QUANTUMTHEORIE 2

Dr. W.L.G.A.M. van Neerven

Instituut-Lorentz
Universiteit Leiden
postbus 9506, 2300 RA Leiden
Nederland

Inhoud Quantumtheorie 2

6.2 pagina 115. Representaties van discrete transformaties: pariteit, ladingsconjugatie en tijds-omkeer.

Aanbevolen literatuur

1 "Advanced Quantum Mechanics", J.J. Sakurai, Addison Wesley Pub. Co.. hoofdstukken: 1,2,3.

2 "Relativistic Quantum Mechanics",J.D. Bjorken and S.D. Drell, Mc. Graw-Hill. hoofdstukken: 1,2,3,5.

3 "Relativistic Quantum Fields",J.D. Bjorken and S.D. Drell, Mc. Graw-Hill. hoofdstukken: 11 t/m 15.

4 "Quantum Field Theory, A Modern Introduction", M. Kaku, Oxford University Press, ISBN 0-19-509158-2 (pbk). hoofdstukken 1 t/m 4.

1 Symmetrieën en behoudswetten in de kwantummechanica

De behoudswetten behoren tot de meest belangrijke wetten in de moderne natuurkunde. Zij volgen uit de symmetrie-eigenschappen van het fysische systeem. Het is vaak veel gemakkelijker een grootheid te meten dat constant blijft dan een grootheid wat verandert in de tijd. Deze grootheid kan men vinden als de symmetrie van een systeem bekend is.

1.1 Symmetrie-transformaties

Een punt-deeltje wordt beschreven door een vector $\vec{x}$ in een driedimensionale Euclidische ruimte met als basis $\vec{e}_i$ $i = 1, 2, 3$.

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i \, \vec{e}_i \equiv x_i \, \vec{e}_i \tag{1.1}$$

De bovenstaande notatie is de Einsteinconventie. Deze duidt aan dat als een index twee maal voorkomt automatisch over deze index wordt gesommeerd. De componenten x_i worden Euclidische coördinaten genoemd $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Verder zijn er

$$\begin{aligned}
&\text{bolcoördinaten} \\
&\vec{x} = (r, \theta, \phi) \quad \text{basis} \quad \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi \\
&\vec{e}_r = \sin\theta \, \cos\phi \, \vec{e}_1 + \sin\theta \, \sin\phi \, \vec{e}_2 + \cos\theta \, \vec{e}_3 \\
&\vec{e}_\theta = \cos\theta \, \cos\phi \, \vec{e}_1 + \cos\theta \, \sin\phi \, \vec{e}_2 - \sin\theta \, \vec{e}_3 \\
&\vec{e}_\phi = -\sin\phi \, \vec{e}_1 + \cos\phi \, \vec{e}_2
\end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned}
&\text{cylindercoördinaten} \\
&\vec{x} = (r, \phi, z) \quad \text{basis} \quad \vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z \\
&\vec{e}_r = \cos\phi \, \vec{e}_1 + \sin\phi \, \vec{e}_2 \\
&\vec{e}_\phi = -\sin\phi \, \vec{e}_1 + \cos\phi \, \vec{e}_2 \\
&\vec{e}_z = \vec{e}_3
\end{aligned} \tag{1.3}$$

In het geval van N deeltjes hebben we $3N$ coördinaten die in het algemeen niet onafhankelijk zijn. Stel dat er k relaties zijn, die in de vorm van k vergelijkingen gegeven worden, dan zijn er $n = 3N - k$ onafhankelijke coördinaten of vrijheidsgraden. Deze worden aangeduid door de gegeneraliseerde coördinaten $\{q\} = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$. Indien een systeem door gegeneraliseerde coördinaten beschreven kan worden heet het holonoom. Voorbeelden:

a. Twee-atomig molecuul (star lichaam). De relatie is $|\vec{r}^{(1)} - \vec{r}^{(2)}| = const.$. Hieruit volgt $N = 2$ en $k = 1$. Dus het aantal vrijheidsgraden is $n = 5$.

b. N deeltjes op een boloppervlak. De relatie is

$$|\vec{r}^{(i)}| = \sqrt{(r_1^{(i)})^2 + (r_2^{(i)})^2 + (r_3^{(i)})^2} \quad i = 1, 2, \cdots N \tag{1.4}$$

Hieruit volgt $k = N$ en $n = 2\,N$.

Symmetrie-transformaties zijn lineaire transformaties die de coördinaten van één of meer deeltjes overvoeren in andere coördinaten op een dusdanige wijze dat het fysische systeem invariant wordt gelaten. In dit college zullen wij ons beperken tot groepstranformaties.
Definitie: Een groep G met een eindig aantal elementen $g_1, g_2, \cdots, g_n$ voldoet aan de eigenschappen:

1. Vermenigvuldiging: $g_i.g_j = g_k$.
2. Eenheidselement e: $e.g_i = g_i.e = g_i$.
3. Inverse van g_i is g_i^{-1}: $g_i.g_i^{-1} = g_i^{-1}.g_i = e$.
4. Associativiteit: $g_i.(g_j.g_k) = (g_i.g_j).g_k$

In het bijzonder geval dat aan de volgende relatie is voldaan

5. Commutativiteit: $g_i.g_j = g_j.g_i$.

noemen we G een Abelse groep.
Oneindige groep: Een oneindige groep G heeft elementen $g(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ die functies van de continue variabelen $t_1, t_2, \cdots, t_n$ zijn. Als oneindige groep zullen we allen Lie-groepen beschouwen. De verzameling $\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$ vormen een variëteit. Verder is $g(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ differentieerbaar t.o.v. $t_1, t_2, \cdots, t_n$ in de omgeving van $0, 0, \cdots, 0$ met $g(0, 0, \cdots, 0) \equiv e = 1$. Elk element kan dan geschreven worden als

$$g(t_1, t_2, \cdots, t_n) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, t_i\right) \qquad a_i = \frac{d\,g}{d\,t_i}|_{(t_1, t_2, \cdots, t_n) = (0, 0, \cdots, 0)} \tag{1.5}$$

De elementen a_i zijn de generatoren van de Lie-groep G. Zij vormen een Lie-algebra van G (notatie $\mathcal{L}(G)$). n is de dimensie van de groepsvariëteit. Merk op dat g_i en a_i door matrices kunnen worden voorgesteld. Echter ook andere voorstellingen zijn mogelijk.

Een voorbeeld van een symmetrie-groep is de rotatie-groep in drie dimensies. Stel we hebben een driedimensionale vector-ruimte waarin een inprodukt (scalair product) is gedefinieerd als volgt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i \, b_i \tag{1.6}$$

Rotaties zijn transformaties in een vector-ruimte die het inprodukt invariant laten. Deze transformaties worden ook wel isometrieën genoemd omdat het inprodukt een lengte definieert. Het inprodukt wordt gedefinieerd door een metrische tensor. In het bovenstaande geval is dit de Kronecker delta tensor $\vec{\vec{\delta}}$ met als componenten δ_{ij} $i, j = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= 1 \quad \text{voor} i = j \\ \delta_{ij} &= 0 \quad \text{voor} i \neq j \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\vec{\vec{\delta}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \delta_{ij} \, a_i \, b_j = \sum_{j=1}^{3} a_j \, b_j \tag{1.9}$$

$\vec{\vec{\delta}}$ definieert een metriek omdat hij de lengte van een vector bepaalt.

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \qquad |\vec{e}_i| = 1 \qquad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \tag{1.10}$$

De basis is orthonormaal. Tevens wordt hiermee de structuur van de vector-ruimte vastgelegd. Zij R een rotatie

$$\vec{a} \quad \rightarrow \quad \vec{a}' = R \, \vec{a} \tag{1.11}$$

met $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dan

$$a'_i = \sum_{j=1}^{3} R_{ij} \, a_j \tag{1.12}$$

waarbij i de rij-index en j de kolom-index is. Het inprodukt is invariant onder rotaties R

$$\vec{a}' \cdot \vec{b}' = \sum_{i=1}^{3} a'_i \, b'_i = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} R_{ij} \, R_{ik} \, a_j \, b_k = \sum_{k=1}^{3} a_k \, b_k = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{3} R_{ij}\, R_{ik} = \sum_{i=1}^{3} R^T_{ji}\, R_{ik} = \delta_{jk}$$

$$\Rightarrow \quad R^T\, R = \mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad R^T = R^{-1} \tag{1.13}$$

R^T is de getransponeerde van R. Verder hebben we de eigenschap

$$\det\, R = \det\, R^T \quad \text{en} \quad \det\, R^T\, R = 1 \quad \Rightarrow \quad (\det\, R)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \det\, R = \pm 1 \tag{1.14}$$

$$\begin{aligned} \det\, R = 1 \quad &\rightarrow \quad R \in \mathrm{SO}(3) \\ \det\, R = \pm 1 \quad &\rightarrow \quad R \in \mathrm{O}(3) \end{aligned} \tag{1.15}$$

Men kan nu ook schrijven

$$\sum_{i=1}^{3} R^T_{ji}\, R_{ik} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} R^T_{ji}\, \delta_{il}\, R_{lk} = \delta_{jk} \quad \text{of} \quad R^T\, \vec{\vec{\delta}}\, R = \vec{\vec{\delta}} \tag{1.16}$$

$O(3)$ is de symmetrie-groep die de metriek gegeven door $\vec{\vec{\delta}}$ invariant laat.

Vanaf nu voeren wij de Einsteinconventie in. Dit betekent dat als er een sommatie plaats vindt over dubbele indices het som-teken $\sum_{i=1}^{3}$ wordt weggelaten. Dus

$$\begin{aligned} &a_k\, b_k \quad \text{i.p.v.} \quad \sum_{k=1}^{3} a_k\, b_k \\ &\text{of} \quad \delta_{jk}\, a_j\, b_k \quad \text{i.p.v.} \quad \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \delta_{jk}\, a_j\, b_k \end{aligned} \tag{1.17}$$

Stel we transformeren de componenten van een vector $\vec{a}$ maar de vector zelf wordt onveranderd gelaten. In dit geval moet de basis $\vec{e}_i$ ook transformeren (passieve transformatie).

$$\vec{a} = a_i\, \vec{e}_i = a'_i\, \vec{e}\,'_i = R_{ij}\, a_j\, \vec{e}\,'_i \underset{i \leftrightarrow j}{=} R_{ji}\, a_i\, \vec{e}\,'_j$$

$$\Rightarrow \quad \vec{e}_i = R_{ji}\, \vec{e}\,'_j \quad \Rightarrow \quad \vec{e}\,'_j = R^{-1}_{kj}\, e_k = R_{jk}\, e_k \tag{1.18}$$

want $R^{-1} = R^T$. De matrix voor R ziet in twee dimensies er als volgt uit

$$R^T\, \vec{\vec{\delta}}\, R = \vec{\vec{\delta}} \quad \text{met} \quad R \in \mathrm{O}(2) \tag{1.19}$$

of in matrix-notatie

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{21} \\ R_{12} & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

Hieruit volgt

$$R^2_{11} + R^2_{21} = R^2_{12} + R^2_{22} = 1 \qquad R_{11}\, R_{12} = -R_{21}\, R_{22} \quad \Rightarrow \quad R_{11} = \pm R_{22} \tag{1.21}$$

Er zijn nu twee mogelijkheden

1 De groep $SO(2)$

$$\begin{aligned} R_{11} = R_{22} \quad &\Rightarrow \quad R_{12} = -R_{21} \\ \det R = R_{11}\, R_{22} - R_{12}\, R_{21} &= R_{11}^2 + R_{21}^2 = 1 \end{aligned} \tag{1.22}$$

Men kan dan als parametrisatie kiezen

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{1.23}$$

Het Eenheidselement E wordt gegeven door

$$\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad R \equiv E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.24}$$

2

$$\begin{aligned} R_{11} = -R_{22} \quad &\Rightarrow \quad R_{12} = R_{21} \\ \det R = R_{11}\, R_{22} - R_{12}\, R_{21} &= -R_{11}^2 - R_{21}^2 = -1 \end{aligned} \tag{1.25}$$

Men kan dan als parametrisatie kiezen

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \tag{1.26}$$

De spiegeling om de x-as wordt gegeven door

$$\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad R \equiv S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.27}$$

Let op dat de matrices onder 2 geen groep vormen omdat het Eenheidselement ontbreekt. Echter als we de elementen uit 1 en 2 met elkaar combineren krijgen wij de groep $O(2)$.

Verder vormen de verzameling $\{E, S\}$ een eindige onder-groep van $O(2)$. Elk element $R \in O(2)$ met $R \notin SO(2)$ kan geschreven worden als $R = S\,A = A'\,S$ met $A, A' \in SO(2)$. Vandaar de notatie $O(2) = \{SO(2), S\}$. Merk op dat $SO(2)$ een Abelse groep is maar $O(2)$ niet. $SO(2)$ is een Lie-groep. Het kan geschreven worden als

$$R(\theta) = \exp\left(\theta\, I_{12}\right) \quad \text{met} \quad I_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.28}$$

Hierbij is I_{12} de generator van $SO(2)$. Uit $\det R = 1$ volgt Sp $I_{12} = 0$ (Sp = spoor, Engels Tr = trace). Het bovenstaande volgt uit

$$\begin{aligned} I_{12}^n &= E \qquad n = 0 \mod 4 \\ I_{12}^n &= I_{12} \qquad n = 1 \mod 4 \\ I_{12}^n &= -E \qquad n = 2 \mod 4 \\ I_{12}^n &= -I_{12} \qquad n = 3 \mod 4 \end{aligned} \tag{1.29}$$

zodat

$$\begin{aligned} R(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} I_{12}^k &= E \cos\theta + I_{12} \sin\theta \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.30}$$

Opmerking: de generator kan men altijd vinden door het groepselement te differentiëren naar θ

$$\Rightarrow \quad I_{12} = \frac{d\ R(\theta)}{d\ \theta}\Big|_{\theta=0} \tag{1.31}$$

De Lie-algebra van $SO(2)$ (notatie $\mathcal{L}(SO(2))$) bevat slechts één element nl. I_{12}. Merk op dat $O(2)$ geen Lie-groep is.

Orthogonale groep in drie dimensies $O(3)$.

Als $\det R = 1$ dan $R \in SO(3)$. Verder als $\det R = -1$ dan $R = S\,A$ met $A \in SO(3)$ en de ruimtelijke inversie S wordt gegeven door

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.32}$$

zodat $O(3) = \{SO(3), S\}$. Er zijn drie elementaire rotaties in $SO(3)$ die respectievelijk gegeven worden door de rotaties rondom x-, y- en z-as [1].

$$R_x(\theta_1) = \exp(\theta_1 I_{23}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ 0 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \qquad I_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.33}$$

$$R_y(\theta_2) = \exp(\theta_2 I_{31}) = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & 0 & \sin\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \qquad I_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.34}$$

[1] Voor de componenten x, y, z wordt ook vaak de notatie $1, 2, 3$ gebruikt.

$$R_z(\theta_3) = \exp(\theta_3 I_{12}) = \begin{pmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.35}$$

Opmerking: alle draaiingen zijn rechtshandig. Definieer

$$\begin{aligned} &K_1 \equiv I_{23} \qquad K_2 \equiv I_{31} \qquad K_3 \equiv I_{12} \\ &\Rightarrow \quad [K_1, K_2] = K_3 \quad \text{cyclisch} \qquad K_i \in \mathcal{L}(SO(3)) \end{aligned} \tag{1.36}$$

Merk op dat i.p.v. I_{23}, I_{31} en I_{12} men ook I_{32}, I_{13} en I_{21} had kunnen kiezen mits $I_{ij} = -I_{ji}$ (er zijn drie onafhankelijke generatoren in $SO(3)$). De groepen $O(3)$ en $SO(3)$ zijn niet Abels want $R(\theta_1)\, R(\theta_2) \neq R(\theta_2)\, R(\theta_1)$ (niet commutatief).
Eigenschappen van een Lie-algebra $\mathcal{L}(G)$ van G

1

$$A, B \in \mathcal{L}(G) \quad \to \quad [A,B] = AB - BA \in \mathcal{L}(G) \tag{1.37}$$

De Lie-haakjes $[,]$ stellen een soort vermenigvuldiging voor

2 De elementen van de Lie-algebra voldoen aan de Jacobi-identiteit

$$A, B, C \in \mathcal{L}(G) \quad \to \quad [[A,B],C] + [[B,C],A] + [[C,A],B] = 0 \tag{1.38}$$

Rotaties laten grootheden zoals de kinetische energie $T = 1/2mv^2 = 1/2m\vec{v}\cdot\vec{v}$ en potentialen $V(r)$ met $r = |\vec{r}|$ invariant. De wet van Newton

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = m\,\frac{d^2\vec{r}(t)}{d\;t} \tag{1.39}$$

wordt door rotaties co-variant (vorm-invariant) gelaten.

$$\vec{F}' = R\,\vec{F} \quad \vec{a}' = R\,\vec{a} \quad \to \quad \vec{F}' = m\,\vec{a}' \tag{1.40}$$

Andere symmetrie-transformaties die de wet van Newton co-variant laten zijn

a ruimte-translaties: $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{r}_0$ met $\vec{r}_0 = constant$

b snelheids-translaties (boosts): $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{v}_0\, t$ met $\vec{v}_0 = constant$

c tijds-translaties en tijds-omkeer: $t' = \pm t + t_0$ met $t_0 = constant$

De rotaties samen met de transformaties onder a, b en c worden Galilei-transformaties genoemd. Deze vormen een groep nl. Galilei-groep. Samengevat luiden deze transformaties

$$\vec{r}' = R\,\vec{r} + \vec{r}_0 + \vec{v}_0\, t \qquad t' = \pm t + t_0 \tag{1.41}$$

Een voorbeeld is een deeltje dat in referentiesysteem S met coördinaten $(\vec{r}, t)$ in referentiesysteem S' de coördinaten $(\vec{r}', t')$ heeft. Systemen die door Galilei-transformaties met elkaar verbonden zijn worden inertiaalsystemen genoemd.

