar{\psi}(x)\, \psi(x)$$

$$F_V^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\, \gamma^\mu\, \psi(x)$$

$$F_T^{\mu\nu}(x) = \bar{\psi}(x)\, \sigma^{\mu\nu}\, \psi(x) \qquad \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

$$F_A^{\mu}(x) = \bar{\psi}(x)\,\gamma^{\mu}\,\gamma^5\,\psi(x)$$

$$F_P(x) = i\,\bar{\psi}(x)\,\gamma^5\,\psi(x)$$

a. Laat zien dat onder Lorentztransformaties F_S en F_P transformeren als een skalair, F_V^{μ} en F_A^{μ} als een vektor en $F_T^{\mu\nu}$ als een tweede rangs tensor.
Aanwijzing: gebruik

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) \quad \rightarrow \quad \bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)S(\Lambda)^{-1}$$

$$S(\Lambda)^{-1}\,\gamma^{\mu}\,S(\Lambda) = \Lambda^{\mu}_{\nu}\,\gamma^{\nu}$$

$$S(\Lambda)^{-1} = \gamma^0\,S(\Lambda)^{\dagger}\,\gamma^0$$

b. Laat zien dat deze bilineaire covariante dichtheden reëel zijn.

c. Hoe transformeren deze grootheden onder ladingsconjugatie C, pariteit P en tijdsomkeer T?

d. Hoe transformeren deze grootheden onder CPT?

e. Waarom is F_P een pseudo-skalair en F_A^{μ} een pseudo-vektor?

21. Laat zien dat de vier-impuls van de hieronderstaande velden als volgt in hun Fourier-coëfficiënten kunnen worden uitgedrukt

skalair veld

$$P^{\nu} = \frac{1}{2}\int d^3\vec{p}\,p^{\nu}\left[a^*(\vec{p})\,a(\vec{p}) + a(\vec{p})\,a^*(\vec{p})\right]$$

Dirac-veld

$$P^{\nu} = \sum_s \int d^3\vec{p}\,p^{\nu}\left[b^*(\vec{p},s)\,b(\vec{p},s) - d(\vec{p},s)\,d^*(\vec{p},s)\right]$$

E.M. veld

$$P^{\nu} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha}\int d^3\vec{k}\,\hbar k^{\nu}\left[a^*(\vec{k},\alpha)\,a(\vec{k},\alpha) + a(\vec{k},\alpha)\,a^*(\vec{k},\alpha)\right]$$

22. Laat zien dat de heliciteit van het Dirac-veld als volgt in zijn Fourier-coëfficiënten kan worden uitgedrukt.

$$W = \frac{\hbar}{2} \sum_s \int d^3\vec{p}\,(2s)\,|\vec{p}|\,\Big[b^*(\vec{p},s)\,b(\vec{p},s) + d(\vec{p},s)\,d^*(\vec{p},s)\Big]$$

23. Gegeven is de Lagrangedichtheid voor het vrije Dirac-veld

$$\mathcal{L}\Big(\psi(x), \partial_\lambda \psi(x)\Big) = i\,c\,\hbar\,\bar{\psi}(x)\,\gamma^\mu\,\partial_\mu \psi(x) - mc^2\,\bar{\psi}(x)\,\psi(x)$$

De chirale $U(1)$-transformatie van het Dirac-veld wordt gegeven door:

$$\psi(x) \quad \to \quad \psi'(x) = e^{i\,\alpha(x)\gamma_5}\,\psi(x)$$

a. Laat zien dat de bovenstaande Lagrangedichtheid niet invariant is onder chirale transformaties zelfs als $\alpha(x)$ onafhankelijk van x is (globale transformatie).

b. Bereken de Noetherstroom $j^5_\mu(x)$ en bepaal $\partial^\mu j^5_\mu(x)$.

c. Wanneer is de Lagrangedichtheid globaal invariant onder de bovenstaande ijktransformatie?

