SUBATOMAIRE FYSICA

Uitwerking van de opgaven in "Nuclear and Particle Physics" (W.S.C. Williams, Oxford University Press, ISBN 0 19 852046 8).

1.1

$$\sigma(\theta > \Theta) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{Z\,z\,e^2}{4\pi\varepsilon_0\,T}\right)^2 \cot^2\frac{\Theta}{2} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{Z\,z\,\alpha\,\hbar c}{T}\right)^2 \cot^2\frac{\Theta}{2}$$

$$\text{met}\quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137,04}$$

$$Z = 79, \quad z = 2, \quad T = 10\,\text{MeV}, \quad \rightarrow \quad \sigma(\theta > \Theta) = 405,411\cot^2\frac{\Theta}{2}$$

$\Theta = 10°$ $\quad \cot^2\Theta/2 = 130,646$ $\quad \sigma(\theta > 10°) = 5,2865.10^4\ \text{fm}^2$

$\Theta = 20°$ $\quad \cot^2\Theta/2 = 32,1634$ $\quad \sigma(\theta > 20°) = 1,3039.10^4\ \text{fm}^2$

$\Theta = 30°$ $\quad \cot^2\Theta/2 = 13,9282$ $\quad \sigma(\theta > 30°) = 0,5647.10^4\ \text{fm}^2$

1.2 Met de gegevens uit de voorafgaande opgave en formule (1.6) in het boek op bldz. 8 verkrijgen wij het volgende resultaat

$$\frac{d\,\sigma}{d\,\Omega} = \left(\frac{Z\,z\,e^2}{16\,\pi\,\varepsilon_0\,T\,\sin^2\theta/2}\right)^2 = \left(\frac{Z\,z\,\alpha\,\hbar c}{4\,T\,\sin^2\theta/2}\right)^2 = \frac{32,2616}{\sin^4\theta/2}$$

na invullen van de hoek θ wordt de differentiële werkzame doorsnede gelijk aan

$$\theta = 10° \quad \sin 5° = 8,7115.10^{-2} \quad \rightarrow \quad \frac{d\,\sigma}{d\,\Omega} = 5,5912.10^5\ \text{fm}^2/\text{sr}$$

1.3 De kern wordt afgeschermd door zijn elektronenwolk zodat bij een eindige impactparameter het α-deeltje een object waarneemt wat een veel kleinere lading heeft dan $Z\,e$. Voor oneindige impact parameter ziet het α-deeltje geen lading meer zodat dan de werkzame doorsnede nul wordt. Voor een eindige impact parameter ligt de werkzame doorsnede tussen de twee uiterste waarden in en wordt dan eindig voor $\theta \rightarrow 0$.

1.4 Uit de wet van behoud van totale energie volgt (polaire coördinaten)

$$\mathcal{E}_{tot} = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right] + V(r) = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\text{met} \quad V(r) = \frac{Zze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{mv^2 p}{2r} \tag{1}$$

waarbij p (kortste afstand tot de kern als $b = 0$), r (afstand deeltje tot de kern), ϕ (azimuthale hoek), θ (verstrooiingshoek) en de impact-pararmeter b gegeven zijn in Fig. 1.5 van het boek. Merk op dat voor $r \to \infty$, $V(r) = 0$ en $T = 1/2mv^2$. De wet van behoud van baanimpulsmoment geeft

$$L = mr^2\frac{d\phi}{dt} = mvb \quad \to \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{vb}{r^2}$$

Merk op dat voor $\phi = \pi$ de waarde voor het baanimpulsmoment gegeven wordt door $L = mvb$. Vergelijking (1) kan nu m.b.v.

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} = \frac{vb}{r^2}\frac{dr}{d\phi}$$

geschreven worden als

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + r^2 + \frac{p}{b^2}r^3 = \frac{1}{b^2}r^4$$

De korste afstand d (voor willekeurihge b) wordt gegeven door

$$\frac{dr}{d\phi}\,|_{r=d} = 0 \quad \to \quad d^4 - pd^3 - b^2d^2 = 0$$

Aangezien d positief definiet moet zijn krijgen wij de volgende oploss-ing

$$d = \frac{1}{2}\Big(p + \sqrt{p^2 + 4b^2}\Big)$$

Bovenstaande oplossing kunnen we weer in de kortste afstand p (voor $b = 0$) en de verstrooiingshoek θ uitdrukken

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{p}{2b} \quad \to \quad \sin\frac{\theta}{2} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + 4b^2}}$$

$$d = \frac{1}{2}p\Big(1 + \frac{1}{\sin\theta/2}\Big) = \frac{1}{2}p\Big(1 + \csc\frac{\theta}{2}\Big)$$

1.5 De afleiding van de formule van Rutherford is gegeven in hoofdstuk 1.2 van het boek op bldz. 5-9. De voorwaarden waaronder deze geldig is staan vermeld onder de punten 3 t/m 7 op bldz. 6 van het boek. Een van de voorwaarden luidt dat er geen andere kracht aanwezig is dan de electrostatische kracht (Coulomb). Dit gaat niet meer op als het α-deeltje binnen de straal van de kern komt m.a.w. $p < R$. In dit geval spelen ook de sterke wisselwerking een rol. De kortste afstand tot de kern voor $b = 0$ wordt gegeven door

$$p = \frac{Z\,z\,e^2}{4\pi\varepsilon_0\,T} = \frac{Z\,z\,\alpha\,\hbar c}{T} \quad \text{met} \quad z = 2 \quad T = 15 \text{ MeV}$$

De straal van de kern wordt gegeven door $R = 1,2.A^{1/3}$ fm. Voor aluminium $({}^{27}_{13}Al)$ en goud $({}^{197}_{79}Au)$ krijgen wij de volgende waarden

$Z = 13 \quad A = 27 \qquad R = 3,60$ fm $\qquad p = 2,49$ fm $\qquad p < R$

$Z = 79 \quad A = 197 \qquad R = 6,98$ fm $\qquad p = 15,2$ fm $\qquad p > R$

Dus voor aluminium gaat de Rutherfordbenadering niet meer op. De potentiële energie van het twee-deeltjes systeem wordt gegeven door

$$U(r) = \frac{Z\,z\,e^2}{4\pi\varepsilon_0\,r} = \frac{Z\,z\,\alpha\,\hbar c}{r} \tag{2}$$

Deze wordt op het kernoppervlak $r = R$ voor aluminium en goud gelijk aan

$Z = 13 \quad A = 27 \qquad R = 3,60$ fm $\qquad U(R) = 10,4$ MeV

$Z = 79 \quad A = 197 \qquad R = 6,98$ fm $\qquad U(R) = 32,6$ MeV

1.6 De impulsoverdracht aan het α-deeltje (zie de formule in het boek onder (1.3) op bldz. 7) wordt gegeven door

$$q = 2mv\sin\frac{\theta}{2} \qquad q^2 = 4m^2v^2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\rightarrow \quad dq^2 = 2m^2v^2\sin\theta\,d\theta$$

De ruimtehoek wordt dan gegeven door

$$d\Omega = 2\pi\sin\theta = \frac{\pi}{m^2v^2}dq^2$$

De Rutherford werkzame doorsnede kan dan worden geschreven als (zie opgave 1.2)

$$\frac{d\,\sigma}{d\,q^2} = \frac{\pi}{m^2v^2}\frac{d\,\sigma}{d\,\Omega} = \frac{\pi}{m^2v^2}\left(\frac{Z\,z\,\alpha\,\hbar c}{4\,T}\right)^2\left(\frac{4m^2v^2}{q^2}\right)^2 =$$

$$\frac{4\pi\,Z^2\,z^2\,\alpha^2\,(\hbar c)^2}{q^4v^2}$$

Waarbij $T = 1/2mv^2$ (kinetische energie).

2.1 De formule voor de potentiële energie is gegeven in (2) (zie opgave 1.5) Voor (a), (b) en (c) neemt deze de volgende waarden aan

(a)	$z = Z = 1$	$r = 1$ fm	$U(r) = 1,44$ MeV
(b)	$z = 2 \quad Z = 79$	$r = 10$ fm	$U(r) = 22,7$ MeV
(c)	$z = Z = 46$	$r = 11,7$ fm	$U(r) = 261$ MeV

In het geval (c) is r gegeven door $r = 2R$ met $R = 1,2.A^{1/3}$ fm en $A = 115$.

2.2 De gemiddelde levensduur τ wordt gegeven door alle tijden in de tabel op te tellen en door 20 te delen. Het resultaat is $\tau = 9,95$ ns (1 ns $=$ 10^{-9} s).

2.3 Na 60 s vinden 5 desintegraties plaats. Dit betekent dat dat gedurende het interval $\Delta t = 60$ tussen t en $t + \Delta t$ het aantal kernen ${}^{14}_{6}C$ met 5 vermindert. Hieruit volgt

$$N(t) - N(t + \Delta t) = N_0 e^{-t/\tau}\left(1 - e^{-\Delta t/\tau}\right) = N(t)\left(1 - e^{-\Delta t/\tau}\right) = 5$$

Omdat $\Delta t \ll \tau$ mogen wij de bovenstaande formule benaderen

$$N(t)\left(1 - e^{-\Delta t/\tau}\right) = N(t)\left[\frac{\Delta t}{\tau} + \mathcal{O}\left(\frac{\Delta t}{\tau}\right)^2\right] = 5$$

Hieruit volgt dat met $\tau = 8267$ jaar $= 2,609.10^{11}$ s het aantal koolstofkernen ten tijde t gelijk is aan

$$N(t) = 5\frac{\tau}{\Delta t} = 2,174.10^{10} \quad \text{aantal kernen} \quad {}^{14}_{6}C \tag{3}$$

Gegeven is dat de soortelijke massa van CO_2 gegeven is door $s = 1,9768$ kg/m^3 dus de massa van 1 liter CO_2 ($= 10^{-3}$ m^3) is gelijk aan $M = 1,9768.10^{-3}$ kg. Het atoomgewicht van CO_2 is $43,998$ dus één molecuul CO_2 heeft een massa van $m = 43,998 \times 1,661.10^{-27} = 7,308.10^{-26}$ kg. Bij dit laatste zijn wij ervan uitgegaan dat koolstof hoofdzakelijk uit ${}^{12}_{6}C$ bestaat. Het aantal kernen dat in 10^{-3} m^3 CO_2 zit bedraagt

$$\frac{M}{m} = \frac{1,9768.10^{-3}}{7,308.10^{-26}} = 2,705.10^{22}$$

Echter het aantal CO_2 moleculen dat ${}^{14}_{6}C$ kernen bevat is gelijk aan $2,174.10^{10}$ (zie (3)). Dus de fractie moleculen CO_2 met ${}^{14}_{6}C$ t.o.v. van het totale aantal is gegeven door

$$\frac{2,174.10^{10}}{2,705.10^{22}} = 8,037.10^{-13}$$

2.4 de gemiddelde levensduur van het K^+-meson is $\tau = 1,237.10^{-8}$ s. Hieruit volgt dat $\omega = 1/\tau = 0,8084.10^{8}$ s^{-1}. Noem de vertakkingsvehouding f en de partiële overgangssnelheid ω. De tabel wordt dan gegeven door

vervalskanaal	f	ω[s^{-1}]
$K^+ \to \mu^+ + \bar{\nu}_\mu$	0,635	$5,13.10^7$
$K^+ \to \pi^+ + \pi^0$	0,212	$1,71.10^7$
$K^+ \to \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$	0,056	$0,45.10^7$
$K^+ \to \pi^+ + \pi^0 + \pi^0$	0,017	$0,14.10^7$
$K^+ \to \pi^0 + \mu^+ + \bar{\nu}_\mu$	0,032	$0,26.10^7$
$K^+ \to \pi^0 + e^+ + \bar{\nu}_e$	0,048	$0,39.10^7$

2.5 De gemiddelde levensduur van ${}^{198}_{79}Au$ in de volgende reactie

$${}^{197}_{79}Au + n \to {}^{198}_{79}Au + \gamma \quad \text{waarbij} \quad {}^{198}_{79}Au \to {}^{198}_{80}Hg + e^- + \bar{\nu}_e$$

is gegeven door $\tau = 3,89$ dagen $= 3,361.10^5$ s. Per seconde worden $p = 10^{10}$ kernen ${}^{198}_{79}Au$ geproduceerd. Dus het aantal kernen na $t =$ 6 dagen $= 5,184.10^5$ s is gelijk aan

$$N(t) = p\,\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = 2,642.10^{15}$$

$$\tau = \frac{1}{\omega} \quad \text{zie de formules op bldz. 25 in het boek}$$

Het aantal kernen ${}^{198}_{80}Hg$ bedraagt dan

$$p\,t - N(t) = 2,542.10^{15}$$

Het evenwichtsgetal wordt gegeven door

$$N(\infty) = p\,\tau = 3,361.10^{15}$$

2.6 De oplossingen van de gekoppelde differentiaalvergelijkingen op bldz. 26 in het boek worden gegeven door

$$N_1(t) = N_1(0)e^{-\omega_1 t} \qquad N_2(t) = N_1(0)\frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1}\left(e^{-\omega_1 t} - e^{-\omega_2 t}\right)$$

$N_2(t)$ neemt een maximum aan voor

$$t_{max} = \frac{1}{\omega_1 - \omega_2}\ln\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\tau_1\tau_2}{\tau_2 - \tau_1}\ln\frac{\tau_2}{\tau_1} \qquad (4)$$

In de opgave bekijkt men de volgende reacties:

$${}^{210}_{83}Bi \rightarrow^{210}_{84} P0 + e^- + \bar{\nu}_e \qquad \tau_1 = 7,2 \text{ dagen} = 6,221.10^5 \text{ s}$$

$${}^{210}_{84}Po \rightarrow^{206}_{82} P0 +^4_2 He \qquad \tau_2 = 200 \text{ dagen} = 1,728.10^7 \text{ s}$$