Principe van de klassieke relativiteit

De wetten van de klassieke mechanica luiden hetzelfde in alle inertiaalsystemen.

Men kan een inertiaalsysteem ook daardoor definiëren als een coördinatensysteem waarin de wetten van Newton geldig zijn. Alle inertiaalsystemen bewegen zich met constante snelheid t.o.v. elkaar. Als men zich beperkt tot $\det R = 1$ en $t' = t + t_0$ dan is dit deel van de Galilei-groep een Lie-groep.

Definieer de kolomvectoren in een vijf-dimensionale ruimte als

$$\begin{pmatrix} \vec{r} \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.42}$$

dan kan de Galilei-transformatie als volgt geschreven worden

$$\begin{pmatrix} \vec{r}' \\ t' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & \vec{v}_0 & \vec{r}_0 \\ 0 & 1 & t_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r} \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.43}$$

R is een drie bij drie rotatie-matrix en $\vec{v}_0$ en $\vec{r}_0$ zijn kolomvectoren met drie componenten. De Galilei-groep is een tien-parameter-groep. De generatoren zijn

$$\begin{pmatrix} I_{ij} & \vec{d} & \vec{b} \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.44}$$

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} I_{ij} & \vec{0} & \vec{0} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b_i = \begin{pmatrix} \emptyset & \vec{0} & \vec{e}_i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$d_i = \begin{pmatrix} \emptyset & \vec{e}_i & \vec{0} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad f = \begin{pmatrix} \emptyset & \vec{0} & \vec{0} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.45}$$

met $(\vec{e}_i)_j = \delta_{ij}$. Verder hebben we de volgende representaties voor de driedimensionale nul-matrix en eenheidsmatrix

$$\emptyset = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.46}$$

De commutatie-relaties worden gegeven door

$$\begin{aligned}
&[a_{ij}, a_{kl}] = -\delta_{jk}\, a_{il} + \delta_{ik}\, a_{jl} - \delta_{il}\, a_{jk} + \delta_{jl}\, a_{ik} \\
&[a_{ij}, b_k] = -\delta_{jk}\, b_i + \delta_{ik}\, b_j \qquad [b_i, b_j] = 0 \\
&[a_{ij}, d_k] = -\delta_{jk}\, d_i + \delta_{ik}\, d_j \qquad [d_i, d_j] = 0 \\
&[d_i, b_j] = 0 \qquad [a_{ij}, f] = 0 \qquad [b_i, f] = 0 \qquad [d_i, f] = b_i
\end{aligned} \tag{1.47}$$

<u>Conclusies</u>

Ruimte-translaties b_i en snelheids-translaties d_i (boosts) commuteren met elkaar. Echter Ruimte-translaties b_i, snelheids-translaties d_i (boosts) commuteren niet met de rotaties a_{ij}. Ook commuteren boosts d_i niet met de tijds-translatie f.

$$\begin{aligned}
&S = \begin{pmatrix} -e & \vec{0} & \vec{0} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{ruimtelijke inversie, } \det R = 1 \\
&T = \begin{pmatrix} e & \vec{0} & \vec{0} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{tijds-omkeer} \\
&I = \begin{pmatrix} -e & \vec{0} & \vec{0} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{totale inversie} \\
&E = \begin{pmatrix} e & \vec{0} & \vec{0} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Eenheidselement}
\end{aligned} \tag{1.48}$$

De verzameling $\{E, S, T, I\}$ vormen een eindige groep de zgn. vier-groep.

1.2 Behoudswetten

Nu wij de symmetrie-transformaties hebben bepaald zullen wij gaan kijken welke behoudswetten hieruit volgen. Dit doen wij door middel van het Lagrange-formalisme.

De mechanische toestand van een systeem met n vrijheidsgraden wordt gegeven door n gegeneraliseerde coördinaten $q_1(t), \cdots, q_n(t)$ en hun eerste afgeleiden $\dot{q}_1(t), \cdots, \dot{q}_n(t)$ kortweg geschreven als $(q, \dot{q}, t)$.

De evolutie van elk mechanisch mechanisch systeem is bepaald door een functie $L(q, \dot{q}, t)$, de Lagrange-functie geheten. De actie is een functionaal gedefinieerd door

$$S[q, \dot{q}] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q, \dot{q}, t) \tag{1.49}$$

Principe van de kleinste actie (Principe van Hamilton)

$\mathbf{q(t), \dot{q}(t)}$ worden gevonden door het minimum van de actie S te bepalen bij vaste $\mathbf{q(t_1), q(t_2)}$

Dit houdt in dat

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \quad \text{met} \quad \delta \dot{q} = \delta \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \delta q \tag{1.50}$$

Laat de curve $q(t)$ afhangen van een aantal parameters α_i zodat $q \equiv q(t, \alpha_i)$. Varieer de parameters α_i zodanig dat

$$\left.\frac{\delta S}{\delta \alpha_i}\right|_{\alpha_i = \alpha_i^*} = 0 \qquad \text{en} \qquad \left.\frac{\delta^2 S}{\delta \alpha_i^2}\right|_{\alpha_i = \alpha_i^*} > 0 \tag{1.51}$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q, \dot{q}, t) = \int_{t_1}^{t_2} dt \Big(L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t) \Big) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \Big(L(q, \dot{q}, t) + \delta q_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \delta \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L(q, \dot{q}, t) \Big) \\ &= \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt\, \delta q_i \Big(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Big) \end{aligned} \tag{1.52}$$

De oppervlakte-term is nul omdat $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$. Uit $\delta S = 0$ volgt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad \text{Lagrange-vergelijking} \tag{1.53}$$

Bovenstaande vergelijking bepaalt de bewegingsvergelijking van het systeem. De kanonieke impuls is gedefinieerd door

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{1.54}$$

Stel wij hebben twee onafhankelijke systemen A en B die respectievelijk door de Lagrange-functies L_A en L_B beschreven worden. Het totale systeem wordt beschreven door de Lagrange-functie $L_{AB} = L_A + L_B$. De coördinaten van A zijn onafhankelijk van die van B en vice versa. Er geldt nu

$$\delta S_A = 0 \quad \text{en} \quad \delta S_B = 0 \quad \leftrightarrow \quad \delta S_{AB} = 0 \tag{1.55}$$

Verder is de Lagrange-functie tot op een totale afgeleide bepaald. Stel

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t) \tag{1.56}$$

voor willekeurige f dan

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L'(q, \dot{q}, t) = \int_{t_1}^{t_2} dt \Big(L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t) \Big) = S + f(q(t_2), t_2) - f(q(t_1), t_1)$$

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \quad \rightarrow \quad \delta S = \delta S'$$

$$\text{S is minimaal} \quad \leftrightarrow \quad \text{S' is minimaal} \tag{1.57}$$

Voor een gesloten conservatief systeem geldt

$$L(q, \dot{q}) = T(\dot{q}) - V(q) \tag{1.58}$$

Noethertheorema

Als de actie invariant is onder een continue symmetrie-transformatie dan bestaat er een behouden grootheid

Laat de transformatie afhangen van een parameter $\Delta\omega(t)$ die we voor het gemak infinitesimaal nemen $\Delta\omega(t) \ll 1$. De coördinaten transformeren als volgt

$$\begin{aligned} t \quad &\rightarrow \quad t' = t + \Delta t \quad \text{met} \quad \Delta t = X(t)\Delta\omega(t) \\ q_i(t) \quad &\rightarrow \quad q_i'(t') = q_i(t) + \Delta q_i(t) \quad \text{met} \quad \Delta q_i(t) = \Phi_i(t)\, \Delta\omega(t) \\ \frac{d\, q_i(t)}{d\, t} \quad &\rightarrow \quad \frac{d\, q_i'(t')}{d\, t'} = \frac{d\, q_i(t)}{d\, t} + \Delta \frac{d\, q_i(t)}{d\, t} \end{aligned} \tag{1.59}$$

Merk op dat Δ zowel de tijd t als de coördinaten q_i transformeert. Transformeren we alleen de coördinaten dan luidt de infinitesimale transformatie

$$\begin{aligned} q_i(t) \quad &\rightarrow \quad q_i'(t) = q_i(t) + \delta q_i(t) \\ \Rightarrow \quad \frac{d\, q_i(t)}{d\, t} \quad &\rightarrow \quad \frac{d\, q_i'(t)}{d\, t} = \frac{d\, q_i(t)}{d\, t} + \frac{d}{dt}\delta q_i(t) \end{aligned} \tag{1.60}$$

$$\begin{aligned} q_i'(t') &= q_i'\Big(t + X(t)\Delta\omega(t)\Big) = q_i'(t) + X(t)\Delta\omega(t) \frac{d\, q_i'(t)}{d\, t} \\ &= q_i'(t) + X(t)\Delta\omega(t)\frac{d\, q_i(t)}{d\, t} + X(t)\Delta\omega(t)\frac{d}{dt}\delta q_i(t) \end{aligned} \tag{1.61}$$

De laatste term is van de orde $\Delta\,\delta$ en kan dus weggelaten worden

$$\begin{aligned}\delta q_i(t) &= q_i'(t) - q_i(t) = q_i'(t') - q_i(t) - X(t)\Delta\omega(t)\frac{d\ q_i(t)}{d\ t}\\ &= \Delta q_i(t) - X(t)\Delta\omega(t)\frac{d\ q_i(t)}{d\ t}\end{aligned} \tag{1.62}$$

$$\delta\frac{d\ q_i(t)}{d\ t} = \Delta\frac{d\ q_i(t)}{d\ t} - X(t)\Delta\omega(t)\frac{d^2\ q_i(t)}{d\ t} \tag{1.63}$$

Merk op dat

$$\frac{d\ \delta q_i(t)}{d\ t} = \delta\frac{d\ q_i(t)}{d\ t} \quad \text{maar} \quad \frac{d\ \Delta q_i(t)}{d\ t} \neq \Delta\frac{d\ q_i(t)}{d\ t} \tag{1.64}$$

Dit komt omdat δ niet maar Δ wel de tijd transformeert. Onder de symmetrietransformatie verandert de actie als volgt

$$\delta S = \int_{t_1'}^{t_2'} dt'\, L\left(q'(t'), \frac{d\ q'(t')}{d\ t'}\right) - \int_{t_1}^{t_2} dt\, L\left(q(t), \frac{d\ q(t)}{d\ t}\right) \tag{1.65}$$

met

$$dt' = dt\left(1 + \frac{d}{dt}\Big(X(t)\Delta\omega(t)\Big)\right) \tag{1.66}$$

De eerste integrand kan geschreven worden als

$$\begin{aligned}L\left(q'(t'), \frac{d\ q'(t')}{d\ t'}\right) &= L\Big(q(t) + \Delta q(t), \dot q(t) + \Delta\dot q(t)\Big) = L(q(t), \dot q(t))\\ &+ \Delta q_i(t)\frac{\partial}{\partial q_i}L(q(t), \dot q(t)) + \Delta\dot q_i(t)\frac{\partial}{\partial\dot q_i}L(q(t), \dot q(t))\end{aligned} \tag{1.67}$$

Na invullen wordt (1.65)

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt\,\Bigg[\frac{d}{dt}\Big\{X(t)\Delta\omega(t)\Big\}L(q(t), \dot q(t)) + \Delta q_i(t)\frac{\partial}{\partial q_i}L(q(t), \dot q(t))\\ &+ \Delta\dot q(t)\frac{\partial}{\partial\dot q_i}L(q(t), \dot q(t))\Bigg] = \int_{t_1}^{t_2} dt\,\Bigg[\frac{d}{dt}\Big\{X(t)\Delta\omega(t)L(q(t), \dot q(t))\Big\}\\ &- X(t)\Delta\omega(t)\frac{d}{dt}L(q(t), \dot q(t)) + \Big\{\delta q_i(t) + X(t)\Delta\omega(t)\dot q_i(t)\Big\}\frac{\partial}{\partial q_i}L(q(t), \dot q(t))\\ &+ \Big\{\delta\dot q_i(t) + X(t)\Delta\omega(t)\ddot q_i(t)\Big\}\frac{\partial}{\partial\dot q_i}L(q(t), \dot q(t))\Bigg]\end{aligned} \tag{1.68}$$

Maak nu gebruik van de relaties

$$\frac{d}{dt}L(q(t),\dot{q}(t)) = \dot{q}_i(t)\frac{\partial}{\partial q_i}L(q(t),\dot{q}(t)) + \ddot{q}_i(t)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}L(q(t),\dot{q}(t))$$

$$\text{en} \quad \delta\dot{q}(t) = \frac{d}{dt}\delta q(t) \tag{1.69}$$

dan vallen de tweede, vierde en zesde termen in (1.68) tegen elkaar weg. De verandering in de actie wordt nu

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{d}{dt}\Big\{X(t)\Delta\omega(t)L(q(t),\dot{q}(t))\Big\} + \delta q_i(t)\frac{\partial}{\partial q_i}L(q(t),\dot{q}(t))\right. \\ &\quad +\frac{d}{dt}\Big\{\delta q_i(t)\Big\}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}L(q(t),\dot{q}(t)) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{d}{dt}\Big\{X(t)\Delta\omega(t)L(q(t),\dot{q}(t))\right. \\ &\quad +\delta q_i(t)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}L(q(t),\dot{q}(t))\Big\} + \delta q_i\Big\{\frac{\partial}{\partial q_i}L(q(t),\dot{q}(t)) \\ &\quad \left.-\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}L(q(t),\dot{q}(t))\Big\}\right]\end{aligned} \tag{1.70}$$

De termen tussen de laatste accolades vallen tegen elkaar weg vanwege de Lagrange-vergelijking. Substitueer in (1.70) (zie (1.59))

$$\delta q_i(t) = \Delta q_i(t) - X(t)\Delta\omega(t)\dot{q}_i(t) = \Big(\Phi_i(t) - X(t)\dot{q}_i(t)\Big)\Delta\omega(t) \tag{1.71}$$

De verandering in de actie kan dan worden geschreven als

$$\begin{aligned}\delta S &= -\int_{t_1}^{t_2} dt\,\frac{d}{dt}\left[\left\{\left(\dot{q}_i(t)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}L(q(t),\dot{q}(t)) - L(q(t),\dot{q}(t))\right)X(t)\right.\right. \\ &\quad \left.\left.-\Phi_i(t)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}L(q(t),\dot{q}(t))\right\}\Delta\omega(t)\right]\end{aligned} \tag{1.72}$$

Wij definiëren nu de Noetherlading $Q(t)$

$$Q(t) \equiv \left(\dot{q}_i(t)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}L(q(t),\dot{q}(t)) - L(q(t),\dot{q}(t))\right)X(t) - \Phi_i(t)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}L(q(t),\dot{q}(t)) \tag{1.73}$$

Hieruit volgt

$$\delta S = -\int_{t_1}^{t_2} dt\,\frac{d}{dt}\Big\{Q(t)\Delta\omega(t)\Big\} = Q(t_1)\Delta\omega(t_1) - Q(t_2)\Delta\omega(t_2) \tag{1.74}$$

Als $\delta S = 0$ en $\Delta\omega(t)$ is tijdsonafhankelijk (m.a.w. de transformatie is globaal) dan volgt uit $\Delta\omega(t_1) = \Delta\omega(t_2)$ dat $Q(t_1) = Q(t_2)$ (zie (1.74)). Dit geldt voor willekeurige t_1 en t_2 zodat het Noethertheorema luidt

$$\frac{d\,Q(t)}{d\,t} = 0 \quad \text{ofwel} \quad Q(t) = Q \quad Q \text{ is constant} \tag{1.75}$$

Dus $Q(t)$ is een behouden grootheid ofwel een constante van beweging. Merk op dat $\partial L/\partial \dot{q}_i$, die in $Q(t)$ (1.73) voorkomt, gelijk is aan de kanonieke impuls p_i in (1.54). Toepassingen

a Rotaties: $t' = t \;\rightarrow\; X(t) = 0$

$$q_i'(t) = R_{ij}(\theta) q_j(t) \qquad i,j = 1,2,3 \tag{1.76}$$

Neem als voorbeeld infinitesimale rotaties rondom de z-as ($\theta_3 \ll 1$)

$$\begin{aligned} q_i'(t) &= \left(\exp(\theta_3\, K_3)\right)_{ij}\; q_j(t) = \Big(\delta_{ij} + \theta_3\,(K_3)_{ij}\Big) q_j(t) \\ &\rightarrow \quad \Phi_i(t) = (K_3)_{ij} q_j(t) \qquad \Delta\omega(t) = \theta_3 \\ &\Rightarrow Q = -(K_3)_{ij} p_i\, q_j = -(q_1 p_2 - q_2 p_1) = -L_3 \end{aligned} \tag{1.77}$$

Hetzelfde geldt ook voor rotaties rondom de x- en y-as. Conclusie

$$\vec{L} = \vec{q} \times \vec{p} \quad \text{impuls-moment} \quad \frac{d\,\vec{L}}{d\,t} = 0 \tag{1.78}$$

Uit rotatie-invariantie van het fysisch systeem volgt dat het impuls-moment een behouden grootheid is.

b Translaties in de ruimte: $t' = t \;\rightarrow\; X(t) = 0$

$$q_i'(t) = q_i(t) + a_i \tag{1.79}$$

met $a_i \ll 1$

$$\Phi_i(t) = 1 \qquad \Delta\omega(t) = a_i \quad \Rightarrow \quad Q = -p_i \quad \Rightarrow \quad \frac{d\,\vec{p}}{d\,t} = 0 \tag{1.80}$$

Uit ruimte-translatie-invariantie volgt dat de impuls een behouden grootheid is.

c Translaties in de tijd: $t' = t + t_0 \;\rightarrow\; X(t) = 1$

$$\begin{aligned} t' &= t + \Delta\omega(t) \quad \rightarrow \quad \Delta\omega(t) = t_0 = \quad \text{constant} \\ & q_i'(t') = q_i(t) \quad \rightarrow \quad \Phi_i(t) = 0 \\ & \Rightarrow \quad Q = p_i\,\dot{q}_i - L = H \quad \text{Hamiltoniaan} \\ & \Rightarrow \quad \frac{d\,H}{d\,t} = 0 \end{aligned} \tag{1.81}$$

Uit tijds-translatie-invariantie volgt dat de Hamiltoniaan een behouden grootheid is.