24. De Lagrangedichtheden voor de wisselwerking van het E.M. veld $A_\mu(x)$ met respectievelijk het skalaire veld $\phi(x)$ en het Dirac-veld $\psi(x)$ worden gegeven door

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^B(x) &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D^\mu\phi)^*\ D_\mu\phi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\,\phi^*\phi \\
\mathcal{L}^F(x) &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\,c\,\hbar\,\bar{\psi}\,\gamma^\mu\,D_\mu\psi - mc^2\,\bar{\psi}\,\psi
\end{aligned}$$

$$\text{met} \qquad D_\mu = \partial_\mu + \frac{ie}{\hbar c}\,A_\mu$$

als covariante afgeleide.

a. Leid de bewegingsvergelijkingen voor alle velden af.

b. Bereken de energie-impuls tensor $T^{\mu\nu}$ en laat zien dat $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$.

25. De Lagrangedichtheden voor de wisselwerking van het niet-Abelse ijkveld $A_a^\mu(x)$ met respectievelijk het skalaire veld $\phi_k(x)$ en het Dirac-veld $\psi_k(x)$ worden gegeven door

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^B(x) &= -\frac{1}{4} F_{a,\mu\nu} F_a^{\mu\nu} + (D^\mu\phi)_k^* \; (D_\mu\phi)_k - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\,\phi_k^*\phi_k \\ \mathcal{L}^F(x) &= -\frac{1}{4} F_{a,\mu\nu} F_a^{\mu\nu} + i\,c\,\hbar\,\bar{\psi}_k\,\gamma^\mu\,D_\mu\psi_k - mc^2\,\bar{\psi}_k\,\psi_k\end{aligned}$$

$$\text{met} \qquad D_\mu = \partial_\mu + i\,\frac{g}{\hbar c}\,T_a\,A_{a,\mu}$$

als covariante afgeleide. Leid de bewegingsvergelijkingen voor alle velden af.

26. Laat zien dat voor het skalaire veld de Noetherlading als volgt in de Fourier-coëfficiënten kan worden uitgedrukt.

$$Q_a = (T_a)_{kl} \int d^3\vec{p}\left[a_{+,k}(\vec{p})\,a_{+,l}^*(\vec{p}) - a_{-,k}^*(\vec{p})\,a_{-,l}(\vec{p})\right]$$

Doe hetzelfde voor het Dirac-veld.

$$Q_a = (T_a)_{kl} \sum_s \int d^3\vec{p}\left[b_k^*(\vec{p},s)\,b_l(\vec{p},s) + d_k(\vec{p},s)\,d_l^*(\vec{p},s)\right]$$

27. Laat zien dat onder lokale ijktransformaties de term

$$\frac{g^2}{(\hbar c)^2}\,\phi_k^*(x)\,(T_bT_a)_{kl}\,\phi_l(x)\,A_b^\mu(x)\,A_{a,\mu}(x)$$

overgaat in

$$\begin{aligned}&\frac{g^2}{(\hbar c)^2}\,\phi_k^*(x)\,(T_bT_a)_{kl}\,\phi_l(x)\,A_b^\mu(x)\,A_{a,\mu}(x) \\ &+\frac{g^2}{\hbar c}\,\partial_\mu\alpha_b(x)\,\phi_k^*(x)\,\{T_a,T_b\}_{kl}\,\phi_l(x)\,A_a^\mu(x)\end{aligned}$$

28. Bewijs dat de relatie tussen de structuurconstantes

$$f_{abe}f_{edc} + f_{aec}f_{edb} = f_{ade}f_{ebc}$$

volgt uit de Jacobi-identiteit

$$[[T_a, T_b], T_c] + [[T_b, T_c], T_a] + [[T_c, T_a], T_b] = 0$$

Gebruik deze relatie tussen de structuurconstantes om aan te tonen dat $F_a^{\mu\nu}$ in de adjoint-representatie zit m.a.w.

$$F_a'^{\mu\nu}(x) = \Big(\delta_{ae} + f_{ade}\,\alpha_d(x)\Big) F_e^{\mu\nu}(x)$$

29. Laat zien dat voor het vrije E.M. veld $A_\mu(x)$, waarbij de Lagrangedichtheid gegeven wordt door

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\,,$$

de naïeve Noetherstroom gelijk is aan

$$j^\mu = \partial_\nu F^{\mu\nu}$$

Toon aan dat voor deze stroom de Noetherlading gelijk is aan nul.