Uit deze gegevens volgt (zie (4)) dat

$$t_{max} = 2,145.10^6 \text{ s} = 24,8 \text{ dagen}$$

2.7 Beschouw de volgende vervalskanalen

$$\text{vervalskanaal 1} \quad {}^{40}_{19}K \rightarrow^{40}_{20} Ca + e^- + \bar{\nu}_e$$

$$\begin{array}{ll} \text{vervalskanaal 2} & {}^{40}_{19}K + e^- \rightarrow^{40}_{20} Ar^* + \nu_e \\ & \qquad\qquad\quad \downarrow \\ & \qquad\qquad\quad \rightarrow {}^{40}_{20}Ar + \gamma \end{array}$$

en noem de massa van ${}^{40}_{19}K$, m. De intensiteit van de electronen in reactie 1 is gelijk aan

$$I_1 = m\frac{2,7.10^4}{0,0118.10^{-2}}$$

Verder stelt N het aantal kernen ${}^{40}_{19}K$ voor dat gegeven wordt door

$$N = m\frac{N_A}{A'} = m\frac{6,022.10^{26}}{39,089}$$

Hieruit volgt dat de overgangssnelheid (transition rate) voor reactie 1 gelijk is aan

$$\omega_1 = \frac{I_1}{N} = 15.10^{-18}\,\mathrm{s}^{-1}$$

De verhouding tussen het aantal γ-stralen t.o.v. het aantal electronen is

$$f = \frac{I_2}{I_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{12}{100} = 0,12 \quad \text{zie tabel 2.4 op bldz. 28 in het boek}$$

$$\rightarrow \omega = \omega_1 + \omega_2 = 1,12\,\omega_1 \tag{5}$$

De levensduur van ${}^{40}_{19}K$ wordt gegeven door

$$\tau = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{1,12\,\omega_1} = 5,95.10^{16}\,\mathrm{s} = 1,9.10^9\,\text{jaar}$$

2.8 Het aantal kernen ${}^{238}_{92}U$ en ${}^{235}_{92}U$ worden respectievelijk gegeven door $N_1(t)$ en $N_2(t)$. Verder is bekend dat ten tijde $t = 0$, $N_1(0) = N_2(0) = N(0)$. Wij kunnen dan het volgende stelsel van vergelijkingen afleiden

$$N_1(t) = N_(0)e^{-t/\tau_1} \qquad N_2(t) = N_(0)e^{-t/\tau_2}$$

$$N_1(t) : N_2(t) = 1 : (7,3.10^{-2})$$

De verhouding ten tijde t is dan gegeven door

$$\frac{N_1(t)}{N_2(t)} = exp\left[-t\left(\frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_1\,\tau_2}\right)\right] = \frac{1}{7,3.10^{-3}} = 137,0$$

Hieruit volgt met $\tau_1 = 6,49.10^9$ jaar, $\tau_2 = 1,03.10^9$ jaar

$$t\left(\frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_1\,\tau_2}\right) = \ln 137,0 = 4,920 \quad \rightarrow \quad t = 6,023.10^9\,\text{jaar}$$

2.11 In opgave 2.3 is uitgerekend dat 10^{-3} m^3 CO_2 ongeveer $2,705.10^{22}$ kernen ${}^{12}_{6}C$ en ${}^{14}_{6}C$ bevat. De verhouding tussen het aantal ${}^{12}_{6}C$ en ${}^{14}_{6}C$ bedraagt $1 : 10^{-12}$. Dit betekent dat het aantal kernen ${}^{14}_{6}C$ gelijk is aan $N(0) = 2,705.10^{10}$. Verder is bekend uit opgave 2.3 dat het aantal kernen ${}^{14}_{6}C$ ten tijde t gelijk is aan $N(t) = 2,174.10^{10}$. Hieruit volgt

$$N(t) = N(0)e^{-t/\tau} \quad \rightarrow \quad e^{t/\tau} = 1,244$$

$$\rightarrow t = 0,2185\,\tau = 1806\,\text{jaar}$$

waarbij gegeven is dat de gemiddelde levensduur van ${}^{14}_{6}C$ gelijk is aan $\tau = 8267$ jaar.

2.12 (1) De totale werkzame doorsnede is gegeven door

$$\sigma_{tot} = \sigma_e + \sigma_c + \sigma_f = 2,7002.10^{-26}\,\text{m}^2$$

De dichtheid van de uraniumfolie (${}^{235}_{92}U$) is gelijk aan

$$\rho = \frac{0,1}{x}\,\text{kg m}^{-3}$$

waarbij x de dikte is van de folie en $0,1$ de dichtheid per oppervlakte voorstelt. De getalsdichtheid van de uraniumlkernen wordt dan gegeven door (zie de formule op bldz. 36 in het boek)

$$n = \frac{\rho\,N_A}{A'} = \frac{2,56.10^{23}}{x}$$

$$\text{met} \quad N_A = 6,022.10^{26}\ \text{atomen/kmol} \quad A' \sim A = 235$$

De fractie van het aantal neutronen (attenuation) dat verstrooid of geabsorbeerd wordt in de folie wordt gegeven door

$$d = 1 - e^{-n\,\sigma_{tot}\,x} = 6,89.10^{-3} \quad (0{,}689\%)$$

$$\text{met} \quad n\,\sigma_{tot}\,x = 6,91.10^{-3}$$

(2) Het aantal reacties in het kernsplitsingsproces (fission) wordt gegeven door

$$C = I_0\,(1 - e^{-n\,\sigma_f\,x}) = 510$$

$$\text{met} \quad n\,\sigma_f\,x = 5,12.10^{-3} \qquad I_0 = 10^5\,\text{s}^{-1}$$

waarbij I_0 de intensiteit is.

(3) De flux op een afstand R van de uraniumfolie wordt gegeven door

$$I = \frac{v\, n\, \sigma_e\, x}{R^2} \tag{6}$$

Hierbij is v de snelheid van de inkomende neutronen die bepaalt wordt uit de kinetische energie

$$T = \frac{1}{2} m_n v^2 = 0,29\,\text{eV} \quad \rightarrow \quad v = 0,81.10^4\ \text{m/s}$$

De massa van het neutron is gegeven door $m_n = 1,675.10^{-27}$ kg en 1 eV $= 1,6.10^{-19}$ J. De botsing is elastisch zodat de snelheid na de passage door de folie gelijk is aan de beginsnelheid. Het invullen van the grootheden in (6) geeft als resultaat

$$I = 4,15.10^{-5}\ \text{m}^{-2}\text{s}^{-1}$$

Waarbij gegeven is dat $n\, \sigma_e\, x = 5,12.10^{-7}$ en $R = 10\,\text{m}$.

2.13 Het aantal π^0-mesonen dat geproduceerd wordt is gegeven door (zie formule (2.18) op bldz. 34 in het boek)

$$C = N_0\, n\, \sigma\, x \quad \text{met} \quad N_0 = O\, I = \frac{V\, I}{x} \tag{7}$$

Hierbij zijn O en V het oppervlak en volume van de trefschijf die de dikte x heeft. Vergelijking (7) kan dan worden geschreven als

$$C = I\, \sigma\, n\, V \quad \text{met} \quad n = \frac{\rho\, N_A}{A'}$$

$$\rightarrow \quad C = \frac{I\, \sigma\, \rho\, V\, N_A}{A'}$$

Met behulp van de gegevens

$$I = 10^7\ \text{deeltjes}\,\text{m}^{-2}\text{s}^{-1} \quad \sigma = 4,5.10^{-30}\ \text{m}^2 \quad \rho = 60\,\text{kg/m}^2$$

$$V = 10^{-4}\, m^3 \quad N_A = 6,022.10^{26}\ \text{atomen/kmol} \quad A' \sim A = 1$$

verkrijgt men

$$C = 163 \quad \pi^0\text{-mesonen per seconde}$$

Het aantal fotonen dat per seconde wordt geproduceerd is tweemaal zo groot en is gelijk aan 326

2.14 De werkzame doorsnede voor het proces $n +_5^{10} B$ volgt uit het feit dat 20 % van natuurlijk Borium uit ${}_5^{10}B$ bestaat.

$$\sigma(n +_5^{10} B) + \sigma(n +_5^{11} B) = 19,3.10^{-28}\ \mathrm{m}^2$$

$$\rightarrow \qquad \sigma(n +_5^{10} B) = 0,2 \times 19,3.10^{-28} = 3,86.10^{-28}\ \mathrm{m}^2 \tag{8}$$

Verder hebben wij de volgende twee reacties

$$n + 5^{10}B \rightarrow_2^4 He +_3^7 Li \qquad 30\,\%$$

$$n + 5^{10}B \rightarrow_2^4 He +_3^7 Li^* \qquad 70\,\%$$

$$\downarrow$$

$$\rightarrow_3^7 Li + \gamma$$

De dichtheid van Borium in de trefschijf is gegeven door

$$n = \frac{\rho\, N_A}{A'} \quad \text{met} \quad A' = 0,2 \times 10 + 0,8 \times 11 = 10,8 \quad \rho = \frac{1}{x}\, \mathrm{kg/m^3}$$

waarbij x de dikte van de trefschijf is. Het aantal reacties per seconde is gegeven door

$$C = I_0\, n\, \sigma\, x = \frac{I_0\, N_A\, \sigma}{A'} = 2,152.10^3 \quad \text{met} \quad I_0 = 10^5\, \mathrm{s}^{-1}$$

$$\text{en} \quad \sigma \equiv \sigma(n +_5^{10} B) \quad \text{zie (8)}$$

waarbij I_0 de intensiteit van de neutronenbundel is. Het aantal fotonen per seconde is dan gegeven door

$$0,7 \times 2,152.10^3 = 1507$$

3.1 De vormfactor van een kern met bolsymmetrische ladingsverdeling wordt gegeven door

$$F(q^2) = \frac{4\pi\ \hbar}{Z\ e\ q} \int_0^\infty dr\ \rho(r)\ r\ \sin\left(\frac{q\ r}{\hbar}\right)$$

$$\text{met} \quad F(0) = \frac{4\pi}{Z\ e} \int_0^\infty dr\ r^2\, \rho(r) = 1 \tag{9}$$

Verder is gedefinieerd

$$\langle r^2 \rangle = \frac{4\pi}{Z\ e} \int_0^\infty dr\ \rho(r)\ r^4 \tag{10}$$

Differentiatie van de vormfactor naar q^2 geeft

$$\frac{d\,F(q^2)}{d\,q^2} = \frac{1}{2q} \frac{d\,F(q^2)}{d\,q} =$$

$$\frac{2\pi\ \hbar}{Z\ e\ q} \int_0^\infty dr\ \rho(r) \left[-\frac{r}{q^2} \sin\left(\frac{q\ r}{\hbar}\right) + \frac{r^2}{\hbar\,q} \cos\left(\frac{q\ r}{\hbar}\right) \right]$$

Om de afgeleide in het punt $q = 0$ te berekenen is het gemakkelijkste een Taylor expansie van de sinus en cosinus rondom $q = 0$ te maken

$$\sin\left(\frac{q\ r}{\hbar}\right) = \frac{q\ r}{\hbar} - \frac{1}{6}\frac{q^3\ r^3}{\hbar^3} + \cdots \quad \cos\left(\frac{q\ r}{\hbar}\right) = 1 - \frac{1}{2}\frac{q^2\ r^2}{\hbar^2} + \cdots$$

Hogere order termen in de reeks dragen niet bij. Het resultaat is

$$\frac{d\,F(q^2)}{d\,q^2} = -\frac{2\pi}{3\hbar^2\,Z\,e} \int_0^\infty dr\ \rho(r)\,r^4 = -\frac{1}{6\hbar^2} \langle r^2 \rangle \quad \text{zie (10)}$$

3.2 De ladingsverdeling wordt gegeven door

$$\rho(r) = \rho_0 \quad \text{voor} \quad r \leq a$$

$$\rho(r) = 0 \quad \text{voor} \quad r > a$$

De integraal in (9) kan worden berekend via partiële integratie

$$\begin{aligned} F(q^2) \quad = \quad & \frac{4\pi\,\hbar\,\rho_0}{Z\,e} \int_0^a dr\ \frac{r}{q} \sin\left(\frac{q\ r}{\hbar}\right) = -\frac{4\pi\,\hbar\,\rho_0}{Z\,e\,q} \left[\frac{\hbar}{q}\,r\ \cos\left(\frac{q\ r}{\hbar}\right)\right]_0^a \\ & + \frac{4\pi\,\hbar^2\,\rho_0}{Z\,e\,q^2} \int_0^a dr\ \cos\left(\frac{q\ r}{\hbar}\right) = -\frac{4\pi\,\hbar^2\,a\,\rho_0}{Z\,e\,q^2} \cos\left(\frac{q\ a}{\hbar}\right) \\ & + \frac{4\pi\,\hbar^3\,\rho_0}{Z\,e\,q^3} \sin\left(\frac{q\ a}{\hbar}\right) \end{aligned} \tag{11}$$

Verder hebben wij de voorwaarde (zie (9))

$$Ze = 4\pi\rho_0 \int_0^a dr\,r^2 = \frac{4\,\pi\,a^3\,\rho_0}{3} \quad \rightarrow \quad \rho_0 = \frac{3\,Z\,e}{4\,\pi\,a^2}$$

De vormfactor in (11) kan dan worden geschreven als

$$F(q^2) = \frac{3}{x^3}\Big(\sin x - x\,\cos x\Big) \quad \text{met} \quad x = \frac{a\,q}{\hbar} \tag{12}$$

3.3 Analoog aan de vorige opgave passen we weer partiële integratie toe

$$F(q^2) = \frac{4\pi\,\hbar\,\rho_0}{Z\,e\,q}\int_0^\infty dr\,e^{-r/a}\,\sin\left(\frac{q\,r}{\hbar}\right) =$$

$$-\left[\frac{4\pi\,\hbar\,\rho_0\,a}{Z\,e\,q}\,e^{-r/a}\,\sin\left(\frac{q\,r}{\hbar}\right)\right]_0^\infty + \frac{4\pi\,\rho_0\,a}{Z\,e}\int_0^\infty dr\,e^{-r/a}\,\cos\left(\frac{q\,r}{\hbar}\right)$$

$$= -\left[\frac{4\pi\,\rho_0\,a^2}{Z\,e}\,e^{-r/a}\,\cos\left(\frac{q\,r}{\hbar}\right)\right]_0^\infty$$

$$-\frac{4\pi\,\rho_0\,q\,a^2}{Z\,e\,\hbar}\int_0^\infty dr\,e^{-r/a}\,\sin\left(\frac{q\,r}{\hbar}\right) = \frac{4\pi\,\rho_0\,a^2}{Z\,e} - \frac{a^2\,q^2}{\hbar^2}F(q^2) \tag{13}$$