De laatste is gedefinieerd als

$$H(p, q, t) \equiv p_i \, \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t) \tag{1.82}$$

Hieruit volgen de Hamilton-vergelijkingen

$$-\frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d\ p_i}{d\ t} = \dot{p}_i$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \tag{1.83}$$

Wij kunnen m.b.v. de Hamiltoniaan de Noetherlading in (1.73) ook schrijven als

$$Q(t) = H(p_i(t), q_i(t), t)\, X(t) - \Phi_i(t)\, p_i(t) \tag{1.84}$$

Poissonhaakjes

Stel

$$f \equiv f(p, q, t) \qquad g \equiv g(p, q, t) \tag{1.85}$$

Dan wordt het Poissonhaakje $\{f, g\}$ gedefinieerd door

$$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} \right) \tag{1.86}$$

Eigenschappen

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= -\{g, f\} \\ \{f, c\} &= 0 \quad \text{mits } c \text{ onafhankelijk is van } p \text{ en } q \\ \{f_1 + f_2, g\} &= \{f_1, g\} + \{f_2, g\} \\ \{f_1\, f_2, g\} &= f_1\{f_2, g\} + f_2\{f_1, g\} \end{aligned} \tag{1.87}$$

Verder hebben we de Jacobi-identiteit

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \tag{1.88}$$

Met behulp van de Hamilton-vergelijkingen kunnen we afleiden

$$\frac{d\ f}{d\ t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial f}{\partial q_k} + \dot{p}_k \frac{\partial f}{\partial p_k} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} \tag{1.89}$$

Als f een constante van beweging is dan

$$\frac{d\,f}{d\,t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} = 0 \tag{1.90}$$

Als f en g constanten van beweging zijn dan geldt $\{f, g\} = constant$. Dit laatste volgt uit de Jacobi-identiteit.

$$\{H, \{f, g\}\} = \{g, \frac{\partial f}{\partial t}\} - \{f, \frac{\partial g}{\partial t}\} = -\frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\,t}\{f, g\} = 0 \tag{1.91}$$

1.3 scalairen, vectoren, tensoren

Een scalair is een grootheid die invariant wordt gelaten onder een groep van transformaties.
Voorbeelden:

1 De kinetische energie $T = 1/2m|\vec{v}|^2$ is een scalair t.o.v. de rotatie-groep $SO(3)$.

2 De massa is een scalair t.o.v. de Galilei-groep.

Zij V een n-dimensionale vector-ruimte met de basis $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ dan is $\vec{x} = x_i\,\vec{e}_i$ een vector met componenten x_i. Definieer de product-ruimte

$$V_p = V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_p \qquad \dim V_p = n^p \tag{1.92}$$

Kies een basis in de product-ruimte gedefinieerd door

$$\vec{\vec{e}}_{i_1, i_2, \cdots, i_p} \equiv \vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_p} \tag{1.93}$$

Dan wordt de p^e rang tensor met componenten $T_{i_1 i_2 \cdots i_p}$ gegeven door

$$\vec{\vec{T}} = T_{i_1 i_2 \cdots i_p}\,\vec{\vec{e}}_{i_1 i_2 \cdots i_p} \tag{1.94}$$

Conclusie: een vector is een tensor van rang 1. Een scalair is een tensor van rang 0.
Transformatie-eigenschappen onder de rotatie-groep $SO(n)$

$$\begin{aligned} \vec{e}^{\,\prime}_i &= R_{ij}\vec{e}_j \qquad x'_i = R_{ij}x_j \\ \vec{\vec{e}}^{\,\prime}_{i_1 i_2, \cdots i_p} &= R_{i_1 j_1} R_{i_2 j_2} \cdots R_{i_p j_p} \vec{\vec{e}}_{j_1 j_2, \cdots j_p} \\ T'_{i_1, i_2, \cdots, i_p} &= R_{i_1 j_1} R_{i_2 j_2} \cdots R_{i_p j_p} T_{j_1 j_2 \cdots j_p} \end{aligned} \tag{1.95}$$

Een invariante tensor is een tensor die invariant gelaten wordt onder een groep van transformaties.
Voorbeelden:

1 Een scalair zoals de massa m of $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_i y_i$.

2 De Kronecker delta tensor $\vec{\vec{\delta}}$ met componenten δ_{ij} wordt door de rotatie-groep invariant gelaten. Het is een 2^e rang tensor dus $p = 2$. Dit volgt uit de definitie van R.

$$\delta_{ij} = R_{ik} R_{jl} \delta_{kl} \tag{1.96}$$

3 De Levi-Civita tensor $\vec{\vec{\epsilon}}$ met componenten $\epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_p}$ waarbij $p = n$. Deze wordt door de rotatie-groep $SO(n)$ invariant gelaten. De rang van deze tensor is altijd gelijk aan de dimensie van de vector-ruimte (hier n). De componenten zijn gedefinieerd door

$$\begin{aligned} \epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_p} = 1 \qquad (i_1, i_2, \cdots, i_p) \quad \text{is een even permutatie van} \quad (1, 2, \cdots, p) \\ \epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_p} = -1 \qquad (i_1, i_2, \cdots, i_p) \quad \text{is een oneven permutatie van} \quad (1, 2, \cdots, p) \end{aligned} \tag{1.97}$$

In drie dimensies is $\vec{\vec{\epsilon}}$ een 3^e rang tensor

$$\begin{aligned} \epsilon_{123} &= \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1 \\ \epsilon_{321} &= \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = -1 \end{aligned} \tag{1.98}$$

$$\epsilon_{ijk} = R_{il} R_{jm} R_{kn} \epsilon_{lmn} \tag{1.99}$$

mits $R \in SO(3)$ $(\det R = 1)$.

Ruimtelijke inversie in n dimensies wordt gegeven door de transformatie $S\,\vec{r} = -\vec{r}$ waarbij $\vec{r}$ een n-dimensionale vector is. Beperken wij ons tot drie dimensies dan wordt het uitwendig product gegeven door $\vec{v} = \vec{x} \times \vec{y}$. Dit is een pseudo-vector. Het woord "pseudo" betekent dat een tensor onder ruimtelijke inversie een extra minteken krijgt t.o.v. de pseudo-tensor. Bijvoorbeeld

$$S\,\vec{v} = S\,\vec{x} \times S\,\vec{y} = \vec{x} \times \vec{y} = \vec{v} \quad \text{echter} \quad S\,\vec{x} = -\vec{x} \tag{1.100}$$

Het object $v = \vec{z} \cdot (\vec{x} \times \vec{y})$ is een pseudo-scalair want

$$S\,v = S\,\vec{z} \cdot S\,(\vec{x} \times \vec{y}) = -\vec{z} \cdot (\vec{x} \times \vec{y}) = -v \quad \text{echter} \quad S\,a = S\,\vec{x} \cdot S\,\vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{y} = a \tag{1.101}$$

Generalisatie tot n dimensies:
$\vec{\vec{T}}$ is een tensor van rang p als geldt $S\,\vec{\vec{T}} = (-1)^p\,\vec{\vec{T}}$. $\vec{\vec{T}}$ is een pseudo-tensor van rang p als geldt $S\,\vec{\vec{T}} = (-1)^{p+1}\,\vec{\vec{T}}$. Vandaar dat $\vec{\vec{\delta}}$ een tensor en $\vec{\vec{\epsilon}}$ een pseudo-tensor is.
Voorbeelden zijn het impuls-moment $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ die de componenten $L_i = \epsilon_{ijk} r_j p_k$ heeft.

Hieruit volgt dat de rang van $\vec{\vec{\epsilon}}$ gelijk is aan $p = 3$ en zijn pariteit $+$ is. Het inprodukt wordt gegeven door $\vec{x} \cdot \vec{y} = \delta_{ij} x_i y_j$. Hieruit volgt dat de rang van $\vec{\vec{\delta}}$ gelijk is aan $p = 2$ en zijn pariteit is $+$. De vector $\vec{x}$ heeft rang 1 en zijn pariteit is -. De pariteit voor een tensor is $P = (-1)^p$ en voor een pseudo-tensor is deze gelijk aan $P = (-1)^{p+1}$. (Pseudo-)tensoren transformeren onder de groep $O(n)$ als

$$\begin{aligned} \vec{\vec{e}}\,'_{i_1 i_2 \cdots i_p} &= R_{i_1 j_1} R_{i_2 j_2} \cdots R_{i_p j_p} \vec{\vec{e}}_{j_1 j_2 \cdots j_p} \\ T'_{i_1 i_2 \cdots i_p} &= (\det R)^W R_{i_1 j_1} R_{i_2 j_2} \cdots R_{i_p j_p} T_{j_1 j_2 \cdots j_p} \end{aligned} \tag{1.102}$$

voor $\det R = \pm 1$.

$$\begin{aligned} W &= 0 \quad \rightarrow \quad \vec{\vec{T}} \text{ is een tensor} \\ W &= -1 \quad \rightarrow \quad \vec{\vec{T}} \text{ is een pseudo-tensor} \end{aligned} \tag{1.103}$$

W wordt wel eens het gewicht van een tensor genoemd. Nemen wij als voorbeeld de Levi-Civita tensor. Voor $R \in O(3)$ dan krijgen we

$$\epsilon_{ijk} = (\det R)^{-1} R_{il} R_{jm} R_{kn} \epsilon_{lmn} \tag{1.104}$$

Dit is precies de definitie van de determinant van R namelijk

$$\det R = \epsilon_{lmn} R_{1l} R_{2m} R_{3n} \tag{1.105}$$

2 Speciale Relativiteitstheorie

2.1 Minkowskiruimte

Uit de klassieke theorie blijkt dat de lichtsnelheid niet in alle inertiaalsystemen hetzelfde is m.a.w. $c' \neq c$ ($c' = c + v_0$ volgt uit $x' = x + v_0 t$). Verder laten de Galilei-transformaties de wetten van Maxwell die het Elektromagnetisme beschrijven niet co-variant (Larmoor, H.A. Lorentz 1904, H. Poincaré 1905).
Echter uit het Michelson-Morley experiment (1887) blijkt dat de lichtsnelheid in alle inertiaalsystemen even groot en eindig is. Echter de co-variantie van de Maxwell vergelijkingen en de invariantie van de lichtsnelheid volgen wel als we een andere symmetrie-groep voor de natuur aannemen namelijk de Lorentzgroep (of haar uitbreiding de Poincaré-groep). Dit volgt uit het Principe van de Speciale Relativiteit zoals door A. Einstein in 1905 is geformuleerd. Deze luidt

1 Relativiteitsprincipe: De wetten van de natuurkunde luiden hetzelfde in alle inertiaalsystemen (analoog aan de klassieke relativiteit).

2 Principe van de invariante lichtsnelheid: De lichtsnelheid is hetzelfde in alle inertiaalsystemen en is de grootst mogelijke signaal-snelheid.

Een lichtsignaal wordt uitgezonden vanuit de oorsprong in de coördinatensystemen $S\ (ct, x, y, z)$ en $S'\ (c't', x', y', z')$. De oorsprongen vallen samen op $t = t' = 0$. De straal van de bolvormige lichtgolf wordt gegeven door respectievelijk $|\vec{x}| = ct$ en $|\vec{x}'| = c't'$. Volgens Einstein is $c' = c$. Verder hebben we de vergelijking

$$c^2 t^2 - |\vec{x}|^2 = c^2 t'^2 - |\vec{x}'|^2 = 0 \tag{2.1}$$

De bovenstaande vergelijking kan met behulp van een metrische tensor worden herschreven. Daartoe voeren we een nieuwe ruimte in die vierdimensionaal is, de Minkowski-ruimte. Deze verenigt de driedimensionale Euclidische ruimte met de tijd. Kies een basis in de Minkowski-ruimte die gegeven wordt door

$$e_0, e_1, e_2, e_3 \quad \rightarrow \quad e_\mu \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \tag{2.2}$$

waarbij e_0 de tijd-vector is. Een vier-vector (genoteerd zonder pijl) ziet er dan uit als $x = x^\mu e_\mu$ (let op de index). Dit kan men ook schrijven in coördinaten-vorm $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \vec{x})$. Uit de wiskunde is bekend dat elke vector-ruimte V van dimensie n een duale vector-ruimte V^* heeft met dezelfde dimensie. Deze bestaat uit alle lineaire functies (afbeeldingen) $\{f\}$ waarvoor geldt

$$f: \quad V \quad \rightarrow \quad \Re \quad \text{met} \quad x \in V \quad f \in V^* \quad f(x) \in \Re \tag{2.3}$$

waarbij $\Re$ de verzameling van de reële getallen voorstelt. De basis in V^* wordt genoteerd als

$$e^0, e^1, e^2, e^3 \quad \rightarrow \quad e^\mu \quad \mu = 0,1,2,3$$

$$\text{met} \quad e^\mu\, e_\nu = \delta^\mu_\nu \tag{2.4}$$

Hier stelt δ de Kronecker delta tensor voor in vier dimensies met de eigenschappen

$$\delta^\mu_\nu = 1 \quad \mu = \nu \qquad \delta^\mu_\nu = 0 \quad \mu \neq \nu \tag{2.5}$$

Als $x \in V^*$ dan kan deze geschreven worden als $x = x_\mu\, e^\mu$ of $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$. In bovenstaand formalisme worden e_μ en e^μ respectievelijk co-variante en contra-variante basis-vectoren genoemd terwijl x_μ en x^μ respectievelijk de co-variante en contra-variante componenten zijn.
Onthoud: $\mu\ is\ beneden - index \ \rightarrow\ \mu\ is\ co - variant$, $\mu\ is\ boven - index \ \rightarrow\ \mu\ is\ contra - variant$. Wij voeren nu een metrische tensor g in met componenten $g_{\mu\nu}$. Deze heeft de eigenschappen

$$g_{00} = 1 \quad g_{ij} = -1 \quad i,j = 1,2,3 \qquad g_{\mu\nu} = 0 \quad \mu \neq \nu$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \tag{2.6}$$

Merk op dat 0 de tijds-index is en i, j de ruimtelijke indices zijn. De Minkowski-metriek is indefiniet dit in tegenstelling tot de Euclidische metriek die wordt voorgesteld door de Kronecker delta tensor $\vec{\vec{\delta}}$. Daarom definieert g ook geen norm in tegenstelling tot $\vec{\vec{\delta}}$. Naast $g_{\mu\nu}$ die een co-variante tensor is hebben we ook een contra-variante tensor $g^{\mu\nu}$ met precies dezelfde eigenschappen als in (2.6).