30. T_a zijn de elementen van de semi-simpele Lie-algebra $\mathcal{L}(G)$ die voldoen aan

$$[T_a, T_b] = i\, f_{abc}\, T_c$$

Voor de groepen $SO(3)$ en $SU(2)$ is gegeven dat $f_{abc} = \epsilon_{abc}$. Schrijf voor deze groepen de fundamentele en de adjoint representatie voor T_a op.

31. Voor een willekeurig quantumveldveld $\hat{\varphi}_r(x)$ met spin r is gegeven dat

$$[\hat{P}^\mu, \hat{\varphi}_r(x)] = -i\,\hbar\,\partial^\mu \hat{\varphi}_r(x)$$

$$[\hat{J}^{\mu\nu}, \hat{\varphi}_r(x)] = -i\,\hbar\,\Big(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu + s^{\mu\nu}\Big)\,\hat{\varphi}_r(x)$$

Toon aan dat de bovenstaande relaties gelden voor het skalaire veld en het Dirac-veld. Maak hierbij gebruik van de uitdrukkingen $\hat{P}^\mu$ en $\hat{J}^{\mu\nu}$ die zijn afgeleid voor deze velden.

a. skalaire veld

$$\hat{P}^0 = \frac{1}{c}\int d^3\vec{x}\,\hat{\mathcal{H}} \qquad \hat{P}^k = \frac{1}{c}\int d^3\vec{x}\,\hat{\Pi}\,\partial^k\hat{\phi}$$

$$\hat{J}^{ok} = \frac{1}{c}\int d^3\vec{x}\left(c\,x^0\,\hat{\Pi}\,\partial^k\hat{\phi} - x^k\,\hat{\mathcal{H}}\right)$$

$$\hat{J}^{kl} = \int d^3\vec{x}\left(x^k\,\hat{\Pi}\,\partial^l\hat{\phi} - x^l\,\hat{\Pi}\,\partial^k\hat{\phi}\right)$$

b. Dirac-veld

$$\hat{P}^\mu = \int d^3\vec{x}\,\hat{\Pi}\,\partial^\mu\hat{\psi}$$

$$\hat{J}^{\mu\nu} = \int d^3\vec{x}\,\hat{\Pi}\left(x^\mu\,\partial^\nu - x^\nu\,\partial^\mu - \frac{i}{2}\,\sigma^{\mu\nu}\right)\hat{\psi}$$

32. Toon aan dat voor het skalaire quantumveld de volgende operatoren aan de commutatierelaties van de Poincaré-Lie-algebra voldoen

$$:\hat{P}^\mu: \;=\; \int d^3\vec{p}\;p^\mu\,\hat{N}(\vec{p})$$

$$:\hat{J}^{0k}: \;=\; i\,\hbar\int d^3\vec{p}\left(p^0\,\hat{a}^\dagger(\vec{p})\,\frac{1}{\partial\,p_k}\,\hat{a}(\vec{p}) + \frac{p^k}{2p^0}\,\hat{N}(\vec{p})\right)$$

$$:\hat{J}^{kl}: \;=\; i\,\hbar\int d^3\vec{p}\;\hat{a}^\dagger(\vec{p})\left(p^k\,\frac{1}{\partial\,p_l} - p^l\,\frac{1}{\partial\,p_k}\right)\hat{a}(\vec{p})$$