Met de voorwaarde (zie (9)) dat

$$Ze = 4\,\pi\,\rho_0\int_0^\infty dr\,r\,e^{-r/a} = 4\,\pi\,\rho_0\,a^2 \quad \rightarrow \quad \rho_0 = \frac{Z\,e}{4\,\pi\,a^2} \tag{14}$$

Uit (13) en (14) volgen

$$F(q^2) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{met} \quad x = \frac{a\,q}{\hbar}$$

3.4 De vierimpulsen van het inkomende en uitgaande electron worden gegeven door

$$p_i = \left(\frac{E_i}{c}, \vec{p}_i\right) \qquad p_f = \left(\frac{E_f}{c}, \vec{p}_f\right)$$

De botsing is elastisch zodat $|\vec{p}_i| = |\vec{p}_f| = p$. De impulsoverdracht aan het elektron is

$$q^2 = |\vec{p}_i - \vec{p}_f|^2 = |\vec{p}_i|^2 + |\vec{p}_f|^2 - 2|\vec{p}_i||\vec{p}_f|\cos\theta = 2p^2(1-\cos\theta)$$

$$= 4p^2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

Met $p = 330$ MeV/c en $\theta = 10^\circ$ ($\cos\theta = 0,9848$) wordt de impulsoverdracht gelijk aan $q = 57,54$ MeV/c. De de Broglie-golflengte is gelijk aan

$$\lambda = \frac{h}{q} = \frac{2\,\pi\,\hbar\,c}{q\,c} = 21,55 \text{ fm}$$

De gereduceerde de Broglie-golflengte is gelijk aan

$$\lambda\!\!\!^{-} = \frac{\hbar}{q} = \frac{\hbar\,c}{q\,c} = 3,43 \text{ fm}$$

De snelheid van het elektron is gegeven door (relativistisch)

$$\frac{v}{c} = \frac{p\,c}{\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}} = 0,9999 \sim 1$$

Vanwege de hoge snelheid ($v \sim c$) moeten we de Mott werkzame doorsnede gebruiken. Voor een kern met puntlading luidt deze

$$\left(\frac{d\,\sigma}{d\,\Omega}\right)_{Mott} = \frac{Z^2\alpha^2\hbar^2c^2}{4p^2v^2}\frac{1}{\sin^4\theta/2}\left[1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right] = 32,7 \text{ fm}^2$$

$$\text{met} \quad Z = 40 \quad \sin^2\frac{\theta}{2} = 7,6.10^{-3} \quad p\,c = 330\,\text{MeV}$$

De straal van de kern is gegeven door $a = 1,2.A^{1/3}$. Voor ${}^{40}_{20}Ca$ is $a = 4,104$ fm. De vormfactor in (12) is dan gelijk aan

$$x = \frac{a\,q}{\hbar} = \frac{a}{\lambda\!\!\!^{-}} = 1,197 \quad \rightarrow \quad \sin x = 0,931\,, \quad \cos x = 0,365$$

$$\rightarrow \quad F(q^2) = 0,864$$

De werkzame doorsnede voor een kern met ladingsverdeling luidt

$$\left(\frac{d\,\sigma}{d\,\Omega}\right) = |F(q^2)|^2\left(\frac{d\,\sigma}{d\,\Omega}\right)_{Mott}$$

Dus de reductiefactor wordt $|F(q^2)|^2 = 0,747$.

3.5 Een bolvormig homogeen geladen kern met totale lading Q heeft de volgende elektrische veldsterkte en potentiaal (voor de afleiding zie opgave 4.1)

$$r \leq R \qquad E = \frac{Q\,r}{4\pi\varepsilon_0\,R^3} \qquad V(r) = \frac{3\,Q}{8\pi\varepsilon_0\,R} - \frac{Q\,r^2}{8\pi\varepsilon_0\,R^3}$$

$$r > R \qquad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\,r^2} \qquad V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\,r}$$

De mechanische potentiële energie voor een kern met lading $Q = Ze$ wordt gegeven voor $r = 0$ door

$$U(0) = -eV(0) = -\frac{3\,e\,Q}{8\pi\varepsilon_0\,R} = -\frac{3\hbar c\,Z\,e^2}{8\pi\varepsilon_0\,\hbar c\,R} = -\frac{3\alpha\hbar c Z}{2R}$$

De straal R voor ${}^{197}_{79}Au$ is gelijk aan $R = 1,2.A^{1/3} = 6,982$ fm. Het resultaat is

$$U(0) = -24,4 \text{ MeV}$$

3.6 De straal van de Bohrse banen wordt gegeven door

$$a_n = \frac{\hbar\,c}{m\,c^2\,\alpha\,Z}\,n^2$$

(a) De massa van het muon is gelijk aan $m_\mu = 105,7$ MeV. In het geval van het proton ($Z = 1$) krijgen we voor $n = 1$

$$a_1 = \frac{\hbar\,c}{m_\mu\,c^2\,\alpha} = 258\,\text{fm}$$

(b) Voor ${}^{12}_{6}C$ ($Z = 6$)wordt de eerste Bohrse baan gelijk aan

$$a_1 = \frac{258}{6} = 43\,\text{fm}$$

De straal van een kern is gegeven door $R = 1,2.A^{1/3}$ fm. Voor ${}^{208}_{82}Pb$ ($A = 208$) wordt deze gelijk aan $R = 7,11$ fm. Wij hebben nu de voorwaarde ($Z = 82$)

$$a_n = \frac{\hbar\,c}{m\,c^2\,\alpha\,Z}\,n^2 = 3,146\,n^2 \geq 7,11 \quad \rightarrow \quad n \geq 2$$

De energie niveaus worden gegeven door

$$E_n = -\frac{Z\,\alpha\,\hbar\,c}{2\,a_n} = -\frac{Z^2\,\alpha^2\,m\,c^2}{2\,n^2} \tag{15}$$

Gevraagd wordt het energieverschil te berekenen tussen het $n = 2$ en het $n = 3$ niveau. Dit is gelijk aan

$$E_3 - E_2 = \frac{5}{72} Z^2 \alpha^2 m_\mu c^2 = 2,63\,\mathrm{MeV}$$

3.7 (a) De bindingsenergie van een muon in ${}^{12}_{6}C$ wordt voor $n = 2$ gegeven door (zie (15))

$$E_2 = -\frac{36}{8} \alpha^2 m_\mu c^2 = 2,53.10^{-2}\,\mathrm{MeV} = 25,3\,\mathrm{KeV}$$

Hierbij is aangenomen dat de ladingsverdeling in de kern ${}^{12}_{6}C$ puntvormig is. Dit betekent dat de potentiaal $V(r)$ in de Schrödingervergelijking gegeven wordt door

$$V(r) = \frac{Z\,e}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r} \quad \text{voor} \quad 0 < r < \infty \tag{16}$$

(b) Als de lading van ${}^{12}_{6}C$ bolvormig is en de straal is gelijk aan $a = 1,2.A^{1/3} = 2,75$ fm dan ziet de potentiaal in de Schrödingervergelijking er als volgt uit

$$V(r) = \frac{3\,Z\,e}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,a} - \frac{Z\,e\,r^2}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,a^3} \quad \text{voor} \quad 0 < r \leq a$$

$$V(r) = \frac{Z\,e}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r} \quad \text{voor} \quad a < r < \infty$$

Hieruit volgt dat in vergelijking met (16) de potentiaal als gevolg van de uitgebreide ladingsverdeling in het gebied $0 < r \leq a$ gecorrigeerd wordt met

$$\Delta V(r) = \frac{3\,Z\,e}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,a} - \frac{Z\,e\,r^2}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,a^3} - \frac{Z\,e}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r}$$

De potentiële energie $(-eV(r))$ kan dan worden geschreven als

$$-eV(r) = -\frac{3\,Z\,\hbar\,c\,\alpha}{2\,a} + \frac{Z\,\hbar\,c\,\alpha\,r^2}{2\,a^3} \quad \text{voor} \quad 0 < r \leq a$$

$$-eV(r) = \frac{Z\,e}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r} \quad \text{voor} \quad a < r < \infty$$

Dus de potentiële energie in het gebied wordt gecorrigeerd met

$$-e\Delta V(r) = -\frac{3\,Z\,\hbar\,c\,\alpha}{2\,a} + \frac{Z\,\hbar\,c\,\alpha\,r^2}{2\,a^3} + \frac{Z\,\hbar\,c\,\alpha}{r} \qquad 0 < r \leq a$$

$$-e\Delta V(r) = 0 \qquad a < r < \infty$$

De verschuiving in de energie ΔE_2 voor de $2s$ toestand kan m.b.v. storingstheorie worden uitgerekend. In laagste orde benadering wordt deze gegeven door

$$\Delta E_2 = \langle 2 \mid -e\Delta V(r) \mid 2 \rangle = -e \int d^3r\, \psi^*(r)\, \Delta V(r)\, \psi(r)$$

$$\text{met} \quad \psi(r) = A(\alpha_1 + \beta_1\, r)e^{-\gamma\, r}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left(\frac{Z}{2\,r_0}\right)^{3/2} \qquad \alpha_1 = 2 \quad \beta_1 = -\frac{Z}{r_0} \quad \gamma = \frac{Z}{2\,r_0} \quad (17)$$

De integraal is bolsymmetrisch dus kunnen we gemakkelijk over de ruimtehoek $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ integreren. Het resultaat voor (17) wordt

$$\Delta E_2 = 4\,\pi\,A^2\,Z\,\hbar\,c\,\alpha \int_0^a dr\, r^2 (\alpha_1^2 + 2\alpha_1\beta_1 r + \beta_1^2 r^2)$$

$$\times \left(-\frac{3}{2a} + \frac{r^2}{2\,a^3} + \frac{1}{r}\right) e^{-2\gamma r} \qquad (18)$$

Om lang rekenwerk te vermijden kunnen we de volgende benadering maken

$$\int_0^a dr\, r^m\, e^{-2\,\gamma\, r} \underset{2\,\gamma\, a \ll 1}{\sim} \frac{a^{m+1}}{m+1} \qquad \text{merk op dat} \quad 2\,\gamma\, a = 0,064$$

Integraal (18) wordt dan

$$\Delta E_2 \sim 4\,\pi\,A^2\,Z\,\hbar\,c\,\alpha \left(\frac{1}{10}\,a^2\,\alpha_1^2 + \frac{1}{12}\,a^3\,\alpha_1\,\beta_1 + \frac{3}{140}\,a^4\,\beta_1^2\right)$$

$$= \frac{a^2\,Z^4\,\hbar\,c\,\alpha}{8\,r_0^3} \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{6}\frac{a\,Z}{r_0} + \frac{3}{140}\frac{a^2\,Z^2}{r_0^2}\right)$$

Vanwege $a\,Z \ll r_0$ kunnen we de bovenstaande uitkomst weer benaderen door de laatste twee termen weg te laten

$$\Delta E_2 \sim \frac{a^2\,Z^4\,\hbar\,c\,\alpha}{20\,r_0^3} = \frac{1}{20}\frac{(m_\mu\,c^2)^3}{(\hbar\,c)^2}\,\alpha^4\,Z^4\,a^2 = 42,2\,\mathrm{eV}$$

4.1 Eerst rekenen wij het elektrostatische veld van een homogeen geladen bol met straal R uit. Pas de stelling van Gauss toe

$$\int d\vec{S}\cdot\vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad Q = \frac{4\,\pi\,R^3}{3}\,\rho$$

waarbij ρ de ladingsdichtheid is.

$$r \le R \qquad E\,4\,\pi\,r^2 = \rho\,\frac{4\,\pi\,r^3}{3\,\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad E = \frac{\rho\,r}{3\,\varepsilon_0}$$

$$r > R \qquad E\,4\,\pi\,r^2 = \rho\,\frac{4\,\pi\,R^3}{3\,\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad E = \frac{\rho\,R^3}{3\,\varepsilon_0\,r^2}$$

De elektrostatische energie wordt gegeven door

$$\mathcal{E} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3\vec{r}\,E^2 = \frac{2\,\pi\,\rho^2}{9\,\varepsilon_0}\int_0^R dr\,r^4 + \frac{2\,\pi\,\rho^2\,R^6}{9\,\varepsilon_0}\int_R^\infty dr\,\frac{1}{r^2}$$

$$= \frac{4\,\pi\,\rho^2\,R^5}{15\,\varepsilon_0} = \frac{3\,Q^2}{20\,\pi\,\varepsilon_0\,R} \tag{19}$$

4.2 De uitdrukking in (19) kan geschreven worden met $R = 1,24.A^{1/3}$ fm en $Q = Z\,e$ als

$$\mathcal{E} = \frac{3\,Z^2\,\hbar\,c\,\alpha}{5\,R} = \frac{3\,Z^2\,\hbar\,c\,\alpha}{6,2\,A^{1/3}} = a_C\frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

$$\rightarrow \quad a_C = \frac{3\,\hbar\,c\,\alpha}{6,2} = 0,697\,\mathrm{MeV} \tag{20}$$