$$g_{\mu\nu}\, g^{\nu\lambda} = \delta^\lambda_\mu \tag{2.7}$$

Verder zijn er de relaties

$$e_\mu \cdot e_\nu = g_{\mu\nu} \qquad e^\mu \cdot e^\nu = g^{\mu\nu}$$

$$e_\mu = g_{\mu\nu}\, e^\nu \qquad e^\mu = g^{\mu\nu}\, e_\nu$$

$$x_\mu = g_{\mu\nu}\, x^\nu \qquad x^\mu = g^{\mu\nu}\, x_\nu$$

$$x \cdot y = x_\mu y_\nu e^\mu e^\nu = x_\mu y_\nu g^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g_{\mu\lambda} x^\lambda y_\nu = \delta^\nu_\lambda x^\lambda y_\nu$$

$$x \cdot y = x^\mu y^\nu e_\mu e_\nu = x^\mu y^\nu g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} g^{\mu\lambda} x_\lambda y^\nu = \delta^\lambda_\nu x_\lambda y^\nu$$

$$x \cdot y = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 \qquad x \cdot y = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3$$

$$x \cdot y = x_0 y^0 + x_1 y^1 + x_2 y^2 + x_3 y^3 = x^0 y_0 + x^1 y_1 + x^2 y_2 + x^3 y_3$$

$$x \cdot y = x_0 y_0 - \vec{x} \cdot \vec{y} = x_0 y_0 - x_i y_i = x^0 y^0 - x^i y^i = x^0 y_0 + x^i y_i = x_0 y^0 + x_i y^i \tag{2.8}$$

Zij A een transformatie die de componenten x en basis-vectoren e van systemen S en S' met elkaar verbindt. De notaties luiden als volgt

$$e'^{\mu} = A^{\mu}_{\nu}\, e^{\nu} \qquad x'_{\mu} = (A^{-1})^{\nu}_{\mu}\, x_{\nu}$$

$$e'_{\mu} = (A^{-1})^{\nu}_{\mu}\, e_{\nu} \qquad x'^{\mu} = A^{\mu}_{\nu}\, x^{\nu}$$

$$(A^T)^{\mu}_{\nu} \equiv A^{\nu}_{\mu} \qquad A^{\mu}_{\nu}\, (A^{-1})^{\nu}_{\lambda} = \delta^{\mu}_{\lambda} \qquad A = \begin{pmatrix} A^0_0 & A^1_0 & A^2_0 & A^3_0 \\ A^0_1 & A^1_1 & A^2_1 & A^3_1 \\ A^0_2 & A^1_2 & A^2_2 & A^3_2 \\ A^0_3 & A^1_3 & A^2_3 & A^3_3 \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

2.2 Lorentzgroep en Poincarégroep

Met behulp van de metrische tensor kan de vergelijking in (2.1) geschreven worden als

$$g_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta} = g_{\mu\nu} x'^{\mu} x'^{\nu} \tag{2.10}$$

De Lorentz-transformaties vormen een symmetrie-groep $O(3,1)$ die de metrische tensor g invariant laten. Dit is de analogie van de rotaties $O(3)$ die de metriek $\vec{\vec{\delta}}$ invariant laat zie (1.19).

$$\Lambda \in O(3,1) \qquad x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\alpha}\, x^{\alpha} \qquad x'^{\nu} = \Lambda^{\nu}_{\beta}\, x^{\beta}$$

$$g_{\alpha\beta} = \Lambda^{\mu}_{\alpha}\, \Lambda^{\nu}_{\beta}\, g_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad \det \Lambda = \pm 1 \tag{2.11}$$

In het algemeen geldt dat de n en m in $O(n,m)$ slaat op het aantal malen n dat -1 op de diagonaal in g voorkomt en m geeft aan het aantal malen dat er $+1$ op de diagonaal staat. De Lorentzgroep bestaat uit:

a De rotaties die de groep $O(3)$ vormen. Deze laten de norm $|\vec{x}|$ invariant. Zij vormen een onder-groep van $O(3,1)$

b De speciale Lorentz-transformaties ook wel Lorentz-boosts genoemd. Zij verbinden de Euclidische coördinaten met de tijds-coördinaat.

Voorbeeld: Neem een één-dimensionale ruimte-tijd dimensie bijv. $x = (ct, x_3)$ dan wordt de Lorentzgroep gegeven door $O(1,1)$ dus $\Lambda \in O(1,1)$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^3_0 \\ \Lambda^0_3 & \Lambda^3_3 \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(\Lambda^0_0)^2 - (\Lambda^3_0)^2 = 1 \qquad (\Lambda^0_3)^2 - (\Lambda^3_3)^2 = -1 \qquad \Lambda^0_3\Lambda^0_0 - \Lambda^3_3\Lambda^3_0 = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} \Lambda^0_3 = \frac{\Lambda^3_3\Lambda^3_0}{\Lambda^0_0} \\ \\ (\Lambda^0_3)^2 - (\Lambda^3_3)^2 = -1 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \Lambda^0_0 = \pm\Lambda^3_3 \tag{2.12}$$

Er zijn nu twee mogelijkheden

1

$$\Lambda^0_0 = \Lambda^3_3 \quad \rightarrow \quad \Lambda^3_0 = \Lambda^0_3 \qquad \det\Lambda = \Lambda^0_0\Lambda^3_3 - \Lambda^0_3\Lambda^3_0 =$$
$$(\Lambda^0_0)^2 - (\Lambda^0_3)^2 = 1 \tag{2.13}$$

De twee oplossingen zijn:

1a Eigenlijke orthochrone homogene Lorentzgroep notatie $L^{\uparrow}_{+} = SO(1,1)$
$\Lambda^0_0 > 0$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\chi & \sinh\chi \\ \sinh\chi & \cosh\chi \end{pmatrix} \qquad \chi = 0 \quad \rightarrow \quad \Lambda \equiv E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

1b $\Lambda^0_0 < 0$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\cosh\chi & \sinh\chi \\ \sinh\chi & -\cosh\chi \end{pmatrix} \qquad \chi = 0 \quad \rightarrow \quad \Lambda \equiv I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

Hierbij stelt I de totale inversie voor. Merk op dat $1b$ geen groep voorstelt omdat het eenheidselement E ontbreekt.

2

$$\Lambda^0_0 = -\Lambda^3_3 \quad \rightarrow \quad \Lambda^3_0 = -\Lambda^0_3 \qquad \det\Lambda = \Lambda^0_0\Lambda^3_3 - \Lambda^0_3\Lambda^3_0 =$$
$$-(\Lambda^0_0)^2 + (\Lambda^0_3)^2 = -1 \tag{2.16}$$

De twee oplossingen zijn:

2a $\Lambda^0_0 > 0$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\chi & -\sinh\chi \\ \sinh\chi & -\cosh\chi \end{pmatrix} \qquad \chi = 0 \quad \rightarrow \quad \Lambda \equiv S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

Hierbij stelt S de ruimtelijke inversie voor.

2b $\Lambda^0_0 < 0$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\cosh\chi & \sinh\chi \\ -\sinh\chi & \cosh\chi \end{pmatrix} \qquad \chi = 0 \quad \rightarrow \quad \Lambda \equiv T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

Hierbij stelt T de tijds-omkeer voor

Merk op dat $2a$ en $2b$ geen groepen zijn omdat het eenheidselement E ontbreekt.

We kunnen nu $1a$ combineren met de totale inversie I ($1b$), ruimtelijke inversie S ($2a$) en de tijds-omkeer T ($2b$). In deze gevallen krijgen we nieuwe groepen. Zij heten

1 Eigenlijke homogene Lorentzgroep notatie $L^{\downarrow}_{+}$. Dit is de groep uit $1a$ samen met de totale inversie I. Deze wordt ook geschreven als $L^{\downarrow}_{+} = (L^{\uparrow}_{+}, I)$. Verder geldt

$$\Lambda \in L^{\downarrow}_{+} \quad \text{en} \quad \Lambda \notin L^{\uparrow}_{+} \quad \rightarrow \quad \Lambda = A\,I = I\,A' \quad \text{met} \quad A, A' \in L^{\uparrow}_{+} \tag{2.19}$$

2 Orthochrone homogene Lorentzgroep notatie $L^{\uparrow}_{-}$. Dit is de groep uit $1a$ samen met de ruimtelijke inversie S. Deze wordt ook geschreven als $L^{\uparrow}_{-} = (L^{\uparrow}_{+}, S)$. Verder geldt

$$\Lambda \in L^{\uparrow}_{-} \quad \text{en} \quad \Lambda \notin L^{\uparrow}_{+} \quad \rightarrow \quad \Lambda = A\,S = S\,A' \quad \text{met} \quad A, A' \in L^{\uparrow}_{+} \tag{2.20}$$

3 Antichrone homogene Lorentzgroep notatie $L^{\downarrow}_{-}$. Dit is de groep uit $1a$ samen met de tijds-omkeer T. Deze wordt ook geschreven als $L^{\downarrow}_{-} = (L^{\uparrow}_{+}, T)$. Verder geldt

$$\Lambda \in L^{\downarrow}_{-} \quad \text{en} \quad \Lambda \notin L^{\uparrow}_{+} \quad \rightarrow \quad \Lambda = A\,T = T\,A' \quad \text{met} \quad A, A' \in L^{\uparrow}_{+} \tag{2.21}$$

Onthoud:

$$\pm \quad \rightarrow \quad \det\Lambda = \pm 1 \qquad \uparrow \quad \rightarrow \quad \Lambda^0_0 > 0 \qquad \downarrow \quad \rightarrow \quad \Lambda^0_0 < 0 \tag{2.22}$$

Tenslotte kunnen we $1a$ samen nemen met I, S en T. Dit wordt de volledige homogene Lorentzgroep genoemd notatie $O(1,1) = (L^{\uparrow}_{+}, S, T, I)$. Merk op dat in één ruimtelijke dimensie geen rotaties voorkomen, zodat $L^{\uparrow}_{+}$ alleen speciale Lorentz-transformaties bevat (boosts).
De betekenis van χ kan als volgt worden uitgelegd. Stel $\Lambda \in L^{\uparrow}_{+}$ dan

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\chi & \sinh\chi \\ \sinh\chi & \cosh\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

waarbij de coördinaten in S en S' gegeven worden door respectievelijk (ct, x_3) en (ct', x'_3). Stel $x'_3 = 0$ dan

$$x'_3 = ct\,\sinh\chi + x_3\,\cosh\chi = 0 \quad \rightarrow \quad v = \frac{x_3}{t} = -c\tanh\chi = \text{constant} \tag{2.24}$$

Verder definieer

$$\beta = \frac{v}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\tanh\chi = -\beta \quad \rightarrow \quad \cosh\chi = \gamma \qquad \sinh\chi = -\beta\,\gamma$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\,\gamma \\ -\beta\,\gamma & \gamma \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v\,x_3}{c^2}\right) \quad x_3' = \gamma\,(x_3 - v\,t) \tag{2.25}$$

Het verschil tussen de Lorentz-transformaties en de Galilei-transformatie is vooral opvallend voor de tijds-transformatie. In het eerste geval is t' afhankelijk van de ruimte in het tweede geval niet. Voor drie ruimtelijke dimensies kan men (2.25) generaliseren. De Lorentz-transformaties worden

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\vec{x}\cdot\vec{v}}{c^2}\right) \qquad \vec{x}' = \vec{x} + (\gamma - 1)\frac{\vec{x}\cdot\vec{v}}{v^2}\,\vec{v} - \gamma\,\vec{v}\,t \tag{2.26}$$

Lorentz-Fitzgerald contractie:

beweging in de $+z$-richting	beginpunt	eindpunt
staaf in rust in systeem S'	$(ct', 0, 0, z_1')$	$(ct', 0, 0, z_2')$
staaf met snelheid v in systeem S	$(ct, 0, 0, z_1)$	$(ct, 0, 0, z_2)$

$$z_1' = \gamma(z_1 - v\,t) \qquad z_2' = \gamma(z_2 - v\,t) \qquad L_z = z_1 - z_2$$

$$L_z' = z_1' - z_2' = \gamma\,L_z \quad \text{of} \quad L_z = \sqrt{1-\beta^2}\,L_z' < L_z' \tag{2.27}$$

Het volume in S' en S wordt respectievelijk gegeven door $V' = L_x' L_y' L_z'$ en $V = L_x L_y L_z$. De transformatie luidt

$$V' = \gamma V \quad \text{of} \quad V = \sqrt{1-\beta^2}\,V' < V' \tag{2.28}$$

Tijds-dilatatie:
Stel de beweging is in de $+z$-richting en de klok staat in rust in S' in de oorsprong d.w.z. de klok heeft de coördinaten $(ct', 0, 0, 0)$. In systeem S heeft de klok de coördinaten $(ct, 0, 0, vt)$. De transformatie wordt

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v\,x_3}{c^2}\right) = \gamma\,t\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = t\sqrt{1-\beta^2}$$

$$\rightarrow \quad t = \frac{t'}{\sqrt{1-\beta^2}} > t' \tag{2.29}$$

Aangezien de metriek in de Minkowski-ruimte indefiniet is kunnen we drie soorten vier-vectoren onderscheiden

$$\begin{aligned} &x^2 > 0 \quad \text{of} \quad c^2t^2 > |\vec{x}|^2 \quad x \text{ is tijdachtig} \\ &x^2 = 0 \quad \text{of} \quad c^2t^2 = |\vec{x}|^2 \quad x \text{ is lichtachtig} \\ &x^2 < 0 \quad \text{of} \quad c^2t^2 < |\vec{x}|^2 \quad x \text{ is ruimteachtig} \end{aligned} \tag{2.30}$$

De lichtkegel wordt gedefinieerd door de vergelijking $x^2 = 0$. Als $x^2 > 0$ dan ligt de vier-vector binnen de lichtkegel. De voorwaartse lichtkegel is gegeven door $x^2 > 0$ en $t > 0$. De achterwaartse lichtkegel is gegeven door $x^2 > 0$ en $t < 0$. Als $x^2 < 0$ dan ligt de vier-vector buiten de lichtkegel. Verder hebben wij de eigenschappen

a De punten op de lichtkegel zijn de punten die door lichtsignalen met de oorsprong $x^\mu = 0$ zijn verbonden.

b De punten die buiten de lichtkegel vallen zijn punten die niet bereikt kunnen worden via een lichtsignaal met de oorsprong.

c De punten binnen de lichtkegel zijn de punten die met een signaal met snelheid $v < c$ vanaf de oorsprong kunnen worden bereikt. Vandaar dat alle mogelijke banen door de oorsprong bestaan uit punten binnen de lichtkegel.

In de klassieke (niet-relativistische) mechanica wordt de beweging van een punt-deeltje beschreven door $\vec{x}(t)$ waarbij t (de tijd) een externe parameter is. Aangezien in de relativiteitstheorie $\vec{x}$ en t in elkaar kunnen worden getransformeerd moeten $\vec{x}$ en t op dezelfde manier worden behandeld. Dit betekent dat wij naar een externe parameter moeten zoeken die Lorentz-invariant is. Deze parameter is de wereldtijd of eigen-tijd τ. De baan van een deeltje wordt beschreven door $x_\mu(\tau)$ met $x^2(\tau) > 0$. In het rust-systeem van het deeltje krijgt men $x^2(\tau) = c^2t^2 = c^2\tau^2$ m.a.w. τ is de tijd die gemeten wordt door een klok die op het deeltje bevestigd is. In het systeem waarin het deeltje beweegt met snelheid v is de tijd t gelijk aan

$$t = \gamma\,\tau \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{2.31}$$

De wereld-snelheid of vier-snelheid is gedefinieerd door

$$V_\mu = \frac{d\,x_\mu}{d\,\tau} \quad \Rightarrow \quad V = (\gamma c, \gamma \vec{v}) \quad \rightarrow \quad V^2 = c^2 > 0 \tag{2.32}$$

De vier-impuls is gedefinieerd door

$$p_\mu = mV_\mu \quad \Rightarrow \quad p = (m\,\gamma\,c, m\,\gamma\,\vec{v}) \tag{2.33}$$

of

$$p = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \quad \Rightarrow \quad E^2 = |\vec{p}|^2\,c^2 + m^2\,c^4 \tag{2.34}$$

Hier stelt E de energie voor. In rust is $\vec{p} = 0$ of $E = m\,c^2$. Vandaar dat m de rust-massa wordt genoemd. Merk op dat m een Lorentz-invariant is in tegenstelling tot E en $\vec{p}$. De relativistische massa, gedefinieerd door $m' = \gamma\,m$ is geen Lorentz-invariant. Hetzelfde geldt voor de kinetische energie gedefinieerd door $T = E - m\,c^2$. De reden is dat

$$p = (m\,\gamma\,c, m\,\gamma\,\vec{v}) = (m'\,c, m'\,\vec{v}) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \tag{2.35}$$

Vertaling van de wetten van Newton in de klassieke mechanica naar de relativistische mechanica. De eerste wet wordt gegeven door

$$\frac{d\,p_\mu}{d\,\tau} = 0 \tag{2.36}$$

Hieruit volgt dat impuls en energie behouden zijn mits er geen uitwendige kracht is. Definitie vier-kracht

$$K_\mu = \frac{d\,p_\mu}{d\,\tau} \tag{2.37}$$

Hieruit volgt

$$p_\mu p^\mu = m^2\,c^2 \quad \rightarrow \quad \frac{d\,p_\mu}{d\,\tau} p^\mu = K_\mu p^\mu = K\,p = 0 \tag{2.38}$$