33. De impuls- en de impulsmoment-operatoren van het complexe skalaire veld worden respectievelijk gegeven door

$$:\hat{P}^\mu := \int d^3\vec{p}\;p^\mu\;\left[\hat{N}_+(\vec{p}) + \hat{N}_-(\vec{p})\right]$$

$$:\hat{J}^{0k} := i\,\hbar\int d^3\vec{p}\left[p^0\left\{\hat{a}^\dagger_+(\vec{p})\,\frac{1}{\partial\,p_k}\,\hat{a}_+(\vec{p}) + \hat{a}^\dagger_-(\vec{p})\,\frac{1}{\partial\,p_k}\,\hat{a}_-(\vec{p})\right\}\right.$$

$$\left.+\frac{p^k}{2p^0}\left\{\hat{N}_+(\vec{p}) + \hat{N}_-(\vec{p})\right\}\right]$$

$$: \hat{J}^{kl} := i\,\hbar \int d^3\vec{p}\; \left[\hat{a}_+^\dagger(\vec{p}) \left(p^k \frac{1}{\partial\, p_l} - p^l \frac{1}{\partial\, p_k} \right) \hat{a}_+(\vec{p}) \right.$$

$$\left. + \hat{a}_-^\dagger(\vec{p}) \left(p^k \frac{1}{\partial\, p_l} - p^l \frac{1}{\partial\, p_k} \right) \hat{a}_-(\vec{p}) \right]$$

Laat zien dat de ladingsoperator $\hat{Q}$ zowel met de impuls-operator $\hat{P}^\mu$ als met de impulsmoment-operator $\hat{J}^{\mu\nu}$ commuteert.

34. Met behulp van de uitdrukking voor het E.M. veld $\vec{\hat{A}}$ kan men de velden $\vec{\hat{E}}$ en $\vec{\hat{B}}$ bepalen.

   a. Bereken de volgende commutatoren

   $$[\hat{E}_i(\vec{x},t), \hat{E}_j(\vec{x}',t)] \quad [\hat{E}_i(\vec{x},t), \hat{B}_j(\vec{x}',t)] \quad [\hat{B}_i(\vec{x},t), \hat{B}_j(\vec{x}',t)]$$

   b. Bepaal de verwachtingswaarden

   $$\langle 0|\vec{\hat{E}}(\vec{x},t)|0\rangle \qquad \langle 0|\vec{\hat{E}}(\vec{x},t)\cdot\vec{\hat{E}}(\vec{x},t)|0\rangle$$

   en laat zien dat de laatste divergeert.

   c. Om deze divergentie op te heffen definieert men de gemiddelde veldoperator $\vec{\hat{E}}(b,t)$ als volgt

   $$\vec{\hat{E}}(b,t) = \frac{1}{b^3} \int d^3\vec{x}\, e^{-\vec{x}\cdot\vec{x}/2b^2}\, \vec{\hat{E}}(\vec{x},t)$$

   Bereken de verwachtingswaarde

   $$\langle 0|\vec{\hat{E}}(b,t)\cdot\vec{\hat{E}}(b,t)|0\rangle$$

   en laat zien dat deze eindig is

   d. Uit de quantumtheorie van electromagnetische straling volgt dat de energiedichtheid van een electromagnetische golf gelijk is aan $\bar{n}\ h\ \nu = \bar{n}\ h\ c/\lambda$, waarbij $\bar{n}$ het gemiddeld aantal fotonen per volume-eenheid is. In de klassieke electrodynamica is de energiedichtheid van een electromagnetische golf gelijk aan $\vec{E} \cdot \vec{E}$ door de laatste over de tijd te middelen. Merk op dat

$$\vec{E} \cdot \vec{E} = \langle 0|\hat{\vec{E}}(b,t) \cdot \hat{\vec{E}}(b,t)|0\rangle$$

Als $b = \lambda/2\pi$ bepaal dan de waarde van $\bar{n}$ waarvoor de klassieke beschrijving van een electromagnetische golf correct is.