De bindingsenergie van ${}^{181}_{73}Ta$ (oe-kern $\rightarrow a_p = 0$) wordt gegeven door

$$B = a_V\,A - a_S\,A^{2/3} - a_A\,\frac{(A-2\,Z)^2}{A} + B_C$$

met $\quad a_V = 15,56 \quad a_S = 17,23 \quad a_A = 23,285 \quad B = 1454$

De coulombterm B_C is dan gelijk aan

$$B_C = -653,45 = -a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} = -942,08\, a_C$$

$$\rightarrow \quad a_C = 0,694\,\mathrm{MeV} \tag{21}$$

De resultaten van vergelijking (20) en (21) stemmen met elkaar overeen hetgeen betekent dat ${}^{181}_{73}Ta$ een bolvormige ladingsverdeling heeft.
Om de vrijgekomen energie in het proces

$${}^{235}_{92}U \rightarrow {}^{87}_{35}Br + {}^{145}_{57}La + 3\,n$$

te berekenen moeten we eerst de bindingsenergie $B(Z,A)$ van iedere kern bepalen. De massa van de kern volgt dan uit

$$M(Z,A)\,c^2 = Z\,m_p\,c^2 + (A-Z)\,m_n\,c^2 - B(Z,A)$$

$$m_p\,c^2 = 938,28\,\mathrm{MeV} \quad m_n\,c^2 = 939,57\,\mathrm{MeV}$$

Het resultaat is

${}^{235}_{92}U$	$B(92,235) = 1786,8$ MeV	$M(92,235)\,c^2 = 2,1889.10^5$ MeV
${}^{87}_{35}Br$	$B(35,87) = 745,38$ MeV	$M(35,87)\,c^2 = 0,8095.10^5$ MeV
${}^{145}_{57}La$	$B(57,145) = 1786,8$ MeV	$M(57,145)\,c^2 = 1,3497.10^5$ MeV

De vrijgekomen energie Q is dan gelijk aan

$$Q = (M(92,235) - M(35,87) - M(57,145) - 3\,m_n)\,c^2 = 149\,\mathrm{MeV}$$

4.3 De toestandsdichtheid in een Fermigas van deeltjes met spin $s = 1/2$ is gegeven door

$$\rho = \sum_{s_z=\pm 1/2} \int_0^{p_F} \frac{d^3\vec{p}}{(2\,\pi\hbar)^3} = \frac{p_F^3}{3\,\pi^2\,\hbar^3}$$

waarbij p_F de Fermi-impuls voorstelt. Het totaal aantal toestanden in een volume V is gegeven door

$$\overline{N} = \rho\, V = \frac{p_F^3}{3\,\pi^2\,\hbar^3}\, V \tag{22}$$

De totale energie is gelijk aan

$$\overline{E} = V \sum_{s_z=\pm 1/2} \int_0^{p_F} \frac{d^3\vec{p}}{(2\,\pi\hbar)^3}\,\frac{p^2}{2\,m} = \frac{p_F^5}{10\,m\,\pi^2\,\hbar^3}\,V \tag{23}$$

Uit (22) en (23) volgt

$$\overline{E} = \frac{(3\,\overline{N})^{5/3}\,\pi^{4/3}\,\hbar^2}{10\,m\,V^{2/3}} \tag{24}$$

Verder hebben wij voor een bolvormige kern met straal $R = R_0.A^{1/3}$

$$V = \frac{4\,\pi\,R_0^3\,A}{3} \tag{25}$$

Substitutie van V (25) in uitdrukking (24) geeft

$$\overline{E} = \frac{9\pi}{80}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3}\frac{\hbar^2}{m\,R_0^2}\left(\frac{2\,\overline{N}}{A}\right)^{5/3} A \tag{26}$$

De Fermi-energie is gedefinieerd door

$$E_F = \frac{p_F^2}{2\,m}$$

Formule (23) kan dan worden geschreven als

$$\overline{E} = \frac{(2\,m)^{3/2}\,V}{5\,\pi^2\,\hbar^3}\,E_F^{5/2} = \frac{2^{7/2}\,m^{3/2}\,R_0^3\,A}{15\,\pi\,\hbar^3}\,E_F^{5/2} \tag{27}$$

Uit (24) en (27) volgt

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2\,m\,R_0^2}\left(\frac{9\,\pi}{8}\right)^{2/3}\left(\frac{2\,\overline{N}}{A}\right)^{2/3}$$

De Fermi-energie voor protonen en neutronen wordt dan gelijk aan

$$E_F(\text{protonen}) = \frac{\hbar^2}{2\,m\,R_0^2}\left(\frac{9\,\pi}{8}\right)^{2/3}\left(\frac{2\,Z}{A}\right)^{2/3}$$

$$E_F(\text{neutronen}) = \frac{\hbar^2}{2\,m\,R_0^2}\left(\frac{9\,\pi}{8}\right)^{2/3}\left(\frac{2\,N}{A}\right)^{2/3} \tag{28}$$

Voor een kern met een gelijk aantal protonen en neutronen hebben wij $Z = N = A/2$. Formule (28) wordt

$$E_F(\text{nucleonen}) = \frac{\hbar^2}{2\,m\,R_0^2}\,\left(\frac{9\,\pi}{8}\right)^{2/3}$$

Men kan de asymmetrie-term uit de bindingsenergieformule afleiden uit relatie (26)

$$\begin{aligned}
\overline{E}_{tot} &= \overline{E}(\text{neutronen}) + \overline{E}(\text{neutronen}) \\
&= \frac{9\pi}{80}\,\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3}\,\frac{\hbar^2}{m\,R_0^2}\,A\left[\left(\frac{2\,Z}{A}\right)^{5/3} + \left(\frac{2\,N}{A}\right)^{5/3}\right] \qquad (29)
\end{aligned}$$

De asymmetrie is gedefinieerd door

$$I = N - Z \quad \to \quad Z = \frac{A-I}{2} \quad N = \frac{A+I}{2}$$

In het geval dat $I \ll A$ kunnen we een expansie in I/A maken

$$\left(\frac{2\,Z}{A}\right)^{5/3} = \left(1 - \frac{I}{A}\right)^{5/3} = 1 - \frac{5}{3}\frac{I}{A} + \frac{5}{9}\left(\frac{I}{A}\right)^2 + \cdots$$

$$\left(\frac{2\,N}{A}\right)^{5/3} = \left(1 + \frac{I}{A}\right)^{5/3} = 1 + \frac{5}{3}\frac{I}{A} + \frac{5}{9}\left(\frac{I}{A}\right)^2 + \cdots$$

Substitutie van bovenstaande expansie in (29) geeft

$$\begin{aligned}
\overline{E}_{tot} &= \frac{9\pi}{40}\,\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3}\,\frac{\hbar^2}{m\,R_0^2}\,A\left[1 + \frac{5}{9}\left(\frac{I}{A}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{I}{A}\right)^4 + \cdots\right] \\
&= \frac{9\pi}{40}\,\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3}\,\frac{\hbar^2}{m\,R_0^2}\,A + \frac{\pi}{8}\,\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3}\,\frac{\hbar^2}{m\,R_0^2}\,\frac{I^2}{A} \\
&= \frac{9\pi}{40}\,\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3}\,\frac{\hbar^2}{m\,R_0^2}\,A + a_A\,\frac{I^2}{A} \qquad (30)
\end{aligned}$$

De laatste term komt in de bindingsenergie formule voor. Als $m_p \sim m_n$ kunnen we a_A berekenen. Het resultaat is

$$a_A = \frac{\pi}{8}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3}\,\frac{\hbar^2\,c^2}{m_p\,c^2\,R_0^2} = 11,13\,\text{MeV}$$

met $R_0 = 1,2$ fm. Vergelijking met het experimenteel waargenomen getal $a_A = 23,285$ MeV laat zien dat het berekende getal ongeveer een factor twee kleiner is. dit is gedeeltelijk te wijten aan het feit dat wij hogere machten dan $(I/A)^2$ in formule (30) verwaarloosd hebben.

5.1 Gegeven is het α-verval

$$ {}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}He $$

De Q-waarde van dit proces wordt gegeven door (zie (5.7) op bldz. 76 in het boek)

$$ \begin{aligned} Q_\alpha &= \left(M(Z,A) - M(Z-2,A-4) - M(2,4)\right)\, c^2 \\ &= B(Z-2,A-4) + B(2,4) - B(Z,A) \end{aligned} \tag{31} $$

Er zijn nu twee manieren om Q_α te berekenen. De eerste volgt uit formule (5.8) op bldz. 76 in het boek. Deze wordt gegeven door

$$ \begin{aligned} Q_\alpha = -4\,\frac{dB}{dA} + B(2,4) &= -4\,a_V + \frac{8}{3}\,a_S\,A^{-1/3} - \frac{4}{3}\,a_C\,\frac{Z^2}{A^{4/3}} \\ &+4\,a_A\left(1 - 4\frac{Z^2}{A^2}\right) \mp 2\,a_P\,A^{-3/2} + B(2,4) \end{aligned} $$

De tweede manier is om de formule voor de bindingsenergie in tabel 4.1 op bldz. 60 in het boek rechtstreeks in te vullen in (31). Het resultaat is

$$ \begin{aligned} Q_\alpha &= -4\,a_V + \frac{8}{3}\,a_S\,A^{-1/3} + 4\,a_C\left(Z - 1 - \frac{(Z-2)^2}{3\,A}\right) \\ &-4\,a_A\,\frac{(N-Z)^2}{A^2} \mp 2\,a_P\,A^{-3/2} + B(2,4) \end{aligned} $$

Als we nu termen van de orde $1/Z$, $1/A$ en hoger verwaarlozen dan kan de bovenstaande formule geschreven worden als

$$ \begin{aligned} Q_\alpha &= -4\,a_V + \frac{8}{3}\,a_S\,A^{-1/3} + 4\,a_C\,Z\left(1 - \frac{Z}{3\,A}\right) \\ &-4\,a_A\,\frac{(N-Z)^2}{A^2} \mp 2\,a_P\,A^{-3/2} + B(2,4) \end{aligned} \tag{32} $$

De zilverkern ${}^{107}_{47}Ag$ is oe dus $a_P = 0$. Met formule (32) en de constanten in tabel 4.1 op bldz. 60 in het boek krijgen we de waarde $Q_\alpha = -2,08$ MeV. Deze waarde is negatief dus de kern ${}^{107}_{47}Ag$ is stabiel tegen α-verval. Voor goud ${}^{197}_{79}Au$ krijgen we de waarde $Q_\alpha = -13,04$ MeV waaruit we kunnen afleiden dat goud zelfs stabieler is dan zilver.

5.3 Beschouw het volgende verval

$$ {}^{21}_{11}Na \rightarrow {}^{21}_{10} Ne + e^+ + \nu_e $$

De Q-waarde wordt gegeven door

$$ Q_\beta = (M(11,21) - M(10,21) - m_e)\, c^2 = (m_p - m_n - m_e)\, c^2 $$

$$ +B(10,21) - B(11,21) = (m_p - m_n - m_e)\, c^2 + a_C\, \frac{2Z-1}{A^{1/3}} $$

met $\quad Z = 11$

De laatste term kan voor een bolvormige ladingsverdeling vervangen worden (zie opgave 4.2)

$$ Q_\beta = (m_p - m_n - m_e)\, c^2 + \frac{3\,\alpha\,\hbar\, c}{5\,R}\,(2Z-1) $$

Waarbij $R = 3,6$ fm de straal van de kern is. De maximale energie wordt gegeven door

$$ E_{max} = Q_\beta + m_e\, c^2 = 3,746\,\mathrm{MeV} $$

5.5 Beschouw het β-verval

$$ {}^{35}_{18}Ar \rightarrow {}^{35}_{17} Cl + e^+ + \nu_e $$

zodat $Z = 18$ en $N = 17$. De Q-waarde is gelijk aan

$$ Q_\beta = (M(Z,A) - M(Z-1,A) - m_e)\, c^2 = B(Z-1,A) - B(Z,A) $$

$$ -m_e\, c^2 = (m_p - m_n - m_e)\, c^2 + a_C \frac{2Z-1}{A^{1/3}} - 4\, a_A \frac{N-Z+1}{A} \tag{33} $$

De kern ${}^{35}_{18}Ar$ is eo zodat $a_P = 0$. Verder is voldaan aan de relatie $N = Z - 1$ waardoor de asymmetrieterm niet bijdraagt. Daarom kan na invullen (33) geschreven worden als

$$ Q_\beta = 10,7\, a_C - 1,804 \quad \rightarrow \quad a_C = 0,631\,\mathrm{MeV} $$

De kern ${}^{135}_{56}Ba$ is een stabiel isobaar. Dit betekent dat $M(Z,135)$ een minimum aannneemt voor $Z = 56$. Dit betekent dat de afgeleide van $M(Z,A)$ met betrekking tot Z voor vast A gelijk aan nul wordt.

$$\frac{d\,M(Z,A)}{d\,Z} = (m_p - m_n)\,c^2 + 2\,a_C \frac{Z}{A^{1/3}} - 4\,a_A \frac{N-Z}{A} = 0 \qquad (34)$$

Na invullen $A = 135$, $Z = 56$ en $N = 79$ volgt uit (34)

$$-1,293 + 21,8\,a_C - 0,68\,a_A = 0 \quad \text{met} \quad a_C = 0,631$$

$$\rightarrow \quad a_A = 18,33\,\mathrm{MeV}$$

Noteer dat de experimenteel gevonden waarde voor a_A hoger ligt namelijk $a_A = 23,285$ MeV.

9.1 De ijktransformaties worden gegeven door

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \qquad \phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial\,\Lambda}{\partial\,t}$$

Onder deze transformaties veranderen het elektrostatische veld $\vec{E}$ en het magnetische veld $\vec{B}$ niet.