Verder hebben wij

$$\vec{F} = \frac{d\,\vec{p}}{d\,t} = \frac{1}{\gamma}\frac{d\,\vec{p}}{d\,\tau} = \frac{1}{\gamma}\vec{K} \quad \text{zodat} \quad K = \left(\frac{\gamma}{c}\vec{F}\cdot\vec{v}, \gamma\,\vec{F}\right) \tag{2.39}$$

Bewijs

$$K\,p = \frac{\gamma}{c}(\vec{F}\cdot\vec{v})\,m\,\gamma\,c - \gamma\,\vec{F}\,m\,\gamma\,\vec{v} = 0 \tag{2.40}$$

$$K_\mu = \frac{d\,p_\mu}{d\,\tau} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \frac{d\,m'\,\vec{v}}{d\,t} \quad \text{en} \quad \vec{F}\cdot\vec{v} = \frac{d\,m'\,c^2}{d\,t} = \frac{d\,E}{d\,t} \tag{2.41}$$

Het Lagrange-formalisme in de speciale relativiteitstheorie is analoog aan die beschreven voor de klassieke mechanica waarbij t door τ vervangen wordt. De gegeneraliseerde coördinaten worden gegeven door $q_i(\tau)$ $i = 1, 2, \cdots, n$. De Lagrange-functie ziet eruit als

$$L \equiv L\left(q_i(\tau), \frac{d\,q_i(\tau)}{d\,\tau}, \tau\right) = L\left(q_i(\tau), \dot{q}_i(\tau), \tau\right) \tag{2.42}$$

en de actie wordt gegeven door

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\,\tau\, L\left(q_i(\tau), \dot{q}_i(\tau), \tau\right) \tag{2.43}$$

Verder hebben we

$$\frac{d}{d\,\tau}\frac{\partial\,L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial\,L}{\partial q_i} \quad \text{Lagrange-vergelijking}$$

$$p_i = \frac{\partial\,L}{\partial\,\dot{q}_i} \quad \text{kanonieke impuls} \tag{2.44}$$

De bewegingsvergelijkingen en de behoudswetten hebben dezelfde vorm als in de klassieke mechanica waarbij t wordt vervangen door τ. Bijvoorbeeld de Lagrange-functie en de bewegingsvergelijking voor een vrij deeltje ziet eruit als

$$L = \frac{1}{2}\, m\, \frac{d\, x_\mu(\tau)}{d\, \tau} \frac{d\, x^\mu(\tau)}{d\, \tau} \qquad m\, \ddot{x}_\mu(\tau) = 0 \tag{2.45}$$

In het geval van drie ruimtelijke dimensies is de Lorentzgroep $L_+^\uparrow$ of $SO(3,1)$ een zes-parameter-groep. De elementen worden gegeven door
A. Rotaties rondom x-, y- en z-as.

$$\Lambda_x(\theta_1) = \exp\left(\theta_1 I_{23}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ 0 & 0 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \qquad I_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.46}$$

$$\Lambda_y(\theta_2) = \exp\left(\theta_2 I_{31}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_2 & 0 & \sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \qquad I_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.47}$$

$$\Lambda_z(\theta_3) = \exp\left(\theta_3 I_{12}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 \\ 0 & \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.48}$$

B. Speciale Lorentz-transformaties (boosts) in de x-, y- en z-richting.

$$\Lambda_x(\chi_1) = \exp\left(\chi_1 I_{01}\right) = \begin{pmatrix} \cosh\chi_1 & \sinh\chi_1 & 0 & 0 \\ \sinh\chi_1 & \cosh\chi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.49}$$

$$\Lambda_y(\chi_2) = \exp\left(\chi_2 I_{02}\right) = \begin{pmatrix} \cosh\chi_2 & 0 & \sinh\chi_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh\chi_2 & 0 & \cosh\chi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.50}$$

$$\Lambda_z(\chi_3) = \exp\left(\chi_3 I_{03}\right) = \begin{pmatrix} \cosh\chi_3 & 0 & 0 & \sinh\chi_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\chi_3 & 0 & 0 & \cosh\chi_3 \end{pmatrix} \qquad I_{03} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.51}$$

De Lie-algebra wordt gegeven door de elementen $I_{\alpha\beta}$ zodat

$$\Lambda(\omega) = \exp\left(\omega^{\alpha\beta}\, I_{\alpha\beta}\right) \quad \text{met} \quad \omega^{\alpha\beta} = -\omega^{\beta\alpha} \qquad I_{\alpha\beta} = -I_{\beta\alpha}$$

$$\text{rotaties} \quad \omega^{23} = \frac{\theta_1}{2} \qquad \omega^{31} = \frac{\theta_2}{2} \qquad \omega^{12} = \frac{\theta_3}{2}$$

$$\text{boosts} \quad \omega^{01} = \frac{\chi_1}{2} \qquad \omega^{02} = \frac{\chi_2}{2} \qquad \omega^{03} = \frac{\chi_3}{2} \tag{2.52}$$

$I_{\alpha\beta}$ is gedefinieerd door

$$I_{\alpha\beta} \equiv \left.\frac{d\ \Lambda(\omega)}{d\ \omega^{\alpha\beta}}\right|_{\omega^{\alpha\beta}=0} \qquad (I_{\mu\nu})^{\beta}_{\alpha} = g_{\mu\alpha}\,\delta^{\beta}_{\nu} - g_{\nu\alpha}\,\delta^{\beta}_{\mu}$$

$$(I_{ij})^{\beta}_{\alpha} = -\,(I_{ij})^{\alpha}_{\beta} \quad \text{rotaties} \qquad (I_{0i})^{\beta}_{\alpha} = (I_{0i})^{\alpha}_{\beta} \quad \text{boosts} \tag{2.53}$$

en voldoet aan de volgende commutatie-relaties

$$[I_{\mu\nu}, I_{\rho\sigma}] = g_{\nu\rho}I_{\mu\sigma} - g_{\nu\sigma}I_{\mu\rho} - g_{\mu\rho}I_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}I_{\nu\rho} \tag{2.54}$$

Deze generatoren kunnen ook geschreven worden als

$$K_1 = I_{23} \qquad K_2 = I_{31} \qquad K_3 = I_{12}$$

$$B_1 = I_{01} \qquad B_2 = I_{02} \qquad B_3 = I_{03}$$

$$[K_i, K_j] = \epsilon_{ijl}\, K_l \qquad [K_i, B_j] = \epsilon_{ijl}\, B_l \qquad [B_i, B_j] = -\epsilon_{ijl}\, K_l \tag{2.55}$$

Merk op dat $SO(3) \subset L^{\uparrow}_{+}$ en dus $\mathcal{L}(SO(3)) \subset \mathcal{L}(L^{\uparrow}_{+})$. Dit betekent dat $SO(3)$ een onder-groep van $L^{\uparrow}_{+}$ en $\mathcal{L}(SO(3))$ een deel-algebra van $\mathcal{L}(L^{\uparrow}_{+})$ is. In (2.55) kan men zien dat de commutator van twee generatoren van $SO(3)$ weer een generator van $SO(3)$ oplevert. Echter de boosts vormen geen onder-groep van $L^{\uparrow}_{+}$. Dit heeft te maken met het feit dat $\{B_i\}$ in (2.55) geen deel-algebra van $\mathcal{L}(L^{\uparrow}_{+})$ is. Hier levert de commutator van twee boosts geen boost meer op zodat de laatste verzameling niet gesloten is (zie (1.36)). Voor rotaties kunnen wij uit het gedrag van de generator I_{ij} in (2.53) het volgende afleiden voor $\Lambda(\omega) = exp\{\omega^{ij}\, I_{ij}\}$ in (2.52)

$$\Lambda(\omega) \in SO(3) \quad \rightarrow \quad (\Lambda^{-1}(\omega))^{\alpha}_{\beta} = (\Lambda(\omega))^{\beta}_{\alpha} = (\Lambda^{T}(\omega))^{\alpha}_{\beta} = (\Lambda^{\dagger}(\omega))^{\alpha}_{\beta} \tag{2.56}$$

m.a.w. voor rotaties is $\Lambda(\omega)$ unitair ($\Lambda^{\dagger} = \Lambda^{-1}$). De laatste stap in (2.56) volgt uit het feit dat $\Lambda(\omega)$ reëel is. Verder kunnen we uit (2.56) concluderen dat

$$x'_{\mu} = (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu} x_{\nu} = (\Lambda)^{\mu}_{\nu} x_{\nu} \quad \text{echter ook geldt} \quad x'^{\mu} = (\Lambda)^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \tag{2.57}$$

m.a.w. x_{μ} transformeert hetzelfde als x^{μ} (zie (2.9)). Dit betekent dat men co-variante en contra-variante indices, die voorkomen in tensoren van de rotatie-groep, met elkaar

kunnen identificeren. Echter als $\Lambda \notin SO(3)$ dan is Λ niet unitair ($\Lambda^{-1} \neq \Lambda^\dagger$) zodat bijvoorbeeld voor de boosts, contra-variante en co-variante indices verschillend zijn. Het feit dat $\Lambda^{-1} \neq \Lambda^\dagger$ voor de boosts volgt uit het gedrag van de generator I_{0i} in (2.53).
Men kan nu de groep $SO(3,1) = L_+^\uparrow$ uitbreiden tot de groep $O(3,1)$ door de ruimtelijke inversie S, de tijds-omkeer T en de totale inversie I hieraan toe te voegen tot $O(3,1) = \{SO(3,1), S, T, I\}$ waarbij

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.58}$$

De verzameling (E, S, T, I) vormen een discrete (eindige) onder-groep van $O(3,1)$ de zgn. vier-groep. Analoog aan de Galilei-groep kunnen we de volledige Lorentzgroep $O(3,1)$ uitbreiden met de ruimte-tijds-translaties gegeven door

$$x_\mu \quad \rightarrow \quad x'_\mu = x_\mu + a_\mu \quad \text{translatie-groep } T_4 \tag{2.59}$$

Deze nieuwe groep wordt de inhomogene Lorentzgroep of Poincarégroep genoemd (notatie $O(3,1)\Box T_4$). De algemene transformatie behorende tot de Poincarégroep kan geschreven worden als

$$x_\mu \quad \rightarrow \quad x'_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu + a_\mu \qquad \Lambda \in O(3,1) \qquad a \in T_4 \tag{2.60}$$

Een element van $O(3,1)\Box T_4$ kan worden aangeduid met (a, Λ). De groepsvermenigvuldiging ziet er dan uit als

$$(a_1, \Lambda_1)\,(a_2, \Lambda_2) = (a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1 \Lambda_2) \tag{2.61}$$

De matrix-representatie voor (a, Λ) luidt:

$$A = \begin{pmatrix} \Lambda & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.62}$$

Dit is een 5×5-matrix. Men kan nu de Lie-algebra van de Lie-groep $SO(3,1)\Box T_4$ of $L_+^\uparrow \Box T_4$ bepalen. Deze wordt gegeven door

$$\begin{aligned} &\bar{I}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} I_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_\mu = \begin{pmatrix} \emptyset & e_\mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &(\bar{I}_{\mu\nu})_\alpha^\beta = g_{\mu\alpha}\,\delta_\nu^\beta - g_{\nu\alpha}\,\delta_\mu^\beta \qquad \mu,\nu = 0,1,2,3 \qquad \alpha,\beta = 0,1,2,3,4 \\ &(P_\mu)_\alpha^\beta = \delta_\alpha^4\,\delta_\mu^\beta \end{aligned} \tag{2.63}$$

De generatoren voldoen aan de volgende commutatie-relaties

$$[\bar{I}_{\mu\nu}, \bar{I}_{\rho\sigma}] = g_{\nu\rho}\,\bar{I}_{\mu\sigma} - g_{\nu\sigma}\,\bar{I}_{\mu\rho} - g_{\mu\rho}\,\bar{I}_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}\,\bar{I}_{\nu\rho}$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0$$

$$[P_\mu, \bar{I}_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho}\,P_\sigma - g_{\mu\sigma}\,P_\rho \tag{2.64}$$

In de natuurkunde wordt heel vaak de Lie-algebra gecomplexificeerd en schrijft men

$$M_{\mu\nu} = i\,\bar{I}_{\mu\nu} \qquad M^\dagger_{\mu\nu} = M_{\mu\nu} \quad \text{hermitisch} \tag{2.65}$$

P_μ laat men onveranderd ($P^\dagger_\mu = P_\mu$).

2.3 Tensoren van de Lorentzgroep $O(3,1)$

De procedure om tensoren behorende bij de groep $O(3,1)$ te construeren is analoog aan die voor de groep $O(3)$ behalve dat we nu een onderscheid moeten maken tussen co-variant en contra-variante indices. Definieer de product-ruimte

$$V^q_p = V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_p \otimes V^*_1 \otimes V^*_2 \otimes \cdots \otimes V^*_q \tag{2.66}$$

waarbij V en zijn duale ruimte V^* n-dimensionaal zijn. Verder verschijnt in bovenstaand product V p-maal en V^* q-maal. Hieruit volgt $\dim V^q_p = n^{p+q}$. Voor de Minkowski-ruimte geldt $n = 4$. Wij kiezen in V^q_p de basis

$$e^{\nu_1\cdots\nu_q}_{\mu_1\cdots\mu_p} = e_{\mu_1} \otimes e_{\mu_2} \otimes \cdots e_{\mu_p} \otimes e^{\nu_1} \otimes e^{\nu_2} \otimes \cdots e^{\nu_q} \tag{2.67}$$

Een tensor van rang $p + q$ wordt dan gegeven door

$$\vec{\vec{T}} = T^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\nu_1\cdots\nu_q}\, e^{\nu_1\cdots\nu_q}_{\mu_1\cdots\mu_p} \tag{2.68}$$

met de componenten $T^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\nu_1\cdots\nu_q}$ (p contra-variante indices, q co-variante indices). De transformatie-eigenschappen onder de groep $O(3,1)$ zijn

$$e'^{\nu_1\cdots\nu_q}_{\mu_1\cdots\mu_p} = \Lambda^{\lambda_1}_{\mu_1}\,\Lambda^{\lambda_2}_{\mu_2}\cdots\Lambda^{\lambda_p}_{\mu_p}\,(\Lambda^{-1})^{\nu_1}_{\sigma_1}\,(\Lambda^{-1})^{\nu_2}_{\sigma_2}\cdots(\Lambda^{-1})^{\nu_q}_{\sigma_q} e^{\sigma_1\cdots\sigma_q}_{\lambda_1\cdots\lambda_p}$$

$$T'^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\nu_1\cdots\nu_q} = (\det\Lambda)^W\,\Lambda^{\sigma_1}_{\nu_1}\,\Lambda^{\sigma_2}_{\nu_2}\cdots\Lambda^{\sigma_q}_{\nu_q}\,(\Lambda^{-1})^{\mu_1}_{\lambda_1}\,(\Lambda^{-1})^{\mu_2}_{\lambda_2}\cdots(\Lambda^{-1})^{\mu_p}_{\lambda_p}$$

$$T^{\lambda_1\cdots\lambda_p}_{\sigma_1\cdots\sigma_q} \tag{2.69}$$

$$W = 0 \quad \to \quad \vec{\vec{T}} \text{ is een tensor}$$

$$W = -1 \quad \to \quad \vec{\vec{T}} \text{ is een pseudo-tensor} \tag{2.70}$$

Tensor-eigenschappen:

1 Optelling van tensoren

$$S^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\nu_1\cdots\nu_q} = T^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\nu_1\cdots\nu_q} + P^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\nu_1\cdots\nu_q} \tag{2.71}$$

Het aantal boven-indices en het aantal beneden-indices van T en P moeten aan elkaar gelijk zijn.

2 Tensor-product:

$$S^{\mu_1\cdots\mu_{k+m}}_{\nu_1\cdots\nu_{l+n}} = T^{\mu_1\cdots\mu_k}_{\nu_1\cdots\nu_l}\, P^{\mu_{k+1}\cdots\mu_{k+m}}_{\nu_{l+1}\cdots\nu_{l+n}} \tag{2.72}$$

Bovenstaande tensor heeft rang $k + m + l + n$.

3 Tensor-contractie

$$S^{\mu_1\cdots\mu_k\nu_{k+1}\cdots\nu_{k+m}}_{\mu_1\cdots\mu_k\mu_{k+1}\cdots\mu_{k+n}} = \bar{S}^{\nu'_1\cdots\nu'_m}_{\mu'_1\cdots\mu'_n} \tag{2.73}$$

Bovenstaande tensor heeft rang $m + n$.