35. Een Casimir-operator is een produkt van elementen van de Lie-algebra die op een dusdanige wijze geconstrueerd is dat hij met alle elementen van de algebra commuteert. In het geval van de Poincaré-groep worden de Casimir-operatoren gegeven door

$$P^2 = P^\mu P_\mu \qquad W^2 = -W^\mu W_\mu$$

Waarbij de Pauli-Lubanski vektor gedefinieerd is door

$$W_\sigma = \frac{1}{2}\, \epsilon_{\sigma\mu\nu\lambda}\, J^{\mu\nu}\, P^\lambda$$

a. Bereken de commutatoren:

$$[P^\mu, W_\sigma] \qquad [J^{\mu\nu}, W_\sigma] \qquad [W_\mu, W_\nu]$$

en laat zien dat geldt

$$[P^2, P^\mu] = 0 \qquad [P^2, J^{\mu\nu}] = 0$$

$$[W^2, P^\mu] = 0 \qquad [W^2, J^{\mu\nu}] = 0$$

Aanwijzing: maak gebruik van de relaties

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\mu_1\nu_1\lambda_1\sigma_1}\, \epsilon^{\mu_1\nu_2\lambda_2\sigma_2} &= -\delta^{\nu_2}_{\nu_1}\delta^{\lambda_2}_{\lambda_1}\delta^{\sigma_2}_{\sigma_1} - \delta^{\lambda_2}_{\nu_1}\delta^{\sigma_2}_{\lambda_1}\delta^{\nu_2}_{\sigma_1} - \delta^{\sigma_2}_{\nu_1}\delta^{\nu_2}_{\lambda_1}\delta^{\lambda_2}_{\sigma_1} \\
&\quad +\delta^{\lambda_2}_{\nu_1}\delta^{\nu_2}_{\lambda_1}\delta^{\sigma_2}_{\sigma_1} + \delta^{\sigma_2}_{\nu_1}\delta^{\lambda_2}_{\lambda_1}\delta^{\nu_2}_{\sigma_1} + \delta^{\nu_2}_{\nu_1}\delta^{\sigma_2}_{\lambda_1}\delta^{\lambda_2}_{\sigma_1} \\
\epsilon_{\mu_1\nu_1\lambda_1\sigma_1}\, \epsilon^{\mu_1\nu_1\lambda_2\sigma_2} &= 2\left(\delta^{\sigma_2}_{\lambda_1}\delta^{\lambda_2}_{\sigma_1} - \delta^{\lambda_2}_{\lambda_1}\delta^{\sigma_2}_{\sigma_1}\right)
\end{aligned}$$

b. Geef de klassieke representatie van P^2 en W^2 en bereken

$$P^2\, \varphi_r(x) \quad \text{en} \quad W^2\, \varphi_r(x)$$

voor het skalaire veld en het Dirac-veld.

c. Een massive vector boson veld (spin 1) wordt gegeven door

$$\rho_\mu(x) \;=\; \sum_\alpha \int \frac{d^3\,\vec{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\,\frac{\hbar c}{\sqrt{2E}}\,\Big[a(\vec{p},\alpha)\,\epsilon_\mu^{(\alpha)}(\vec{p})\,e^{-i\,px/\hbar}$$

$$+a(\vec{p},\alpha)\,\epsilon_\mu^{(\alpha)*}(\vec{p})\,e^{i\,px/\hbar}\Big] \quad \text{met} \quad \alpha = R, L, S$$

waarbij S de longitudinale polarisatie voorstelt. Dit veld voldoet aan de Klein-Gordon vergelijking mits de conditie geldt

$$\partial^\mu\,\rho_\mu(x) = 0 \quad \rightarrow \quad p^\mu\,\epsilon_\mu^{(\alpha)}(\vec{p}) = 0$$

Bereken

$$P^2\,\rho_\mu(x) \quad \text{en} \quad W^2\,\rho_\mu(x)$$