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla}\phi' - \frac{\partial\,\vec{A}'}{\partial\,t} = -\vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla}\frac{\partial\,\Lambda}{\partial\,t} - \frac{\partial\,\vec{A}}{\partial\,t} - \frac{\partial\,\vec{\nabla}\Lambda}{\partial\,t}$$

$$= -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\,\vec{A}}{\partial\,t} = \vec{E}$$

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\Lambda = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$$

9.2 Stel dat energie- en impulsbehoud bij een vertex opgaat in het proces

$$e^-(p_2) \rightarrow e^-(p_1) + \gamma(\hbar\,k)$$

dan geldt voor de vierimpulsen de behoudswet

$$p_2 = p_1 + \hbar\,k \quad \text{met} \quad p_i = \left(\frac{E_i}{c}, \vec{p}_i\right) \quad k = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right)$$

Verder zijn alle deeltjes reeël als aan de volgende voorwaarde voldaan is

$$p_1^2 = p_2^2 = m^2\,c^2 \qquad \hbar^2\,k^2 = 0$$

$$\text{met de notatie} \quad p\,q = p^{\mu} q_{\mu} = p_0\,q_0 - \vec{p} \cdot \vec{q}$$

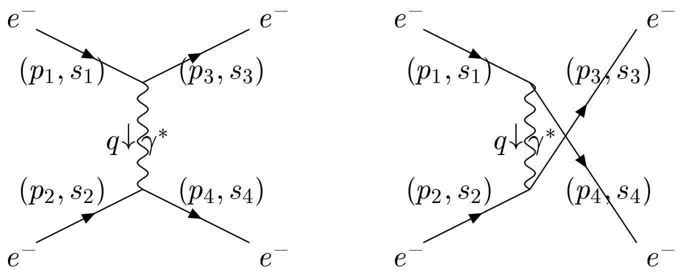

Figure 1: $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$

We kunnen dan afleiden

$$0 = \hbar^2 \, k^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 \, p_2 = 2 \, m \, c^2 - 2\frac{E_1 \, E_2}{c^2} + 2 \, \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2$$

$$\text{met} \quad \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = 2 \, |\vec{p}_1||\vec{p}_2| \, \cos\theta \quad |\vec{p}_i| \, c = \sqrt{E_i^2 - m^2 \, c^4}$$

Hieruit volgt

$$\cos\theta = \frac{E_1 \, E_2 - m^2 \, c^4}{\sqrt{E_1^2 - m^2 \, c^4}\sqrt{E_2^2 - m^2 \, c^4}} > 1$$

Er is geen reële hoek θ die hieraan voldoet dus kan dit verval waarbij alle drie deeltjes reeël zijn niet voorkomen.

9.3 De twee Feynmandiagrammen voor elektron-elektronverstrooiing (Möllerverstrooiing) zijn te vinden in Figure 1.

9.4 De twee Feynmandiagrammen voor paarcreatie in een uitwendig electromagnetisch veld, wat door een oneindig zware kern wordt gegeven, zijn te vinden in Figure 2.

9.5 Twee identieke fermionen worden door een antisymmetrische golffunctie beschreven. Het nn en pp systeem bevinden zich in een isospin $I = 1$-toestand wat symmetrisch is. Dit betekent dat het overige deel dat uit het product van de spingolffunctie en ruimtelijk deel bestaat antisymmetrisch moet zijn. Verder is gegeven dat de spin $S = 1$ en $S = 0$ toestand respectievelijk symmetrisch en antisymmetrisch is.

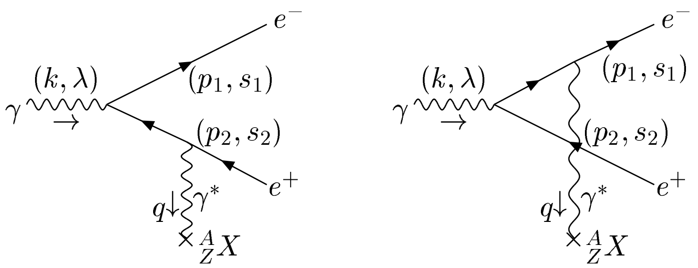

Figure 2: $\gamma +^A_Z X \rightarrow^A_Z X + e^+ + e^-$

Het ruimtelijke deel is symmetrisch voor even baanimpuls moment en antisymmetrisch voor oneven baanimpulsmoment. Dus we hebben

$$l = \text{even} \quad \rightarrow \quad S = 0$$

$$l = \text{oneven} \quad \rightarrow \quad S = 1$$

Voor het nn en pp systeem zijn de vogende toestanden toegestaan (notatie ${}^{2S+1}L_J$ of J^P)

$$\begin{aligned} S = 0 \quad &\rightarrow \quad {}^1S_0\,(0^+) \quad {}^1D_2\,(2^+) \\ S = 1 \quad &\rightarrow \quad {}^3P_0\,(0^-) \quad {}^3P_1\,(1^-) \quad {}^3P_2\,(2^-) \\ & \qquad\; {}^3F_2\,(2^-) \quad {}^3F_3,(3^-) \quad {}^3F_4\,(4^-) \end{aligned} \tag{35}$$

Het pn systeem bestaat uit niet identieke fermionen. Het Pauliverbod gaat niet meer op dus kan de totale golffunctie ook symmetrisch zijn. Behalve de toestanden in (35) kunnen nog de volgende voorkomen

$${}^3S_1\,(1^+) \quad {}^1P_1\,(1^-) \quad {}^3D_1\,(1^+) \quad {}^3D_2\,(2^+) \quad {}^3D_3\,(3^+) \quad {}^1F_3\,(3^-)$$

De enige twee toestanden die 1^+ hebben zijn $3S_1$ en ${}^3D_1$. Dit zijn de toestanden waarin het deuteron d $({}^2_1H)$ zit

9.6 Gegeven zijn twee elektrische dipolen met ladingen q_1 en q_2. De afstand tussen $+q_i$ en $-q_i$ wordt gegeven door de vector $\vec{a}_i$ $(i = 1, 2)$. De vector $\vec{a}_i$ staat naar de positieve lading gericht. De afstand tussen de middelpunten van de dipolen is gelijk aan r. De vector $\vec{r}$ staat gericht van dipool 1 naar dipool 2. het dipoolmoment wordt gegeven door $\vec{p}_i = q_i \vec{a}_i$. De vier ladingen oefenen een kracht op elkaar uit die door de volgende potentiaal wordt beschreven

$$
\begin{aligned}
U(r) &= \sum_{i=1}^{4} U_i(r) \\
U_1(r) &= -\frac{q_1\, q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - (\vec{a}_1 + \vec{a}_2)/2|} \\
U_2(r) &= \frac{q_1\, q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - (\vec{a}_1 - \vec{a}_2)/2|} \\
U_3(r) &= \frac{q_1\, q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} + (\vec{a}_1 - \vec{a}_2)/2|} \\
U_1(r) &= -\frac{q_1\, q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} + (\vec{a}_1 + \vec{a}_2)/2|}
\end{aligned} \tag{36}
$$

Verder geldt voor electrische dipoolmomenten dat $|\vec{r}| \gg |\vec{a}_i|$. Met behulp van de Taylorontwikkeling

$$
f(x) = (a + b\,x + c\,x^2)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{b}{2\,a^{3/2}}\,x + \left(\frac{3\,b^2}{8\,a^{5/2}} - \frac{c}{2\,a^{3/2}}\right) x^2
$$

$$
+ \cdots
$$

krijgen we de volgende reeksontwikkelingen voor de noemers in de potentiële energie

$$
\frac{1}{|\vec{r} - (\vec{a}_1 + \vec{a}_2)/2|} = \left(r^2 - \vec{r} \cdot (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) + \frac{1}{4}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)^2\right)^{-1/2}
$$

$$
= \frac{1}{r} + \frac{1}{2}\frac{\vec{r} \cdot (\vec{a}_1 + \vec{a}_2)}{r^3} + \frac{1}{8}\left\{3\,\frac{(\vec{r} \cdot (\vec{a}_1 + \vec{a}_2))^2}{r^5} - \frac{(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)^2}{r^3}\right\}
$$

$$
\frac{1}{|\vec{r} - (\vec{a}_1 - \vec{a}_2)/2|} = \left(r^2 - \vec{r} \cdot (\vec{a}_1 - \vec{a}_2) + \frac{1}{4}(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2\right)^{-1/2}
$$

$$
= \frac{1}{r} + \frac{1}{2}\frac{\vec{r} \cdot (\vec{a}_1 - \vec{a}_2)}{r^3} + \frac{1}{8}\left\{3\,\frac{(\vec{r} \cdot (\vec{a}_1 - \vec{a}_2))^2}{r^5} - \frac{(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2}{r^3}\right\}
$$

$$\frac{1}{|\vec{r} + (\vec{a}_1 - \vec{a}_2)/2|} = \left(r^2 + \vec{r}\cdot(\vec{a}_1 - \vec{a}_2) + \frac{1}{4}(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2\right)^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{r} - \frac{1}{2}\frac{\vec{r}\cdot(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)}{r^3} + \frac{1}{8}\left\{3\,\frac{(\vec{r}\cdot(\vec{a}_1 - \vec{a}_2))^2}{r^5} - \frac{(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2}{r^3}\right\}$$

$$\frac{1}{|\vec{r} + (\vec{a}_1 + \vec{a}_2)/2|} = \left(r^2 + \vec{r}\cdot(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) + \frac{1}{4}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)^2\right)^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{r} - \frac{1}{2}\frac{\vec{r}\cdot(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)}{r^3} + \frac{1}{8}\left\{3\,\frac{(\vec{r}\cdot(\vec{a}_1 + \vec{a}_2))^2}{r^5} - \frac{(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)^2}{r^3}\right\}$$

Invullen van bovenstaande reeksontwikkelingen in (35) levert

$$U(r) = \frac{q_1\,q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left[-3\,\frac{(\vec{r}\cdot\vec{a}_1)\,(\vec{r}\cdot\vec{a}_2)}{r^5} + \frac{\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2}{r^3}\right]$$

$$= -\frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^3}\left[3\,\frac{(\vec{p}_1\cdot\vec{r})\,(\vec{p}_2\cdot\vec{r})}{r^2} - (\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2)\right] \tag{37}$$

De bovenstaande uitdrukking kunnen we herschrijven. definieer de spoorloze symmetrische tensoren

$$R_{ij} = r_i\,r_j - \frac{1}{3}\,\delta_{ij}\,r^2 \qquad P_{ij} = \frac{1}{2}(p_{1i}\,p_{2j} + p_{1j}\,p_{2i}) - \frac{1}{3}\,\delta_{ij}(\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2)$$

$$\text{met} \quad R_{ij} = R_{ji} \quad P_{ij} = P_{ji} \quad \sum_{i=1}^{3} R_{ii} = 0 \quad \sum_{i=1}^{3} P_{ii} = 0$$

zodat

$$U(r) = -\frac{3}{4\,\pi\,\varepsilon\,r^5}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} R_{ij}\,P_{ij}$$

De potentiële energie in (36) kan in bolcoördinaten worden uitgedrukt

$$\vec{r} = r\,(0,0,1) \qquad \vec{p}_1 = p_1\,(\sin\theta_1, 0, \cos\theta_1)$$

$$\vec{p}_2 = p_2\,(\cos\phi\,\sin\theta_2, \sin\phi\,\sin\theta_2, \cos\theta_2)$$

$$\rightarrow \quad U(r) = -\frac{p_1\,p_2}{4\,\pi\,\varepsilon\,r^3}\,[2\,\cos\theta_1\,\cos\theta_2 - \cos\phi\,\sin\theta_1\,\sin\theta_2]$$

10.1 Uit Fig. 10.7 op bldz. 201 in het boek maken we op dat voor grote impulsen de totale werkzame doorsnede gelijk is aan $\sigma = 20$ mb $= 2.10^{-20}$ m^2. De deeltjesdichtheid n in waterstof $A' = 1$ en $\rho = 71$ kg/m^3 wordt gegeven door

$$n = \rho \frac{N_A}{A'} \quad \text{zie bldz. 36 in het boek}$$

zodat de gemiddelde vrije weglengte λ (formule (2.15) op bldz. 34 in het boek) gelijk is aan

$$\lambda = \frac{1}{n\,\sigma} = \frac{A'}{\rho\, N_A\, \sigma} = 11,7\,\mathrm{m}$$

10.2 De Q-waarde van een reactie is gegeven door het verschil tussen de som over de massa's in de begintoestand en de som van de massa's in de eindtoestand

$$Q = \sum_{k=1}^{n_i} m_k\, c^2 - \sum_{k=1}^{n_f} m_k\, c^2$$

waarbij n_i en n_f respectievelijk het aantal deeltjes in begin- en eindtoestand voorstelt. De resultaten zijn (De massa's van de deeltjes staan tussen haakjes aangegeven)

$$\pi^-(139,6) + p(938,3) \to K^0(497,7) + \Lambda^0(1115,6) \qquad Q = -535,4 \text{ MeV}$$

$$K^-(493,7) + p(938,3) \to \pi^0(135,0) + \Sigma^0(1192,5) \qquad Q = 104,5 \text{ MeV}$$

$$K^-(493,7) + p(938,3) \to K^0(497,7) + \Xi^0(1314,9) \qquad Q = -380,6 \text{ MeV}$$

$$p(938,3) + p(938,3) \to K^+(493,7) + \Sigma^+(1189,4) + n(939,6) \qquad Q = -746,1 \text{ MeV}$$

$$\Xi^-(493,7) + p(938,3) \to \Lambda^0(1115,6) \qquad Q = 28,4 \text{ MeV}$$

$$\pi^-(139,6) + p(938,3) \to K^0(497,7) + \bar{K}^0(497,7) + n(939,6) \qquad Q = -857,0 \text{ MeV}$$

$$K^-(493,7) + p(938,3) \to K^+(493,7) + K^0(497,7) + \Omega^-(1672,5) \qquad Q = -1231,9 \text{ MeV}$$

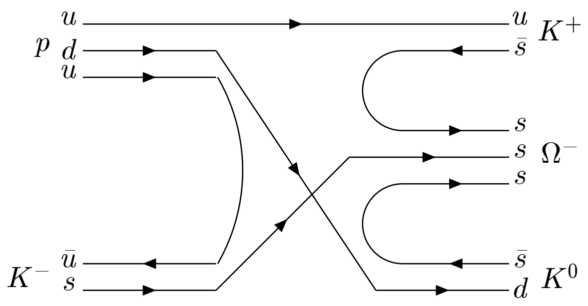

Figure 3: $K^- + p \rightarrow K^+ + K^0 + \Omega^-$

De quarkinhoud van het laatste proces is gegeven door

$$p = |u\, u\, d\rangle \quad K^- = |\bar{u}\, s\rangle \quad K^+ = |\bar{s}\, u\rangle \quad K^0 = |\bar{s}\, d\rangle \quad \Omega^- = |s\ s\, s\rangle$$

Het quarklijnendiagram wat bij dit proces hoort is gegeven in Figure 3.