De invariante (pseudo-) tensoren zijn:

a Scalairen zijn tensoren van rang nul. Voorbeelden zijn de massa m, de lichtsnelheid c en

$$x^2 = x_\mu x^\mu \qquad\qquad S^{\mu_1\cdots\mu_k}_{\mu_1\cdots\mu_k} \tag{2.74}$$

b Tensoren van rang twee die gegeven worden door

$$g_{\mu\nu} \qquad g^{\mu\nu} \qquad \delta^\nu_\mu \tag{2.75}$$

c De Levi-Civita tensoren (pseudo-tensor van rang vier)

$$\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \qquad \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \quad \text{met} \quad \epsilon_{0123} = 1 \quad \rightarrow \quad \epsilon^{0123} = -1 \tag{2.76}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} &= 1 \quad \text{als } \mu\nu\lambda\sigma \text{ een even permutatie is van 0123} \\ \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} &= -1 \quad \text{als } \mu\nu\lambda\sigma \text{ een oneven permutatie is van 0123} \end{aligned} \tag{2.77}$$

Bovenstaande eigenschappen volgen uit

$$\begin{aligned} \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} &= g^{\mu\mu'}\, g^{\nu\nu'}\, g^{\lambda\lambda'}\, g^{\sigma\sigma'}\, \epsilon_{\mu'\nu'\lambda'\sigma'} \\ \epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} &= (\det\Lambda)^{-1} \Lambda^{\nu_1}_{\mu_1}\, \Lambda^{\nu_2}_{\mu_2}\, \Lambda^{\nu_3}_{\mu_3}\, \Lambda^{\nu_4}_{\mu_4}\, \epsilon_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} \end{aligned} \tag{2.78}$$

2.4 Representaties (algemeen)

Tot nu toe hebben we alle groepstransformaties door matrices voorgesteld, die werken in de plaats-ruimte waaronder ook de tijds-component wordt verstaan. Dezelfde matrices gelden ook als de plaats-ruimte wordt vervangen door de impuls-ruimte waaronder ook de energie-component wordt verstaan.
Echter groepselementen kunnen ook op andere wijzen worden voorgesteld. Deze voorstellingen worden representaties genoemd. Noem de representatie van een groep G: $D(G)$. In dit geval is D een afbeelding die homomorfisme wordt genoemd.

$$G \xrightarrow{D} D(G) \quad \text{met} \quad D(g_1 \cdot g_2) = D(g_1)\, D(g_2) \quad g_i \in G \tag{2.79}$$

$D(g)$ is een representatie die in een of andere vector-ruimte werkt. Een representatie heet getrouw als geldt

$$D(g) = 1 \Longleftrightarrow g = e \quad e \text{ is eenheidselement} \tag{2.80}$$

In dit geval wordt D een isomorfisme genoemd. Men kan laten zien dat voor de Lie-algebra geldt

$$\mathcal{L}(G) \xrightarrow{D} D(\mathcal{L}(G)) \quad \text{met} \quad D([L_1, L_2]) = [D(L_1), D(L_2)] \quad L_i \in \mathcal{L}(G) \tag{2.81}$$

Zoals hierboven vermeld werd in het voorafgaande de vector-ruimte gegeven door de plaatsruimte (Minkowski-ruimte) en $D(G)$, $D(\mathcal{L}(G))$ stelden de verzameling van matrices voor. Echter we kunnen ook andere representaties kiezen

1 V is de spinor-ruimte $\chi^{(s)}$ $s = \pm 1/2$

$$\chi^{(1/2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \chi^{(-1/2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.82}$$

De groep wordt gegeven door $G = SU(2)$ en de Lie-algebra wordt gegeven door $\{K_i\} \in \mathcal{L}(SO(3)) = \mathcal{L}(SU(2))$

$$[K_i, K_j] = \epsilon_{ijl}\, K_l \qquad i, j, l = 1, 2, 3 \tag{2.83}$$

Neem nu als representatie de Pauli-spin-matrices σ_l met

$$K_l = -i\frac{1}{2}\sigma_l \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.84}$$

Zie college quantumfysica 2

2 De ruimte V bestaat uit golf-functies $\psi(\vec{r})$ (Hilbert-ruimte) in de niet-relativistische kwantummechanica. De groep is $G = SO(3)$ en de generatoren van de Lie-algebra zijn

$$K_l = -i\, L_l \quad \text{met} \quad \vec{L} = -i\, \vec{r} \times \vec{\nabla} \qquad \partial_k \equiv \frac{\partial}{\partial\, x_k}$$

$$L_1 = -i(x_2\, \partial_3 - x_3\, \partial_2) \qquad L_2 = -i(x_3\, \partial_1 - x_1\, \partial_3) \qquad L_3 = -i(x_1\, \partial_2 - x_2\, \partial_1)$$

$$\rightarrow \quad [L_i, L_j] = i\, \epsilon_{ijk}\, L_k \qquad L_l = -i\, \epsilon_{lmn}\, x_m\, \partial_n \tag{2.85}$$

$\vec{L}$ is de impulsmomentoperator.

3 De drie-dimensionale harmonische oscillator in de niet-relativistische kwantummechanica. Definieer creatie- $a_i^\dagger$ en annihilatie-operatoren a_i die voldoen aan

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} \tag{2.86}$$

De representatie-ruimte V is de Hilbert-ruimte van harmonische oscillator- toestanden en $G = SO(3)$. De generatoren van de Lie-algebra zijn

$$K_i = \epsilon_{ijk}\, a_j\, a_k^\dagger \quad \rightarrow \quad [K_i, K_j] = \epsilon_{ijl}\, K_l \tag{2.87}$$

4 De ruimte van klassieke velden $\phi(x)$ waarbij x een vier-vector is in de Minkowski ruimte. In dit geval is $G = O(3,1)\Box T_4$ (Poincaré-groep). De generatoren van de Lie-algebra worden gegeven door

$$P_\mu = i\, \partial_\mu \qquad M_{\mu\nu} = i\, (x_\mu\, \partial_\nu - x_\nu\, \partial_\mu) \qquad M_{\mu\nu}^\dagger = M_{\mu\nu} \qquad M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i\Big(g_{\nu\rho}\, M_{\mu\sigma} - g_{\nu\sigma}\, M_{\mu\rho} - g_{\mu\rho}\, M_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}\, M_{\nu\rho}\Big)$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0$$

$$[P_\mu, M_{\rho\sigma}] = i\Big(g_{\mu\rho}\, P_\sigma - g_{\mu\sigma}\, P_\rho\Big) \tag{2.88}$$

De eigenschappen van de partiële afgeleide zijn

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial\, x^\mu} \quad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial\, x_\mu} \quad \partial_0 = \partial^0 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial\, t} \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial\, x^i} = -\frac{\partial}{\partial\, x_i} = -\partial^i \tag{2.89}$$

Bewijs dat ∂_μ co-variant is

$$\partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial\, x'^\mu} = \frac{\partial\, x^\nu}{\partial\, x'^\mu}\frac{\partial}{\partial\, x^\nu} = \frac{\partial\, x^\nu}{\partial\, x'^\mu}\partial_\nu \tag{2.90}$$

Verder geldt

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu\, x^\nu \quad \rightarrow \quad x^\nu = (\Lambda^{-1})^\nu_\lambda\, x'^\lambda \tag{2.91}$$

waaruit volgt

$$\frac{\partial\ x^{\nu}}{\partial\ x'^{\mu}} = (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\lambda} \frac{\partial\ x'^{\lambda}}{\partial\ x'^{\mu}} = (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\lambda}\, \delta^{\lambda}_{\mu} = (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu} \quad \Rightarrow \quad \partial'_{\mu} = (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu}\, \partial_{\nu} \tag{2.92}$$

Dus ∂_μ transformeert co-variant. Op dezelfde manier kan men laten zien dat ∂^μ contra-variant transformeert.

In bovenstaande voorbeelden hebben we alleen de representaties van de Lie-algebras gegeven. De groepsrepresentaties verkrijgt men door hiervan de exponent te nemen. Merk op dat in de literatuur de begrippen representatie-ruimte en representatie door elkaar worden gehaald. Zo spreekt men over vector-, tensor-, spinor-, golf-functie- en veld-representatie. Bijvoorbeeld is x_μ de vector-representatie van $O(3,1)$ of $M_{\mu\nu}$ is de tensor-representatie van $\mathcal{L}(O(3,1))$.

3 Relativistische Klassieke Velden-theorie

Een relativistisch klassiek veld, notatie $\varphi_r(\vec{x},t) \equiv \varphi_r(x)$, is een functie gedefinieerd op ruimte en tijd. Dit veld voldoet aan een covariante differentiaalvergelijking. Verder geldt dat $\varphi_r(x)$ een representatie van een bepaalde symmetrie-groep is waarbij r de representatie-index voorstelt.
In dit college wordt de symmetrie-groep gegeven door de Lorentzgroep of Poincarégroep. Een klassiek veld kan opgevat worden als een object dat een systeem beschrijft met een oneindig aantal vrijheidsgraden. In de klassieke mechanica kan een systeem met N deeltjes door n onafhankelijke gegeneraliseerde coördinaten $q_i(t)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ worden beschreven. Men kan nu de index i continu nemen m.a.w. $q_i(t) \;\to q(i,t)$ wordt een functie van i en t. Als we voor i de ruimtelijke coördinaten $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ nemen dan wordt $q(\vec{x},t)$ een klassiek veld.

3.1 Het reéle scalaire (spin nul) veld

Het scalaire vrije veld voldoet aan de Klein-Gordon-vergelijking

$$\left(\Box + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\phi(x) = 0 \quad \text{met} \quad \Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu \tag{3.1}$$

Het symbool $\Box$ wordt de d'Alembertiaan genoemd. Dit is een scalaire grootheid onder de Lorentzgroep. Het kan worden geschreven als

$$\Box = \frac{\partial^2}{c^2\partial\, t^2} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial\, x_i^2} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} \equiv \Delta = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial\, x_i^2} \tag{3.2}$$

Hierbij is Δ de Laplaciaan. Verder is $\hbar = h/2\pi$ waarbij h de constante van Planck is. Deze wordt hier ingevoerd omdat later dit veld gekwantiseerd wordt. Dit veld wordt ook wel Klein-Gordon-veld genoemd. De meest algemene oplossing van de Klein-Gordon-vergelijking ziet eruit als

$$\phi(x) = \int d^3\vec{p}\left[a(\vec{p})\, f_p(x) + a^*(\vec{p})\, f_p^*(x)\right] \tag{3.3}$$

met

$$\left(\Box + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right) f_p(x) = 0 \qquad \left(\Box + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right) f_p^*(x) = 0 \tag{3.4}$$

De oplossingen zijn

$$f_p(x) = A\, e^{-i\,px/\hbar} \qquad f_p^*(x) = A\, e^{i\,px/\hbar}$$

$$p = (\frac{E}{c}, \vec{p}) \qquad E = \sqrt{m^2c^4 + |\vec{p}|^2c^2} \qquad \frac{px}{\hbar} = \frac{1}{\hbar}(E\,t - \vec{p}\cdot\vec{x}) \tag{3.5}$$

Het veld $\phi(x)$ hebben wij geschreven als een Fourierreeksontwikkeling naar de vlakke golf-functies f_p, f_p^*. De grootheden $a(\vec{p})$, $a^*(\vec{p})$ zijn de Fourier-coëfficiënten. A is een reële normalisatie-constante die nog bepaald moet worden. Dit hangt af van de conventie die geïntroduceerd wordt. Definieer

$$(f,g) = \frac{i}{\hbar c}\int d^3\vec{x}\, f^*(x)\, \overleftrightarrow{\partial_0}\, g(x)$$

$$f^*(x)\, \overleftrightarrow{\partial_\mu}\, g(x) = f^*(x)(\partial_\mu g(x)) - (\partial_\mu f^*(x))g(x) \tag{3.6}$$

Bereken $(f_p, f_{p'})$

$$\begin{aligned}
(f_p, f_{p'}) &= i\frac{A^2}{\hbar c}\int d^3\vec{x}\, e^{-i\,\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar}\, e^{i\,\vec{p}'\cdot\vec{x}/\hbar}\Big(e^{i\,Et/\hbar}\frac{\partial}{c\partial\, t}e^{-i\,E't/\hbar} - e^{-i\,E't/\hbar}\frac{\partial}{c\partial\, t}e^{i\,Et/\hbar}\Big) \\
&= A^2\, e^{i\,(E-E')t/\hbar}\frac{E+E'}{(\hbar c)^2}\int d^3\vec{x}\, e^{-i\,(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{x}/\hbar} \\
&= A^2\, e^{i\,(E-E')t/\hbar}\frac{E+E'}{(\hbar c)^2}\,(2\pi)^3\,\delta^{(3)}\left(\frac{(\vec{p}-\vec{p}')}{\hbar}\right) \\
&= A^2\,\frac{2E}{(\hbar c)^2}\,(2\pi\hbar)^3\,\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Merk op dat uit $\vec{p}=\vec{p}'$ volgt $E = E'$. De eigenschappen van de delta-functie zijn

$$\delta^{(n)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int d^n k\, e^{\pm i\,kx} \qquad n = 1, 2, \cdots$$

$$\delta^{(n)}(x) = \delta(x_1)\delta(x_2)\cdots\delta(x_n)$$

$$\delta^{(n)}(ax) = \frac{1}{a^n}\delta^{(n)}(x) \tag{3.8}$$

Kies A nu zo dat $(f_p, f_{p'}) = \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')$. Men krijgt dan

$$A = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\frac{\hbar c}{\sqrt{2E}} \tag{3.9}$$

Verder kan men laten zien

$$(f_p^*, f_{p'}^*) = -\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}') \qquad (f_p^*, f_{p'}) = (f_p, f_{p'}^*) = 0$$

$$a(\vec{p}) = (f_p, \phi) \qquad a^*(\vec{p}) = -(f_p^*, \phi) \tag{3.10}$$

Merk op dat (f,g) geen norm definieert zoals dat in de niet-relativistische kwantum-mechanica het geval is. In het laatste geval moet voor elke golf-functie gelden

$$|\psi|^2 = (\psi,\psi) \geq 0 \tag{3.11}$$

De norm is definiet positief! In de velden-theorie is dit niet zo bijv. $(f_p^*, f_{p'}^*) < 0$. Vandaar dat $\phi(x)$ een veld is en geen golf-functie zoals men aanvankelijk gedacht had. Na de keuze van de normalisatie kunnen we voor het Klein-Gordon-veld schrijven

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \frac{\hbar c}{\sqrt{2E}} \Big[a(\vec{p})\, e^{-i\,p\cdot x/\hbar} + a^*(\vec{p})\, e^{i\,p\cdot x/\hbar} \Big] \tag{3.12}$$

Let op dat in de meeste veldentheorieboeken staat $\hbar = c = 1$.

3.2 Het complexe scalaire (spin nul) veld

Dit veld wordt gedefinieerd door

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1(x) + i\,\phi_2(x)) \tag{3.13}$$

waarbij $\phi_1(x)$ en $\phi_2(x)$ reële velden zijn die aan de Klein-Gordon-vergelijkingen voldoen zodat

$$\left(\Box + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \right) \phi(x) = 0 \qquad \left(\Box + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \right) \phi^*(x) = 0 \tag{3.14}$$

Hieruit volgen de oplossingen

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \frac{\hbar c}{\sqrt{2E}} \Big[a_+(\vec{p})\, e^{-i\,p\cdot x/\hbar} + a_-^*(\vec{p})\, e^{i\,p\cdot x/\hbar} \Big]$$

$$\phi^*(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \frac{\hbar c}{\sqrt{2E}} \Big[a_-(\vec{p})\, e^{-i\,p\cdot x/\hbar} + a_+^*(\vec{p})\, e^{i\,p\cdot x/\hbar} \Big] \tag{3.15}$$

Uit de definitie van $\phi(x)$ volgen de relaties

$$a_+(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1(\vec{p}) + i\,a_2(\vec{p})) \qquad a_-^*(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^*(\vec{p}) + i\,a_2^*(\vec{p}))$$

$$a_+^*(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^*(\vec{p}) - i\,a_2^*(\vec{p})) \qquad a_-(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1(\vec{p}) - i\,a_2(\vec{p})) \tag{3.16}$$

waarbij $a_i(\vec{p})$, $a_i^*(\vec{p})$ de Fouriercoëfficiënten van $\phi_i(x)$ zijn.