10.3 De reactie (d) is verboden voor sterke wisselwerking vanwege het feit dat strangeness S niet behouden is

$$\pi^-(S = 0) + p(S = 0) \rightarrow K^-(S = -1) + \Sigma^+(S = -1)$$

De reactie (f) is verboden omdat lading Q niet behouden is

$$\bar{p}(Q = -1) + p(Q = 1) \rightarrow \pi^+(Q = 1) + \pi^+(Q = 1) + \pi^-(Q = -1)$$
$$+\pi^-(Q = -1) + \pi^+(Q = 1)$$

De reactie (h) is verboden omdat baryongetal B niet behouden is

$$K^-(B = 0) + p(B = 1) \rightarrow \Sigma^+(B = 1) + n(B = 1) + \pi^-(B = 0)$$

10.4 Hadronen zijn een verzamelnaam voor mesonen en baryonen. Zij bestaan uit quarks en zijn de enige deeltjes die sterke wisselwerkingen ondergaan. Zij ondergaan ook zwakke en electromagnetische wisselwerkingen. De laatste twee wisselwerkingen zijn ook van toepassing op leptonen. Met de laatste worden de tauonen, muonen en elekronen met hun neutrino's inclusief hun anti-deeltjes aangeduid. Leptonen gaan geen sterke wisselwerking aan. Met bosonen worden alle heeltallige spin deeltjes aangeduid terwijl de halftallige spindeeltjes de fermionen voorstellen. Quarks zijn fermionen vandaar dat de baryonen die uit drie quarks bestaan ook een halftallige spin hebben. De mesonen daarentegen zijn bosonen omdat zij door een quark anti-quark toestand beschreven worden. Merk op dat alle leptonen spin half hebben en dus fermionen zijn.

(a) De quarkinhoud van de delta-resonanties wordt gegeven door

$$\Delta^- = \mid d\,d\,d\rangle \quad \Delta^0 = \mid u\,d\,d\rangle \quad \Delta^+ = \mid u\,u\,d\rangle \quad \Delta^{++} = \mid u\,u\,u\rangle$$

(b) De delta-resonanties hebben $L = 0$ en $J = 3/2$ dus hun spin is $S = 3/2$. Verder bevinden ze zich in een isospin toestand $I = 3/2$. De quark-golffuncties die deze quantumgetallen $L = 0, S = 3/2, I = 3/2$ beschrijven zijn symmetrisch dus is de productgolffunctie ook symmetrisch. Dit is echter in strijd met het Pauli- principe dat eist dat quarks (fermionen!) alleen door een antisymmetrische golffunctie beschreven mag worden. Dit probleem kan alleen worden opgelost door aan te nemen dat naast bovengenoemde quantumgetallen nog een vierde quantumgetal aanwezig en wel het getal "kleur". Als de quarks door een antisymmetrische kleurgolffunctie wordt beschreven wordt de totale golffunctie antisymmetrisch.

(c) De spin van de quarks ligt vast deze is $S = 1/2$ echter hun relatief baanimpulsmoment L kan onbeperkt toenemen. Dus om een hogere $J = L + S$ te krijgen moet men L vergroten.

(d) Voor het baanimpulsmoment wordt de pariteit gegeven door $P = (-1)^l$. Als L toeneemt zal de pariteit telkens van teken wisselen.

Bij het verval $\Delta^0 \rightarrow p + \pi^-$ zijn alle quantumgetallen behouden dus dit verval vindt plaats onder invloed van de sterke wisselwerking. Bij het verval $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$ is strangeness niet behouden dus moet het verval zwak zijn. Voor de vervalsbreedten geldt de regel $\Gamma_{sterk} \gg \Gamma_{el.mag} \gg \Gamma_{zwak}$ omdat Γ evenredig is met het kwadraat van de koppelingsconstante. Deze laatste is het grootst voor de sterke wisselwerking en het kleinst voor de zwakke kracht. Het electromagnetisme ligt er tussen in. Aangezien de levensduur van het instabiele deeltje gegeven wordt door $\tau = \hbar/\Gamma$ concluderen we uit het bovenstaande $\tau_{sterk} \ll \tau_{el.mag} \ll \tau_{zwak}$. Vandaar dat $\tau_\Delta \sim 10^{-23}$ s $\ll \tau_\Lambda = 2,6.10^{-10}$ s.

10.5 Experimentele evidentie voor het bestaan van quarks

(a) Voorspelling van de massa's van de hadronen in het bijzonder van de resonantie $\Omega^-(1672,5)$.

(b) Diep inelstische verstrooiing van leptonen aan hadronen in het bijzonder het proces $e^- + p \to e^- +' hadronen'$ waarbij de zwaartepuntsenergie en de impulsoverdracht zeer groot zijn (zie hoofdstuk 10.10 en Fig. 10.18). De werkzame doorsnede kan alleen verklaard worden door aan te nemen dat in het proton puntladingen zijn die een fractionele lading hebben. Dit wijst op het bestaan van quarks.

De quarkinhoud van de gevraagde hadronen luidt

$$\pi^+ = |\bar{d}u\rangle \quad \pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}|\bar{d}\,d - \bar{u}\,u\rangle \quad K^+ = |\bar{s}\,u\rangle \quad K^- = |\bar{u}\,s\rangle$$

$$\bar{K}^0 = |\bar{d}\,s\rangle \quad K^0 = |\bar{s}, d\rangle \quad n = |u\,d\,d\rangle \quad p = |u\,u\,d\rangle$$

$$\Lambda^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}|(u\,d - d\,u)\,s\rangle$$

In de processen

$$K^- + p \to \bar{K}^0 + n \quad K^- + p \to \Lambda^0 + \pi^0 \quad K^0 + p \to \bar{K}^+ + n$$

zijn alle quantumgetallen behouden inclusief strangeness. Vandaar dat zij alle via de sterke wisselwerking verlopen. Strangeness is niet behouden in het proces $K^0(S=1) + n(S=0) \to \Lambda^0(S=-1) + \pi^0(S=0)$ vandaar dat dit proces zwak is.
Volgens het additieve quarkmodel zijn de volgende totale werkzame doorsnedes gegeven door

$$\sigma(\bar{K}^0\,p) = 2\,\sigma(u\,d) + 2\,\sigma(u\,s) + \sigma(d\,d) + \sigma(d\,s)$$

$$\sigma(\pi^+\,p) = 2\,\sigma(u\,u) + 3\,\sigma(u\,d) + \sigma(d\,d)$$

$$\sigma(p\,p) = 4\,\sigma(u\,u) + 4\,\sigma(u\,d) + \sigma(d\,d)$$

De werkzame doorsnede $\sigma(\Lambda^0\, p)$ $(\Lambda^0 = |u\,d\,s\rangle)$ wordt gegeven door

$$\sigma(\Lambda^0\, p) = 2\,\sigma(u\,u) + 3\,\sigma(u\,d) + 2\,\sigma(u\,s) + \sigma(d\,d) + \sigma(d\,s)$$

$$= \sigma(\bar{K}^0\, p) - \sigma(\pi^+\, p) + \sigma(p\,p) = 20 - 24 + 39 = 35\,\mathrm{mb} \qquad (38)$$

De werkzame doorsnede $\sigma(\Xi^-\, p)$ $(\Xi^- = |d\,d\,s\rangle)$ wordt gegeven door

$$\sigma(\Xi^-\, p) = 2\,\sigma(u\,d) + 4\,\sigma(u\,s) + \sigma(d\,d) + 2\,\sigma(d\,s)$$

Met behulp van (37) kunnen we dan afleiden

$$\sigma(\Xi^-\, p) - 2\,\sigma(\Lambda^0\, p) = -4\,\sigma(u\,u) - 4\,\sigma(u\,d) - \sigma(d\,d) = -\sigma(p\,p)$$

zodat

$$\sigma(\Xi^-\, p) = 2\,\sigma(\Lambda^0\, p) - \sigma(p\,p) = 70 - 39 = 31\mathrm{mb}$$

10.6 De quarkinhoud van de mesonen die $j^P = 0^-$ hebben staat in het overzicht vermeld die op het college is uitgedeeld. Hetzelfde geldt voor de mesonen die $j^P = 1^-$ hebben. De laatste mesonen worden verkregen door i.p.v. $S = 0$ (spin) het quantumgetal $S = 1$ voor het $\bar{q}\,q$-systeem te nemen. Verder geldt dat de pariteit gelijk is aan $P = (-1)^{l+1}$ De toestand $j^P = 0^-$ heeft als quantumgetallen $L = 0, S = 0$. De eerst aangeslagen toestand wordt verkregen door $L = 1, S = 0 \to J = 1$ te nemen. Hieruit volgt $j^P = 1^+$. De toestand $j^P = 1^-$ heeft als quantumgetallen $L = 0, S = 1$. De eerst aangeslagen toestanden worden gegeven door $L = 1, S = 1 \to J = 0, 1, 2$ ofwel $j^P = 0^+$, $j^P = 1^+$ en $j^P = 2^+$.
Het dominante vervalskanaal wordt gegeven door $\rho^+ \to \pi^+ + \pi^0$. Het verval $\rho^0 \to \pi^0 + \pi^0$ komt niet voor omdat dit verboden is vanwege Bose-Einstein statistiek. Dit kan men als volgt inzien. Uit behoud van totaal impulsmoment in het verval volgt dat het $\pi^0\,\pi^0$-systeem $J = 1$ heeft omdat het ρ-meson $J = 1$ heeft. Verder heeft het π^0-meson spin $S = 0$. Vandaar dat het baanimpulsmoment van het $\pi^0\,\pi^0$-systeem gelijk aan $L = 1$ is zodat het ruimtelijke deel door een antisymmetrische golffunctie wordt beschreven. In het college is afgeleid dat het $\pi^0\,\pi^0$-systeem isospin $I = 0$ of $I = 2$ kan hebben. Echter beide isospintoestanden zijn symmetrisch onder verwisseling van de pionen. Hieruit volgt dat de totale golffunctie, dat een product van het ruimelijke deel en het isospin deel is, antisymmetrisch is onder verwisseling

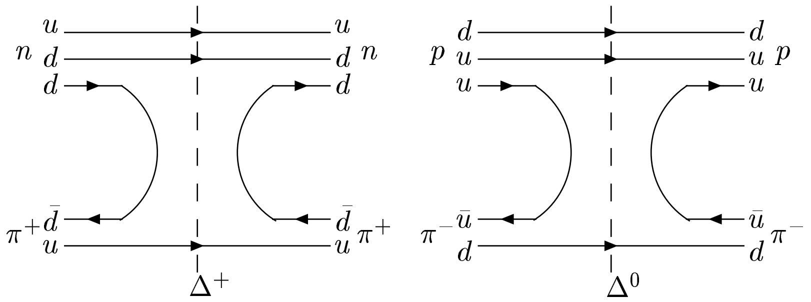

Figure 4: De reacties $\pi^+ + n \rightarrow \Delta^+ \rightarrow \pi^+ + n$ en $\pi^- + p \rightarrow \Delta^0 \rightarrow \pi^- + p$

van de pionen hetgeen in strijd is met de Bose-Einstein statistiek.
Het belanrijkste vervalskanaal van het ρ^0-meson is $\rho^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ waarbij het $\pi^+ \pi^-$-systeem $I = 1$ heeft wat door een antisymmetrische isospin-golffunctie wordt beschreven. Verder is de isospin van het ρ^0-meson ook gelijk aan $I = 1$ zodat het verval sterk is. De levensduur van het ρ^0-meson is kort en van de orde $\tau \sim 10^{-24}$ s. Het ρ^0-meson wordt geproduceerd in de reactie

$$e^- + e^+ \rightarrow \rho^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$$

waarbij het als een resonantie verschijnt. Dit betekent dat in de werkzame doorsnede een piek verschijnt bij de zwaartepuntsenergie $W = m_\rho c^2$. Deze piek is klokvormig en heeft een breedte Γ_ρ die gemeten kan worden. De levensduur τ_ρ volgt uit $\tau_\rho = \hbar/\Gamma_\rho$.

10.7 Het antwoord op de vragen ladingssymmetrie en ladingsonafhankelijkheid kan men vinden op bldz. 169 in het boek.

(i) In de reacties $\pi^+ n$ en $\pi^- p$ komen resonanties voor die gegeven worden door respectievelijk de instabiele deeltjes Δ^+ en Δ^0. Vandaar dat $\sigma(\pi^+ n) = \sigma(\pi^- p)$. Echter in het kanaal $K^+ n$ komt geen resonantie voor in tegenstelling tot het kanaal $K^- p$. In het laatste verschijnt de resonantie Σ^{*0}. Vandaar dat $\sigma(K^- p) > \sigma(K^+ n)$. Dit kan men met behulp van het quarkmodel afleiden. Merk op dat $m_{\Sigma^{*0}} > m_p + m_{K^-}$.

(ii) Zoals in opgave 10.6 is uitgelegd, is het verval $\rho^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ sterk. Het verval $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ is daarentegen zwak omdat de strangeness van K^0 gelijk is aan $S = 1$ terwijl de pionen $S =$

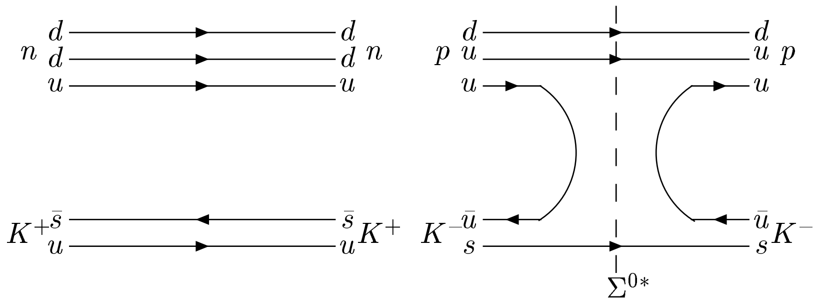

Figure 5: De reacties $K^+ + n \to K^+ + n$ en $K^- + p \to \Sigma^{0*} \to K^- + p$

0 hebben. Het verband tussen de sterkte van het verval en de levensduur is gegeven aan het eind van opgave 10.4.

(iii) Het verval van het π^+-meson is zwak namelijk $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$. Daarentegen is het verval van het π^0-meson is electromagnetisch. Hier is de vervalswijze $\pi^0 \to \gamma + \gamma$. Hieruit volgt $\tau_{\pi^+} \gg \tau_{\pi^0}$.

De deeltjesdichtheid in ijzer n wordt gegeven door (zie bldz. 36 in het boek)

$$n = \rho \frac{N_A}{A'} = 8,52.10^28$$

met $\rho = 7900$ kg/m^3 en $A' = 55,85$. De werkzame doorsnede is $\sigma = 5.10^{-29}$ m^2. De verhouding van de deeltjes voor en na de passage door ijzer (zie (2.16) op bldz. 34 in het boek) is gelijk aan

$$\frac{N}{N_0} = e^{-n\,\sigma\,x} = \frac{1}{1000} \quad \to \quad x = 1,62\,\mathrm{m}$$

waarbij x de dikte is van ijzer. Pionen gaan sterke wisselwerkingen aan met de nucleonen in ijzer. Echter muonen zijn leptonen en deze hebben alleen electromagnetische of zwakke wisselwerkingen. Deze laatste wisselwerkingen leiden tot kleinere werkzame doorsnedes. Bij dezelfde x zal dus de demping veel kleiner zijn dan 1000.

10.8 De diagrammen die het mechanisme voorstellen waardoor leptonen en hadronen in electron-positron botsingen worden gecreëerd zijn op het college behandeld.

De lichtsterkte of luminositeit L van een bundel wordt gegeven door de formule

$$L = \frac{N_1 \, N_2}{O} \, \nu$$

waarbij N_1 en N_2 het aantal bunches in respectievelijk de electronbundel en positronbundel voorstelt. Gegeven is dat $N_1 = N_2 = 5.10^{11}$ en botsingsfrequentie ν is gelijk aan $\nu = 10^6 \ \mathrm{s}^{-1}$. De straal van de bunch is $r = 10^{-3}$ m dus zijn oppervlak is $O = \pi \, r^2 = 3,14.10^{-6} \ \mathrm{m}^2$. Hieruit volgt dat $L = 7,96.10^{34} \ \mathrm{m}^{-2} \, \mathrm{s}^{-1}$. De werkzame doorsnede voor muonpaarproductie is gegeven door $\sigma = 1,4.10^{-37} \ \mathrm{m}^2$. Dus het aantal muonparen dat per seconde wordt geproduceerd is gelijk aan $L \, \sigma = 1,11.10^{-2}$. Bij een zwaartepuntsenergie van $W = 8$ GeV kunnen alleen de volgende quark anti-quark paren worden geproduceerd $\bar{u} \, u$, $\bar{d} \, d$, $\bar{s} \, s$ en $\bar{c} \, c$. De bottom en top quarks hebben een te grote massa om geproduceerd te worden omdat aan de voorwaarde $W \geq 2 \, m_q \, c^2$ niet is voldaan. Uit de verhouding R op bldz. 212 in het boek volgt

$$R = \frac{\sigma_{had}}{\sigma_{\mu^+\mu^-}} = \frac{L \, \sigma_{had}}{L \, \sigma_{\mu^+\mu^-}} = 3 \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \right]$$

$$= \frac{10}{3}$$

$$\rightarrow \quad L \, \sigma_{had} = \frac{10}{3} \, L \, \sigma_{\mu^+\mu^-} = 3,72.10^{-2}$$

Dus het aantal hadronen dat per seconde wordt geproduceerd is gelijk aan $L \, \sigma = 3,72.10^{-2}$.

10.9 Gegeven is dat de totale breedte van $\psi(3097)$ gelijk is aan $\Gamma_{tot} = 0,063$ MeV. De partiële breedte van $\psi(3097)$ voor het verval in hadronen is $\Gamma_{had} = 0,82 \, \Gamma_{tot} = 0,0517$ MeV. Dit laatste kan worden beschreven door het proces

$$\psi \rightarrow g + g + g \tag{39}$$

met de formule

$$\Gamma_{\psi \rightarrow 3g} \equiv \Gamma_{tot} = \hbar \, \omega = \frac{2 \, \alpha_s^6 \, (\pi^2 - 9)}{9 \, \pi} \, m_c \, c^2 \tag{40}$$

met $m_c\,c^2 = 1650$ MeV. Hieruit volgt

$$\alpha_s^6 = \frac{9\,\pi\,\Gamma_{had}}{2\,(\pi^2-9)\,m_c\,c^2} = 5,09.10^{-4} \quad \rightarrow \quad \alpha_s = 0,28$$

Voor het verval

$$\psi \rightarrow g + g + \gamma \tag{41}$$

hebben we een photon meer en een gluon minder dan in proces (38). Dit levert ons een extra factor α maar ook een factor α_s minder dan in (39). De breedte voor proces (40) wordt dan

$$\Gamma_{\psi\rightarrow 2g+\gamma} = \frac{2\,\alpha_s^5\,\alpha\,(\pi^2-9)}{9\,\pi}\,m_c\,c^2 = \frac{\alpha}{\alpha_s}\,\Gamma_{\psi\rightarrow 3g} = 1,35.10^{-3}$$

De hoeveelheid hadronen dat per seconde wordt geproduceerd in het verval (40) is gelijk aan

$$\omega = \frac{\Gamma_{\psi\rightarrow 2g+\gamma}}{\hbar} = 2.10^{18}$$

met $\hbar = 6,582.10^{-22}$ MeV s. De vertakkingsverhouding wordt gegeven door

$$B_{\psi\rightarrow 2g+\gamma} = \frac{\Gamma_{\psi\rightarrow 2g+\gamma}}{\Gamma_{tot}} = 2,14.10^{-2}$$

Dit is ongeveer 2,1 %.

10.10 De hyperfijnopsplitsing ontstaat ten gevolge van de magnetische dipool-dipool wisselwerking tussen de twee deeltjes in positronium (elektron-positron gebonden toestand) en waterstof (elektron-proton gebonden toestand). Het verschil in energieniveau is

$$\text{positronium} \qquad \Delta\,E(1^3S_1 - 1^1S_0) = \frac{7}{12}\,\alpha^4\,m_e\,c^2$$

$$\text{waterstof} \qquad \Delta\,E(1^3S_1 - 1^1S_0) = \frac{8}{3}\,\alpha^4(1+\kappa_p)\left(\frac{m_e}{m_p}\right)\,m_e\,c^2$$

De verhouding tussen positronium en waterstof wordt dus gegeven door

$$\frac{7}{32}\left(\frac{m_p}{m_e}\right)\frac{1}{1+\kappa_p} = 144$$

met $\kappa_p = 1,79$, $m_p\,c^2 = 938,3$ MeV en $m_e\,c^2 = 0,511$ MeV. Merk op dat voor waterstof de opsplitsing gelijk is aan $\Delta\,E = 5,87.10^{-12}$ MeV hetgeen leidt tot de golflengte

$$\lambda = \frac{h\,c}{\Delta\,E} = 21,1\,\mathrm{cm}$$

Dit is de beroemde lijn die in de astronomie wordt gemeten.

10.11 In het algemeen geldt dat voor een twee deeltjessysteem het energieniveau gegeven wordt door

$$E_n = -\frac{\alpha^2\,\mu\,c^2}{2\,n^2} \quad \text{met} \quad \mu = \frac{m_1\,m_2}{m_1 + m_2}$$

waarbij μ de gereduceerde massa is. Voor positronium en waterstof worden de energieniveaus gegeven door

$$\text{positronium} \quad m_1 = m_2 = m_e \qquad \mu = \frac{1}{2}\,m_e \quad \rightarrow \quad E_n = -\frac{\alpha^2\,m_e\,c^2}{4\,n^2}$$

$$\text{waterstof} \quad m_1 \rightarrow \infty \quad m_2 = m_e \qquad \mu = m_e \quad \rightarrow \quad E_n = -\frac{\alpha^2\,m_2\,c^2}{2\,n^2}$$

10.12 De quarktoestanden van de D_s-mesonen worden gegeven door $D_s^+ = |\bar{s}\,c\rangle$ en $D_s^- = |\bar{c}\,s\rangle$. De isospin van de D_s-mesonen is gelijk aan $I = 0$ omdat de charm en de strange quark $I = 0$ hebben. Het D_s^*-meson heeft $I = 0$ om dezelfde reden daar het alleen uit s- en c-quarks is opgebouwd. Het verval $D_s^*(I = 0) \rightarrow D_s(I = 0) + \pi^0(I = 1)$ is verboden onder sterke wisselwerkingen vanwege het feit dat isospin niet behouden is.

10.13 In sterke wisselwerkingen is isospin behouden in de electromagnetische en zwakke wisselwerkingen is deze grootheid niet behoude.

(a) De massa's kunnen verklaard worden door naar de quarkinhoud te kijken. Deze ziet voor de vier deeltjes er als volgt uit

$$\pi^+ = |\bar{d}\,u\rangle \quad \pi^- = |\bar{u}\,d\rangle \quad \Sigma^+ = |u\,u\,s\rangle \quad \Sigma^- = |d\,d\,s\rangle$$

De massas van deeltjes en antideeltjes zijn hetzelfde vandaar $m_u = m_{\bar{u}}$, $m_d = m_{\bar{d}}$. Echter $m_u \neq m_d$. Hieruit volgt

$$m_{\pi^+} = m_{\pi^-} \quad m_{\Sigma^+} \neq m_{\Sigma^-}$$

(b) Het verval $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$ is electromagnetisch maar het verval $\Lambda^0(S=-1) \rightarrow \pi^-(S=0) + p(S=0)$ is zwak omdat strangeness S niet behouden is. Omdat zwakke krachten zwakker zijn dan electromagnetische wisselwerkingen geldt $\tau_{\Lambda^0} \gg \tau_{\Sigma^0}$ (zie eind opgave 10.4).

(c) Het proces $K^+(S=1) + p(S=0) \rightarrow \Sigma^+(S=-1) + K^+(S=1)$ is zwak omdat strangeness niet behouden is. Uit de quarkinhoud gegeven door

$$K^+ = |\bar{s}\, u\rangle \quad p = |u\, u\, d\rangle \quad \Sigma^+ = |u\, u\, s\rangle$$

kinnen we opmaken dat een d-quark in een s-quark overgaat. Dit kan alleen door twee W-bosonen uit te wisselen zodat het proces nauwelijks observeerbaar is.

12.1 De processen dienen als volgt geschreven te worden

$\pi^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu_e$	$\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$
$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$	$\nu_e +^{37}_{17} Cl \rightarrow^{37}_{18} Ar + e^-$
$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$	$\nu_\mu + p \rightarrow \mu^- + p + \pi^+$
$K^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu_e$	$\nu_e + n \rightarrow e^- + p$
$\bar{K}^0 \rightarrow \pi^0 + e^- + \bar{\nu}_e$	${}^3_1H \rightarrow^3_2 He + e^- + \bar{\nu}_e$
$\Sigma^- \rightarrow n + \mu^- + \bar{\nu}_\mu$	$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$
$\Sigma^+ \rightarrow \Lambda^0 + e^+ + \nu_e$	$\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$
$D^0 \rightarrow K^- + \pi^0 + e^+ + \nu_e$	$\tau^- \rightarrow \pi^- + \pi^0 + \nu_\tau$

12.2 De Feynmandiagrammen zijn gegeven in Figure 6 t/m 11.

12.3 De Feynmandiagrammen zijn gegeven in Figure 12 t/m 15.

12.4 De controle dat aan de behoudswetten in de diagrammen van Fig. 12.4 op bldz. 287 in het boek voldaan is wordt aan de student overgelaten.

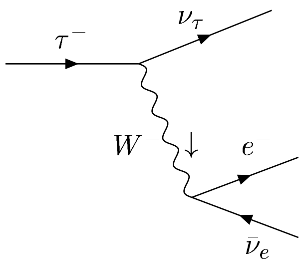

Figure 6: $\tau^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau$

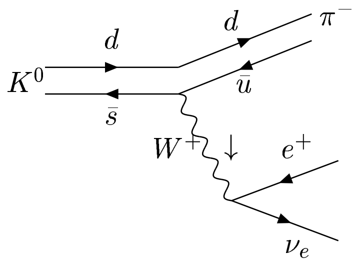

Figure 7: $K^0 \to \pi^- + e^+ + \nu_e$, $K^0 = |\bar{s}\, d\rangle$, $\pi^- = |\bar{u}\, d\rangle$

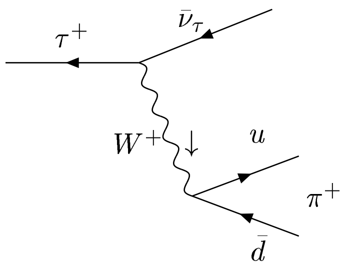

Figure 8: $\tau^+ \to \pi^+ + \bar{\nu}_\tau$, $\pi^+ = |\bar{d}\, u\rangle$

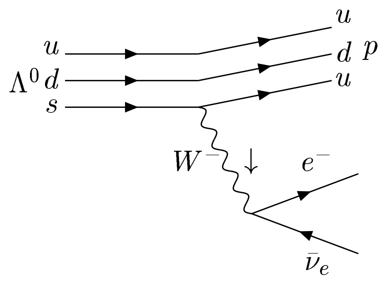

Figure 9: $\Lambda^0 \to p + e^+ + \nu_e$, $\Lambda^0 = |u\,d\,s\rangle$, $p = |u\,u\,d\rangle$

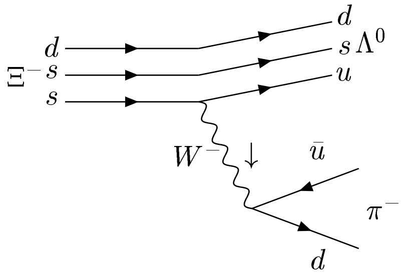

Figure 10: $\Xi^- \to \Lambda^0 + \pi^-$, $\Xi^- = |d\,s\,s\rangle$, $\Lambda^0 = |u\,d\,s\rangle$, $\pi^- = |\bar{u}\,d\rangle$

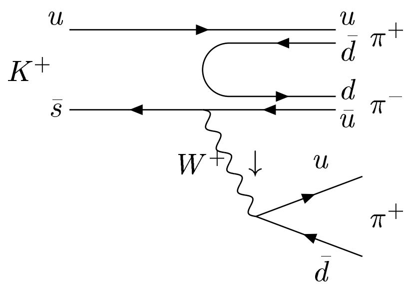

Figure 11: $K^+ \to \pi^+ + \pi^- + \pi^+$, $K^+ = |\bar{s}\,u\rangle$, $\pi^+ = |\bar{d}\,u\rangle$, $\pi^- = |\bar{u}\,d\rangle$, $\pi^+ = |\bar{d}\,u\rangle$

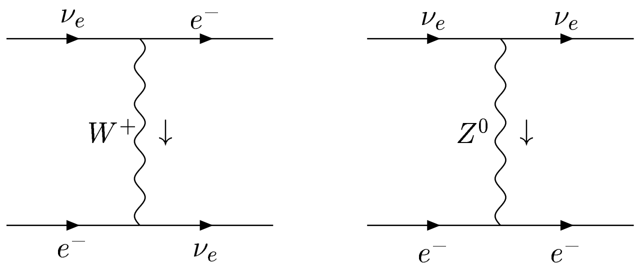

Figure 12: $\nu_e + e^- \to \nu_e + e^-$.