3.3 Het complexe Dirac (spin half) veld

Om spin-half-velden te beschrijven volgen we een procedure die ook in de niet-relativistische kwantummechanica is toegepast om spin-half golf-functies te beschrijven. Hiertoe voeren we spinoren en de Pauli-matrices in.

$$\sigma_x = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

met de eigenschappen

$$[\sigma_k, \sigma_l] = 2\, i\, \epsilon_{klm}\, \sigma_m \qquad \{\sigma_k, \sigma_l\} = 2\, \delta_{kl} \qquad \sigma_k^\dagger = \sigma_k$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_k\, \sigma_l = \delta_{kl} + i\, \epsilon_{klm}\, \sigma_m \tag{3.18}$$

De Pauli spinoren zijn

$$\chi^{(1/2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \chi^{(-1/2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z\, \chi^{(s)} = 2\, s\, \chi^{(s)} \tag{3.19}$$

Hierbij is $\chi^{(s)}$ een eigen-toestand van σ_z. In de bovenstaande representatie is de kwantisatie-as in de z-richting gekozen. Wordt een willekeurige richting $\vec{n}$ met $|\vec{n}| = 1$ als kwantisatie-as gekozen dan zijn de spinoren eigen-toestanden van $\vec{\sigma} \cdot \vec{n}$

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{n}\, \chi_n^{(s)} = 2\, s\, \chi_n^{(s)} \quad \text{met} \quad \vec{n} = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta)$$

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\varphi} \\ \sin\theta\, e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\chi_n^{(1/2)} = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \cos\theta/2 \\ e^{i\varphi/2} \sin\theta/2 \end{pmatrix} \qquad \chi_n^{(-1/2)} = \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi/2} \sin\theta/2 \\ e^{i\varphi/2} \cos\theta/2 \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

Uit (3.18) volgt

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{a}\, \vec{\sigma} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}\, \mathbf{1} + i\, \vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \qquad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad (\vec{\sigma} \cdot \vec{a})^2 = |\vec{a}|^2\, \mathbf{1} \tag{3.21}$$

Met behulp va het bovenstaande kunnen we de Klein-Gordon-vergelijking als volgt schrijven

$$\mathbf{1} \left(-\frac{\partial^2}{\partial\, (x^0)^2} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \right) \phi(x) = \left(-\mathbf{1}\, \frac{\partial^2}{\partial\, (x^0)^2} + (\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla})^2 \right) \phi(x) = \mathbf{1}\, \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\, \phi(x) \tag{3.22}$$

of

$$\left(i\, \hbar\, \mathbf{1}\, \frac{\partial}{\partial\, x^0} + i\, \hbar\, \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \right) \left(i\, \hbar\, \mathbf{1}\, \frac{\partial}{\partial\, x^0} - i\, \hbar\, \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \right) \phi(x) = \mathbf{1}\, m^2 c^2\, \phi(x) \tag{3.23}$$

Noem $\phi(x) \equiv \phi_L(x)$ dan definiëren we

$$\phi_R(x) = \frac{1}{mc} \left(i\, \hbar\, \mathbf{1}\, \frac{\partial}{\partial\, x^0} - i\, \hbar\, \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \right) \phi_L(x) \tag{3.24}$$

waarbij $\phi_R(x)$ en $\phi_L(x)$ twee-componentige vectoren zijn. We krijgen twee vergelijkingen

$$i\, \hbar \left(\mathbf{1}\, \frac{\partial}{\partial\, x^0} - \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \right) \phi_L(x) = \mathbf{1}\, mc\, \phi_R(x)$$

$$i\, \hbar \left(\mathbf{1}\, \frac{\partial}{\partial\, x^0} + \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \right) \phi_R(x) = \mathbf{1}\, mc\, \phi_L(x) \tag{3.25}$$

De betekenis van de begrippen rechts R en links L volgen later. Neem de som en het verschil van de vergelijkingen in (3.25)

$$i\hbar\left(\mathbf{1}\frac{\partial}{\partial\, x^0}\Big(\phi_R(x)+\phi_L(x)\Big)+\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\Big(\phi_R(x)-\phi_L(x)\Big)\right)=\mathbf{1}\,mc\Big(\phi_R(x)+\phi_L(x)\Big)$$

$$-i\hbar\left(\mathbf{1}\frac{\partial}{\partial\, x^0}\Big(\phi_R(x)-\phi_L(x)\Big)+\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\Big(\phi_R(x)+\phi_L(x)\Big)\right)=\mathbf{1}\,mc\Big(\phi_R(x)-\phi_L(x)\Big) \tag{3.26}$$

We voeren nu een vier-componentige spinor in die Dirac-spinor wordt genoemd. Deze wordt gegeven door

$$\psi(x)=\begin{pmatrix}\psi_A(x)\\ \psi_B(x)\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\phi_R(x)+\phi_L(x)\\ \phi_R(x)-\phi_L(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\psi_1(x)\\ \psi_2(x)\\ \psi_3(x)\\ \psi_4(x)\end{pmatrix}$$

$$\phi_R(x)+\phi_L(x)=\sqrt{2}\begin{pmatrix}\psi_1(x)\\ \psi_2(x)\end{pmatrix}\qquad \phi_R(x)-\phi_L(x)=\sqrt{2}\begin{pmatrix}\psi_3(x)\\ \psi_4(x)\end{pmatrix} \tag{3.27}$$

Men kan nu vergelijking (3.26) herschrijven in

$$i\hbar\begin{pmatrix}\mathbf{1}\frac{\partial}{\partial\, x^0} & \vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\\ -\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla} & -\mathbf{1}\frac{\partial}{\partial\, x^0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_A(x)\\ \psi_B(x)\end{pmatrix}=mc\begin{pmatrix}\psi_A(x)\\ \psi_B(x)\end{pmatrix} \tag{3.28}$$

Definieer de vier bij vier γ-matrices (Dirac-representatie)

$$\gamma^0=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \emptyset\\ \emptyset & -\mathbf{1}\end{pmatrix}\qquad \gamma^k=\begin{pmatrix}\emptyset & \sigma_k\\ -\sigma_k & \emptyset\end{pmatrix}\qquad k=1,2,3\quad\text{of}\quad k=x,y,z \tag{3.29}$$

Verder hebben we de conventies

$$\vec{\nabla}=(\frac{\partial}{\partial\, x},\frac{\partial}{\partial\, y},\frac{\partial}{\partial\, z})=(\frac{\partial}{\partial\, x^1},\frac{\partial}{\partial\, x^2},\frac{\partial}{\partial\, x^3})=(\partial_1,\partial_2,\partial_3)\qquad \partial_0=\frac{\partial}{\partial\, x^0} \tag{3.30}$$

In deze notatie ziet vergelijking (3.28) eruit als

$$i\hbar\begin{pmatrix}\mathbf{1}\partial_0 & \sigma_k\partial_k\\ -\sigma_k\partial_k & -\mathbf{1}\partial_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_A(x)\\ \psi_B(x)\end{pmatrix}=mc\begin{pmatrix}\psi_A(x)\\ \psi_B(x)\end{pmatrix} \tag{3.31}$$

Bovenstaande vergelijking kan nog korter geschreven worden

$$(i\hbar\,\gamma^\mu\,\partial_\mu-mc)\;\psi(x)=0\qquad\text{Dirac-vergelijking} \tag{3.32}$$

Aangezien $\phi_R(x)$, $\phi_L(x)$ aan de Klein-Gordon-vergelijking (3.1) voldoen, voldoet $\psi(x)$ hier ook aan. Hieruit kan men een algemene relatie tussen de γ-matrices afleiden

$$\hbar^2\,\gamma^\nu\,\gamma^\mu\,\partial_\nu\,\partial_\mu\psi(x) = -i\,\hbar\,mc\,\gamma^\nu\,\partial_\nu\,\psi(x) = -m^2c^2\,\psi(x)$$
$$\hbar^2\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\partial_\mu\,\partial_\nu\psi(x) = -m^2c^2\,\psi(x) \tag{3.33}$$

optellen geeft

$$\hbar^2\left(\gamma^\mu\,\gamma^\nu + \gamma^\nu\,\gamma^\mu\right)\partial_\mu\,\partial_\nu\psi(x) = -2\,m^2c^2\psi(x) = 2\,\hbar^2\,\Box\psi(x) =$$
$$2\,\hbar^2\,g^{\mu\nu}\,\partial_\mu\,\partial_\nu\psi(x) \quad\Rightarrow\quad \{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = 2\,g^{\mu\nu}\,1 \tag{3.34}$$

De 4 bij 4 eenheidsmatrix 1 wordt vaak weggelaten in de literatuur maar zij is wel aanwezig!! De anti-commutator $\{\}$ is gedefinieerd als

$$\{a,b\} = a\,b + b\,a \tag{3.35}$$

Verder kan men de volgende relaties afleiden

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \qquad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i \qquad (\gamma^0)^2 = 1 \qquad (\gamma^i)^2 = -1$$
$$Sp\,\gamma^\mu = 0 \qquad Sp\,1 = 4 \qquad \gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu \quad\rightarrow\quad \gamma_0 = \gamma^0 \quad \gamma_i = -\gamma^i \tag{3.36}$$

waarbij 1 een vier bij vier eenheidsmatrix is die vaak wordt weggelaten. We voeren nu de volgende notatie in

$$\not{a} = a_\mu\gamma^\mu \tag{3.37}$$

We kunnen nu de volgende relaties afleiden

$$\gamma_\mu\,\not{a}\,\gamma^\mu = -2\,\not{a} \qquad \gamma_\mu\,\not{a}\,\not{b}\,\gamma^\mu = 4\,a\cdot b \qquad \gamma_\mu,\not{a}\,\not{b}\,\not{c}\,\gamma^\mu = -2\not{c}\,\not{b}\,\not{a}$$
$$Sp\,\not{a}\,\not{b} = 4a\cdot b \qquad Sp\,\not{a}_1\,\not{a}_2\cdots\not{a}_n = 0 \quad \text{als } n \text{ is oneven}$$
$$Sp\,\not{a}\,\not{b}\,\not{c}\,\not{d} = 4[(a\cdot b)(c\cdot d) - (a\cdot c)(b\cdot d) + (a\cdot d)(b\cdot c)] \tag{3.38}$$

Definitie adjoint Dirac-spinor

$$\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\,\gamma^0 \qquad \psi^\dagger(x) = (\psi^T(x))^*$$
$$\psi^T(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x), \psi_4(x))$$
$$\psi^\dagger(x) = (\psi_1^*(x), \psi_2^*(x), \psi_3^*(x), \psi_4^*(x))$$
$$\psi^\dagger(x)\,\gamma^0 = (\psi_1^*(x), \psi_2^*(x), -\psi_3^*(x), -\psi_4^*(x)) \tag{3.39}$$

De adjoint spinor voldoet aan de Dirac-vergelijking. Dit volgt uit hermitische conjugatie

$$\Big(i\,\hbar\,\gamma^0\,\partial_0 + i\,\hbar\,\gamma^k\,\partial_k - mc\Big)\,\psi(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \psi^\dagger(x)\left(-i\,\hbar\,\gamma^0\,\overleftarrow{\partial_0} + i\,\hbar\,\gamma^k\,\overleftarrow{\partial_k} - mc\right) = 0$$

$$\psi^\dagger(x)\left(-i\,\hbar\,\gamma^0\,\overleftarrow{\partial_0} + i\,\hbar\,\gamma^k\,\overleftarrow{\partial_k} - mc\right)\gamma^0 = 0$$

$$\rightarrow \quad \bar{\psi}(x)\left(-i\,\hbar\,\gamma^0\,\overleftarrow{\partial_0} - i\,\hbar\,\gamma^k\,\overleftarrow{\partial_k} - mc\right) = 0 \tag{3.40}$$

of

$$\bar{\psi}(x)\left(i\,\hbar\,\gamma^\mu\,\overleftarrow{\partial_\mu} + mc\right) = 0 \tag{3.41}$$

Stelling: Elke vier bij vier matrix is uit te drukken in de volledige verzameling matrices Γ_k die 16 elementen bevat. Deze zijn

$$\Gamma_S = 1 \qquad \Gamma_V^\mu = \gamma^\mu \qquad \Gamma_T^{\mu\nu} = \sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

$$\Gamma_P = \gamma_5 = \gamma^5 \equiv i\,\gamma^0\,\gamma^1\,\gamma^2\,\gamma^3 = \begin{pmatrix} \emptyset & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \emptyset \end{pmatrix} \qquad \Gamma_A^\mu = \gamma^5\,\gamma^\mu \tag{3.42}$$

Verder geldt

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0 \qquad Sp\,\gamma_5\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu\,\gamma_\lambda\,\gamma_\sigma = 4\,i\,\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \tag{3.43}$$

Stelling: De Dirac-vergelijking is representatie-onafhankelijk. Stel men heeft de vergelijking

$$\Big(i\,\hbar\,\gamma^{'\mu}\,\partial_\mu - mc\Big)\,\psi'(x) = 0 \quad \text{met} \quad \{\gamma^{'\mu}, \gamma^{'\nu}\} = 2\,g^{\mu\nu} \tag{3.44}$$

Dan is bovenstaande vergelijking equivalent met de Dirac-vergelijking in (3.32).
Lemma: Gegeven zijn de twee verzamelingen van vier bij vier matrices γ^μ en $\gamma^{'\mu}$ die voldoen aan

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\,g^{\mu\nu} \qquad \{\gamma^{'\mu}, \gamma^{'\nu}\} = 2\,g^{\mu\nu} \tag{3.45}$$

dan kan men bewijzen dat er een niet singuliere matrix S bestaat waarvoor geldt dat

$$S\,\gamma^\mu\,S^{-1} = \gamma^{'\mu} \tag{3.46}$$

waarbij S bepaald is tot op een multiplicatieve constante. Het bewijs van dit Lemma is gegeven door W. Pauli (zie Appendix C van J.J. Sakurai , Advanced Quantum Mechanics).

$$\Big(i\hbar\,\gamma'^{\mu}\,\partial_\mu - mc\Big)\,\psi'(x) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$S^{-1}\,\Big(i\hbar\,S\,\gamma^{\mu}\,S^{-1}\,\partial_\mu - mc\Big)\;S\,S^{-1}\,\psi'(x) = 0 \tag{3.47}$$

zodat $S^{-1}\psi'(x)$ aan de Dirac-vergelijking voldoet

$$\begin{aligned} &(i\hbar\,\gamma^{\mu}\,\partial_\mu - mc)\;S^{-1}\,\psi'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \psi(x) = S^{-1}\,\psi'(x) \quad \text{of} \quad \psi'(x) = S\,\psi(x) \\ &(\psi'(x))^{\dagger} = \psi(x)^{\dagger}\,S^{\dagger} \end{aligned} \tag{3.48}$$

S kan zo worden gekozen dat hij unitair is $S^{\dagger} = S^{-1}$

$$\Big(S\,\gamma^{\mu}\,S^{-1}\Big)^{\dagger} = (\gamma'^{\mu})^{\dagger} \quad \rightarrow \quad (S^{-1})^{\dagger}\,(\gamma^{\mu})^{\dagger}\,S^{\dagger} = (\gamma'^{\mu})^{\dagger} \tag{3.49}$$

Uit (3.46) volgt

$$(S^{-1})^{\dagger}\,\gamma^{\mu}\,S^{\dagger} = \gamma'^{\mu} \quad \rightarrow \quad (S^{-1})^{\dagger} = S \quad \text{of} \quad S^{-1} = S^{\dagger} \tag{3.50}$$

$\psi'(x)$, γ'^{μ} en $\psi(x)$, γ^{μ} worden verschillende representaties van de Dirac-vergelijking genoemd.

Voorbeelden van representaties die in de literatuur voorkomen

a Standaard- of Dirac-representatie

$$\gamma_D^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \emptyset \\ \emptyset & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \gamma_D^k = \begin{pmatrix} \emptyset & \sigma_k \\ -\sigma_k & \emptyset \end{pmatrix} \quad \psi_D = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \phi_R + \phi_L \\ \phi_R - \phi_L \end{pmatrix} \tag{3.51}$$

b Weyl-representatie

$$\begin{aligned} &\gamma_W^{\mu} = S\,\gamma_D^{\mu}\,S^{-1} \qquad S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \\ &\gamma_W^0 = \begin{pmatrix} \emptyset & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \emptyset \end{pmatrix} \quad \gamma_W^k = \begin{pmatrix} \emptyset & -\sigma_k \\ \sigma_k & \emptyset \end{pmatrix} \quad \psi_W = S\,\psi_D = \begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{pmatrix} \\ &(\gamma_W^0)^{\dagger} = \gamma_W^0 \qquad (\gamma_W^k)^{\dagger} = -\gamma_W^k \end{aligned} \tag{3.52}$$

c Majorana-representatie

$$\gamma_M^\mu = S\,\gamma_D^\mu\,S^{-1} \qquad S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathbf{1} + i\,\sigma_2 & \mathbf{1} - i\,\sigma_2 \\ -i\,\mathbf{1} - \sigma_2 & -i\,\mathbf{1} + \sigma_2 \end{pmatrix} \quad \gamma_M^0 = \begin{pmatrix} \emptyset & -\sigma_2 \\ -\sigma_2 & \emptyset \end{pmatrix}$$

$$\gamma_M^1 = \begin{pmatrix} \emptyset & -i\,\sigma_3 \\ -i\,\sigma_3 & \emptyset \end{pmatrix} \quad \gamma_M^2 = \begin{pmatrix} -i\,\mathbf{1} & \emptyset \\ \emptyset & i\,\mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \gamma_M^3 = \begin{pmatrix} \emptyset & i\,\sigma_1 \\ i\,\sigma_1 & \emptyset \end{pmatrix}$$

$$\psi_M = S\,\psi_D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \xi + \eta^* \\ -i\,\xi + i\,\eta^* \end{pmatrix} \quad \text{met} \quad \phi_R = \frac{1}{\sqrt{2}}\xi \quad \phi_L = -\frac{i}{\sqrt{2}}\sigma_2\,\eta^*$$

$$(\gamma_M^\mu)^* = -\gamma_M^\mu \qquad (\gamma_M^\mu)^T = (-1)^{g_{\mu 0}}\,\gamma_M^\mu \qquad (\gamma_M^\mu)^\dagger = (-1)^{1+g_{\mu 0}}\,\gamma_M^\mu \tag{3.53}$$

Merk op dat γ_M^μ puur imaginair is zodat $i\,\gamma_M^\mu$ zuiver reëel wordt. In dit geval wordt de Dirac-vergelijking een reële differentiaalvergelijking. In het geval $\xi = \eta$ (twee componenten) wordt het veld reëel (neutraal spin half veld of Majorana-veld). In dit geval kunnen we schrijven

$$\psi_M = \begin{pmatrix} Re\,\xi \\ Im\,\xi \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \psi_M^* = \psi_M \tag{3.54}$$

Dus het Majorana-veld heeft slechts twee onafhankelijke componenten.