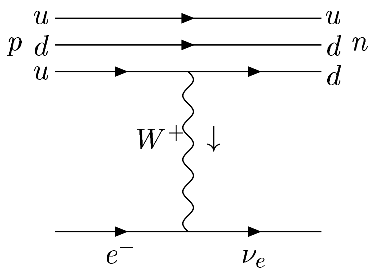

Figure 13: $e^- + p \to n + \nu_e$, $p = |u\,u\,d\rangle$, $n = |u\,d\,d\rangle$

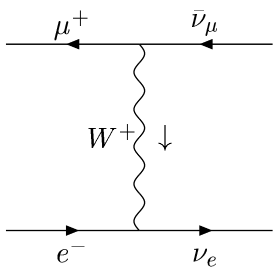

Figure 14: $\mu^+ + e^- \to \bar{\nu}_\mu + \nu_e$.

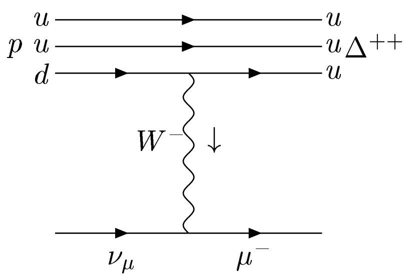

Figure 15: $\nu_\mu + p \to \mu^- + \Delta^{++}$, $p = |u\,u\,d\rangle$, $\Delta = |u\,u\,u\rangle$

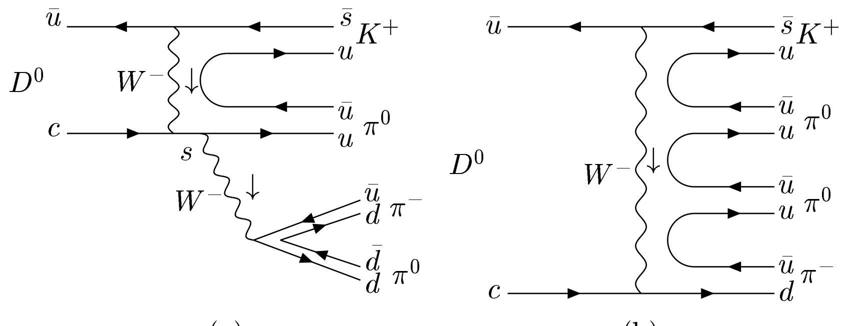

Figure 16: $D^0 \to K^+ + \pi^- + \pi^0 + \pi^0$, $D^0 = |\bar{u}\,c\rangle$, $K^+ = |\bar{s}\,u\rangle$, $\pi^- = |\bar{u}\,d\rangle$, $\pi^0 = |\bar{u}\,u\rangle$ of $\pi^0 = |\bar{d}\,d\rangle$

12.5 Zoals men in Figure 16b en 17b kan zien kunnen beide processen wel degelijk plaats vinden in eerste orde van de zwakke wisselwerking. Dit geldt niet voor de laatste twee processen in Figure 18 en 19. De laatste kunnen slechts plaats vinden in tweede orde. Merk op dat de ordegrootte hetzelfde is als het aantal W-bosonen.

13.1 In het overzicht over de hadronen en hun quarkinhoud, wat op het college is uitgedeeld, staat vermeld dat een quark-antiquark systeem dat spin s en baanimpulsmoment l heeft de ladingsconjugatie C gegeven wordt door $C = (-1)^{l+s}$. Deze eigenschap geldt voor ieder fermion-antifermion systeem dus in het bijzonder ook voor het electron-positron systeem dat positronium (afgekort Ps) wordt genoemd. Verder is

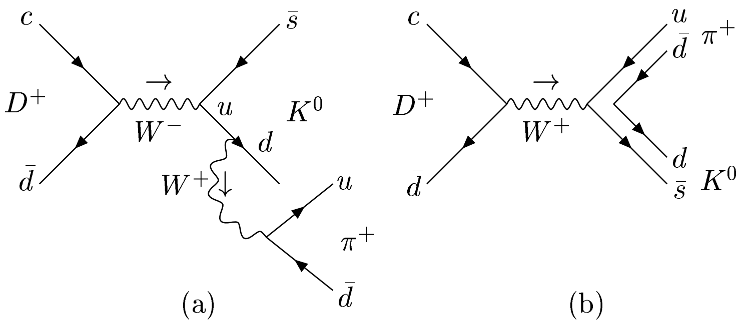

Figure 17: $D^+ \to K^0 + \pi^+$, $D^+ = |\bar{d}\, c\rangle$, $K^0 = |\bar{s}\, d\rangle$. $\pi^+ = |\bar{d}\, u\rangle$

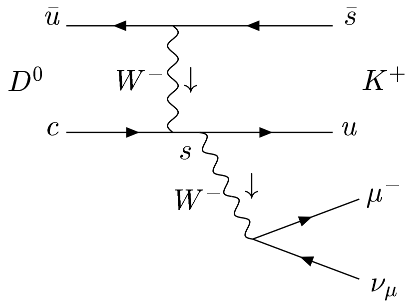

Figure 18: $D^0 \to K^+ + \mu^- + \bar{\nu}_\mu$, $D^0 = |\bar{u}\, c\rangle$, $K^+ = |\bar{s}\, u\rangle$,

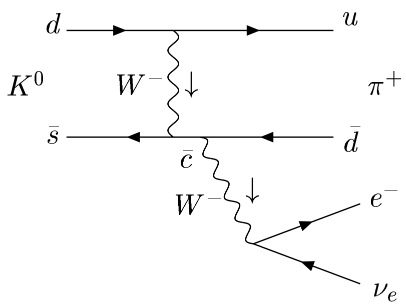

Figure 19: $K^0 \to \pi^+ + e^- + \bar{\nu}_e$, $K^0 = |\bar{s}\, d\rangle$, $\pi^+ = |\bar{d}\, u\rangle$,

$C\,|\gamma\rangle = -|\gamma\rangle$ dus $C\,|\gamma\,\gamma\rangle = |\gamma\,\gamma\rangle$. Het pion transformeert als $C\,|\pi^0\rangle = |\pi^0\rangle$ dus is ladingscongugatie in het proces $\pi^0 \to \gamma + \gamma$ behouden. De toestand $Ps(1^1S_0)$ heeft $s = 0$ en $l = 0$ dus $C = +$ m.a.w. $Ps(1^1S_0)$ kan in twee fotonen vervallen. In het geval van drie fotonen hebben we $C\,|\gamma\,\gamma\,\gamma\rangle = -|\gamma\,\gamma\,\gamma\rangle$. De toestand $Ps(1^3S_0)$ heeft $s = 1$ en $l = 0$ dus $C = -$ m.a.w. $Ps(1^3S_0)$ kan in drie fotonen vervallen. Merk op dat ladingsconjugatie een behouden grootheid is voor electromagnetische interacties. Verder is het verval van $Ps(1^3S_0)$ in één foton ook niet mogelijk omdat dit verboden is vanwege energie-impulsbehoud.

13.2 Het electrisch dipoolmoment $\vec{\mathrm{p}}$ van het neutron wordt gegeven door $\vec{\mathrm{p}} = \alpha\,\vec{\mathrm{S}}$ waarbij $\vec{\mathrm{S}}$ de spin van het neutron voorstelt. De energie U van dit dipoolmoment in het electrisch veld $\vec{\mathrm{E}}$ wordt gegeven door $\mathrm{U} = -\alpha\,\vec{\mathrm{S}}\cdot\vec{\mathrm{E}}$. Stel $\vec{\mathrm{r}}$ is een willekeurige vector dan transformmeert hij onder pariteit en tijdsomkeer als volgt

$$P\,\vec{\mathrm{r}} = -\vec{\mathrm{r}} \qquad P\,\mathrm{t} = \mathrm{t}$$

$$T\,\vec{\mathrm{r}} = \vec{\mathrm{r}} \qquad T\,\mathrm{t} = -\mathrm{t}$$

hierbij stellen P en T de pariteits- en tijdsoperatoren voor. Verder geldt

$$P\,\vec{\mathrm{E}} = -\vec{\mathrm{E}} \qquad T\,\vec{\mathrm{E}} = \vec{\mathrm{E}}$$

$$P\,\vec{\mathrm{S}} = \vec{\mathrm{S}} \qquad T\,\vec{\mathrm{S}} = -\vec{\mathrm{S}}$$

$$P\,\mathrm{U} = \mathrm{U} \qquad T\,\mathrm{U} = \mathrm{U} \tag{42}$$

Dit laatste volgt uit het feit dat de energie invariant moet zijn onder alle tranformaties. Dat $\vec{\mathrm{E}}$ zich hetzelfde gedraagt als $\vec{\mathrm{r}}$ is gemakkelijk in te zien. In het geval van $\vec{\mathrm{S}}$ weten we dat het op dezelfde wijze moet transformeren als het baanimpulsmoment $\vec{\mathrm{L}}$ aangezien we beide grootheden kunnen optellen. Voor een puntdeeltje wordt $\vec{\mathrm{L}}$ gegeven door

$$\vec{\mathrm{L}} = m\,\vec{\mathrm{r}} \times \frac{d\,\vec{\mathrm{r}}}{d\,\mathrm{t}}$$

Hieruit volgt

$$P\,\vec{\mathrm{L}} = \vec{\mathrm{L}} \qquad T\,\vec{\mathrm{L}} = -\vec{\mathrm{L}}$$

Dit verklaart de transformatie van $\vec{\mathrm{S}}$ onder pariteit en tijdsomkeer. Uit $\mathrm{U} = -\alpha \vec{\mathrm{S}} \cdot \vec{\mathrm{E}}$ volgt dat de energie zich transformeert als

$$P\,\mathrm{U} = -\mathrm{U} \quad T\,\mathrm{U} = -\mathrm{U}$$

hetgeen in strijd is met (41) hieruit volgt dat $\alpha = 0$. Alleen onder de gecombineerde transformatie P en T krijgen we $P\,T\,\mathrm{U} = \mathrm{U}$. Dus alleen als de interacties een pariteits- of tijdsomkeerbrekende term bevatten kan het neutron een electrisch dipoolmoment hebben.

13.3 (1) De reactie $n + p \to d + \gamma$ is electromagnetisch omdat een foton wordt uitgestraald (d is het deuteron wat een gebonden $p\,n$ toestand is).

(2) De reactie $\Xi^-(S = -2) \to \Lambda^0(S = -1) + \pi^-(S = 0)$ is zwak omdat strangeness S niet behouden is.

(3) De reactie $p + p \to \pi^+ + d$ is een sterke wisselwerking omdat alle quantumgetallen inclusief isospin behouden zijn.

(4) De reactie $D^+(S = 1) \to K^-(S = -1) + \pi^+(S = 0) + \pi^+(S = 0)$ is zwak omdat strangeness S niet behouden is. Ook charm C is niet behouden in $D^+(C = 1) \to K^-(C = 0) + \pi^+(C = 0) + \pi^+(C = 0)$.

(5) De reactie $K^-(S = -1) + p(S = 0) \to K^0(S = 1) + n(S = 0)$ is zwak omdat strangeness S niet behouden is.

(6) De reactie $\pi^- + p \to K^0 + \Lambda^0$ is sterk omdat alle quantumgetallen inclusief isospin behouden zijn.

(7) De reactie $e^+ + e^- \to W^+ + W^-$ is electrozwak omdat de begin- en eindtoestand aan elkaar gekoppeld worden door zowel het foton als een Z-boson.

(8) Het verval $Z^0 \to \mu^+ + \mu^-$ is zwak omdat het Z-boson een van de dragers van de zwakke wisselwerking is.

(9) Het verval $\Omega^-(B = 1) \to \bar{K}^0(B = 0) + K^-(B = 0)$ is verboden omdat het baryongetal B niet behouden is.

De verschillende wisselwerkingen worden gekarakteriseerd door de koppelingsconstante g die de interactie tussen de vector-bosonen en de quarks en leptonen beschrijven. De vector-bosonen zijn de dragers van de kracht en worden in het standaardmodel gegeven door de gluonen, het foton, de Z- en W-bosonen. De koppelingconstantes voldoen aan de volgende relatie

$$g_{sterk} \gg g_{el.mag.} \gg g_{zwak}$$

De werkzame doorsnedes en de vervalsbreedtes zijn evenredig met g^2. Hieruit volgt

$$\sigma_{sterk} \gg \sigma_{el.mag.} \gg \sigma_{zwak}$$

$$\Gamma_{sterk} \gg \Gamma_{el.mag.} \gg \Gamma_{zwak}$$

Uit $\tau = \hbar/\Gamma$ volgt weer dat de levensduren zich gedragen als

$$\tau_{sterk} \ll \tau_{el.mag.} \ll \tau_{zwak}$$