We bekijken nu de oplossingen van de Dirac-vergelijking. Er zijn twee oplossingen

1

$$\psi_1(x) = \begin{pmatrix} \psi_{1A}(x) \\ \psi_{1B}(x) \end{pmatrix} = \sum_s \int d^3\vec{p}\,A \begin{pmatrix} u_{1A}(\vec{p},s) \\ u_{1B}(\vec{p},s) \end{pmatrix} e^{-i\,px/\hbar} \qquad s = \pm\frac{1}{2} \tag{3.55}$$

waarbij A een nog nader te bepalen normalisatie-factor is die van de energie afhangt. Vul deze oplossing in de Dirac-vergelijking in

$$\left(\frac{E}{c}\gamma^0 - \vec{\gamma}\cdot\vec{p} - mc\right)\begin{pmatrix} u_{1A}(\vec{p},s) \\ u_{1B}(\vec{p},s) \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1}\frac{E}{c} & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -\mathbf{1}\frac{E}{c} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1A}(\vec{p},s) \\ u_{1B}(\vec{p},s) \end{pmatrix} = mc\begin{pmatrix} u_{1A}(\vec{p},s) \\ u_{1B}(\vec{p},s) \end{pmatrix} \tag{3.56}$$

De oplossing is

$$u_{1B}(\vec{p},s) = \frac{c}{E + mc^2}\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,u_{1A}(\vec{p},s) \quad \text{met} \quad u_{1A}(\vec{p},s) = \chi_n^{(s)} \quad \text{Pauli-spinor} \tag{3.57}$$

De oplossing

$$u_{1A}(\vec{p},s) = \frac{c}{E - mc^2}\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,u_{1B}(\vec{p},s) \tag{3.58}$$

vervalt omdat de limiet $E \rightarrow mc^2$ of $\vec{p} \rightarrow 0$ niet bestaat.

2

$$\psi_2(x) = \begin{pmatrix} \psi_{2A}(x) \\ \psi_{2B}(x) \end{pmatrix} = \sum_s \int d^3\vec{p}\, A \begin{pmatrix} u_{2A}(\vec{p},s) \\ u_{2B}(\vec{p},s) \end{pmatrix} e^{i\,px/\hbar} \qquad s = \pm\frac{1}{2} \tag{3.59}$$

Vul deze oplossing in de Dirac-vergelijking in

$$\Big(-\frac{E}{c}\gamma^0 + \vec{\gamma}\cdot\vec{p} - mc\Big) \begin{pmatrix} u_{2A}(\vec{p},s) \\ u_{2B}(\vec{p},s) \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{1}\frac{E}{c} & \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} & \mathbf{1}\frac{E}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{2A}(\vec{p},s) \\ u_{2B}(\vec{p},s) \end{pmatrix} = mc \begin{pmatrix} u_{2A}(\vec{p},s) \\ u_{2B}(\vec{p},s) \end{pmatrix} \tag{3.60}$$

De oplossing is

$$u_{2A}(\vec{p},s) = \frac{c}{E+mc^2}\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\, u_{2B}(\vec{p},s) \quad \text{met} \quad u_{2B}(\vec{p},s) = \chi_n^{(-s)} \quad \text{Pauli-spinor} \tag{3.61}$$

De $-s$ die voorkomt in de Pauli-spinor is een conventie die pas bij de tweede kwantisatie van het Dirac-veld duidelijk wordt. De oplossing

$$u_{2B}(\vec{p},s) = \frac{c}{E-mc^2}\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\, u_{2A}(\vec{p},s) \tag{3.62}$$

vervalt omdat de limiet $E \to mc^2$ of $\vec{p} \to 0$ niet bestaat.

Uit het bovenstaande kunnen we de volgende oplossingen afleiden. De eerste Dirac-spinor hoort bij het fermion

$$u(\vec{p},s) = \sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} \chi_n^{(s)} \\ \frac{c\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+mc^2}\chi_n^{(s)} \end{pmatrix} \tag{3.63}$$

De tweede Dirac-spinor hoort bij het anti-fermion

$$v(\vec{p},s) = \sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} \frac{c\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+mc^2}\chi_n^{(-s)} \\ \chi_n^{(-s)} \end{pmatrix} \tag{3.64}$$

De wortels zijn zo gekozen dat de Dirac-spinoren aan de volgende orthogonaliteitsrelaties voldoen

$$u(\vec{p},s)^\dagger\, u(\vec{p},s') = \frac{E}{mc^2}\delta_{ss'} \qquad v(\vec{p},s)^\dagger\, v(\vec{p},s') = \frac{E}{mc^2}\delta_{ss'} \tag{3.65}$$

Echter in de literatuur zijn ook andere conventies gangbaar nl.

$$\sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}} \quad \to \quad = \sqrt{\frac{E+mc^2}{2E}} \tag{3.66}$$

In dit geval hebben wij orthonormaliteitsrelaties

$$u(\vec{p},s)^\dagger\, u(\vec{p},s') = \delta_{ss'} \qquad v(\vec{p},s)^\dagger\, v(\vec{p},s') = \delta_{ss'} \tag{3.67}$$

Het voordeel van deze conventie is dat we onmiddellijk de limiet $m \to 0$ kunnen nemen. In dit college wordt de conventie in (3.63)- (3.65) aangenomen. Er zijn nog andere relaties die uit (3.63)-(3.65) volgen

$$\bar{u}(\vec{p},s)\, u(\vec{p},s') = \delta_{ss'} \qquad \bar{v}(\vec{p},s)\, v(\vec{p},s') = -\delta_{ss'}$$

$$\bar{u}(\vec{p},s)\, v(\vec{p},s') = 0 \qquad u(-\vec{p},s)^\dagger\, v(\vec{p},s') = 0$$

$$\bar{v}(\vec{p},s)\, u(\vec{p},s') = 0 \qquad v(-\vec{p},s)^\dagger\, u(\vec{p},s') = 0$$

$$\bar{u}(\vec{p},s) = u(\vec{p},s)^\dagger\, \gamma^0 = u(-\vec{p},s)^\dagger \qquad \bar{v}(\vec{p},s) = v(\vec{p},s)^\dagger\, \gamma^0 = -v(-\vec{p},s)^\dagger \tag{3.68}$$

De Dirac-vergelijking voor spinoren luidt

$$(\not{p} - mc)u(\vec{p},s) = 0 \qquad \bar{u}(\vec{p},s)(\not{p} - mc) = 0$$

$$(\not{p} + mc)v(\vec{p},s) = 0 \qquad \bar{v}(\vec{p},s)(\not{p} + mc) = 0 \tag{3.69}$$

Verder kan men de projectie-operatoren definiëren

$$\Lambda_+ = \sum_s u(\vec{p},s)\, \bar{u}(\vec{p},s) \qquad \Lambda_- = -\sum_s v(\vec{p},s)\, \bar{v}(\vec{p},s)$$

$$\Lambda_+\, u(\vec{p},s) = u(\vec{p},s) \qquad \Lambda_+\, v(\vec{p},s) = 0$$

$$\Lambda_-\, u(\vec{p},s) = 0 \qquad \Lambda_-\, v(\vec{p},s) = v(\vec{p},s) \tag{3.70}$$

Hieruit volgt

$$\Lambda_+ = \frac{\not{p} + mc}{2mc} \qquad \Lambda_- = \frac{-\not{p} + mc}{2mc} \tag{3.71}$$

De meest algemene oplossing van de Dirac-vergelijking volgt uit (3.55) en (3.59)

$$\psi(x) = \sum_s \int d^3\vec{p}[b(\vec{p},s)\, \psi_{1,\vec{p},s}(x) + d^*(\vec{p},s)\, \psi_{2,\vec{p},s}(x)]$$

$$\psi_{1,\vec{p},s}(x) = A\, u(\vec{p},s)\, e^{-i\,px/\hbar} \qquad \psi_{2,\vec{p},s}(x) = A\, v(\vec{p},s)\, e^{i\,px/\hbar} \tag{3.72}$$

Hier zijn $b(\vec{p},s)$ en $d(\vec{p},s)$ complexe Fouriercoëfficiënten. We kunnen nu weer een in-product definiëren

$$(\psi_{i,\vec{p},s}, \psi_{j,\vec{p}',s'}) = \int d^3\vec{x}\, \psi^\dagger_{i,\vec{p},s}(x)\, \psi_{j,\vec{p}',s'}(x) = \delta_{ij}\, \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}')\, \delta_{ss'} \tag{3.73}$$

waaruit volgt dat

$$A = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sqrt{\frac{mc^2}{E}} \tag{3.74}$$

Merk op dat bovenstaand in-product een echte norm definieert in tegenstelling tot het in-product voor scalaire velden in (3.6). Het klassieke Dirac-veld krijgt de volgende notatie

$$\psi(x) = \sum_s \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sqrt{\frac{mc^2}{E}} [b(\vec{p},s)\, u(\vec{p},s)\, e^{-i\,px/\hbar} + d^*(\vec{p},s)\, v(\vec{p},s)\, e^{i\,px/\hbar}] \tag{3.75}$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} \psi^\dagger(x) &= \sum_s \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sqrt{\frac{mc^2}{E}} [b^*(\vec{p},s)\, u^\dagger(\vec{p},s)\, e^{i\,px/\hbar} + d(\vec{p},s)\, v^\dagger(\vec{p},s)\, e^{-i\,px/\hbar}] \\ \bar{\psi}(x) &= \sum_s \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sqrt{\frac{mc^2}{E}} [b^*(\vec{p},s)\, \bar{u}(\vec{p},s)\, e^{i\,px/\hbar} + d(\vec{p},s)\, \bar{v}(\vec{p},s)\, e^{-i\,px/\hbar}] \end{aligned} \tag{3.76}$$

Opmerkingen

$$\vec{n} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \quad \rightarrow \quad \chi_n^{(s)} = \chi_p^{(s)} \quad \text{met} \quad \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\chi_p^{(s)} = 2s\,\chi_p^{(s)} \tag{3.77}$$

In dit geval zijn de Dirac-spinoren eigenvektoren van

$$\frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|} \quad \text{met} \quad \vec{\Sigma} = (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3) \qquad\qquad \Sigma_k = \begin{pmatrix} \sigma_k & \emptyset \\ \emptyset & \sigma_k \end{pmatrix}$$

$$\frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|} u(\vec{p},s) = 2s\, u(\vec{p},s) \qquad \frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|} v(\vec{p},s) = -2s\, v(\vec{p},s) \qquad s = \pm\frac{1}{2} \tag{3.78}$$

De grootheid $h = 2s$ wordt ook wel de heliciteit genoemd. Tenslotte willen wij nog iets zeggen over de betekenis van R en L in ϕ_R en ϕ_L. Eerst bekijken we $\psi_{1,\vec{p},s}$ in (3.72). Met behulp van (3.27) leiden we af

$$\begin{aligned} \phi_R(x) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sqrt{\frac{E+mc^2}{4E}} \left\{ \mathbf{1} + \frac{c\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+mc^2} \right\} \chi_n^{(s)}\, e^{-i\,px/\hbar} \\ \phi_L(x) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sqrt{\frac{E+mc^2}{4E}} \left\{ \mathbf{1} - \frac{c\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+mc^2} \right\} \chi_n^{(s)}\, e^{-i\,px/\hbar} \end{aligned} \tag{3.79}$$

In het geval $\vec{n} = \vec{p}$ en $m = 0$ krijgt men

$$E = |\vec{p}|\, c \quad \text{en} \quad \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\, \chi_p^{(s)} = 2s\, \chi_p^{(s)} \tag{3.80}$$

$$\phi_R(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \Big\{ \frac{1}{2} + s \Big\}\, \chi_p^{(s)}\, e^{-i\,px/\hbar}$$

$$\phi_L(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \Big\{ \frac{1}{2} - s \Big\}\, \chi_p^{(s)}\, e^{-i\,px/\hbar} \tag{3.81}$$

$$s = \frac{1}{2} \quad \text{rechtshandige spinor} \quad \rightarrow \quad \phi_R(x) \neq 0 \quad \phi_L(x) = 0$$

$$s = -\frac{1}{2} \quad \text{linkshandige spinor} \quad \rightarrow \quad \phi_R(x) = 0 \quad \phi_L(x) \neq 0 \tag{3.82}$$

We kunnen nu projectie-matrices invoeren

$$P_R = \frac{1}{2}(1+\gamma_5) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad P_L = \frac{1}{2}(1-\gamma_5) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -\mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$P_R^2 = P_R \qquad P_L^2 = P_L \qquad P_R\, P_L = P_L\, P_R = 0$$

$$P_R\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \phi_R(x) \\ \phi_R(x) \end{pmatrix} \qquad P_L\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \phi_L(x) \\ \phi_L(x) \end{pmatrix} \tag{3.83}$$

In het geval van $\psi_{2,\vec{p},s}$ (3.72) krijgen we

$$\phi_R(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sqrt{\frac{E+mc^2}{4E}} \Big\{ \mathbf{1} + \frac{c\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+mc^2} \Big\}\, \chi_n^{(-s)}\, e^{i\,px/\hbar}$$

$$\phi_L(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sqrt{\frac{E+mc^2}{4E}} \Big\{ -\mathbf{1} + \frac{c\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+mc^2} \Big\}\, \chi_n^{(-s)}\, e^{i\,px/\hbar} \tag{3.84}$$

In het geval $\vec{n} = \vec{p}$ en $m = 0$ krijgt men

$$E = |\vec{p}|\, c \quad \text{en} \quad \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}\, \chi_p^{(-s)} = -2s\, \chi_p^{(-s)} \tag{3.85}$$

$$\phi_R(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \Big\{ \frac{1}{2} - s \Big\}\, \chi_p^{(-s)}\, e^{i\,px/\hbar}$$

$$\phi_L(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \Big\{ -\frac{1}{2} - s \Big\}\, \chi_p^{(-s)}\, e^{i\,px/\hbar} \tag{3.86}$$

$$s = -\frac{1}{2} \quad \text{rechtshandige anti-spinor} \quad \rightarrow \quad \phi_R(x) \neq 0 \quad \phi_L(x) = 0$$

$$s = \frac{1}{2} \quad \text{linkshandige anti-spinor} \quad \rightarrow \quad \phi_R(x) = 0 \quad \phi_L(x) \neq 0 \tag{3.87}$$

3.4 Het elektromagnetische (massa-loos spin één) veld

Dit veld wordt gegeven door de Maxwell-vergelijkingen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial\, \vec{E}}{c\partial\, t} = \frac{\vec{J}}{c}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial\, \vec{B}}{c\partial\, t} = 0 \tag{3.88}$$

Waarbij het elektrostatische veld en het magnetische veld (magnetische inductie) respectievelijk gegeven worden door $\vec{E}$ en $\vec{B}$. Verder stellen ρ en $\vec{J}$ de ladingsverdeling en de stroom-verdeling voor. Men kan nu $\vec{E}$ en $\vec{B}$ in de electrostatische potentiaal ϕ en de magnetische potentiaal $\vec{A}$ uitdrukken

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\, \vec{A}}{c\partial\, t} \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{3.89}$$

We gaan nu de Maxwell-vergelijkingen op een Lorentzcovariante vorm brengen. Definieer de elektromagnetische veldtensor (tweede rang tensor)

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu\, A_\nu - \partial_\nu\, A_\mu \qquad F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$$

$$A(x) = (\phi(x), \vec{A}(x)) = (A_0(x), A_1(x), A_2(x), A_3(x)) \tag{3.90}$$

Met behulp van

$$\partial = (\partial_0, \vec{\partial}) = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{\partial}{c\partial\, t}, \frac{\partial}{\partial\, x^1}, \frac{\partial}{\partial\, x^2}, \frac{\partial}{\partial\, x^3},\right) =$$

$$\left(\frac{\partial}{c\partial\, t}, -\frac{\partial}{\partial\, x_1}, -\frac{\partial}{\partial\, x_2}, -\frac{\partial}{\partial\, x_3},\right) = \left(\frac{\partial}{c\partial\, t}, -\vec{\nabla}\right) \tag{3.91}$$

kunnen we afleiden

$$E_i = F_{i0} \quad \rightarrow \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} A_0 - \frac{\partial\, \vec{A}}{c\partial\, t}$$

$$B_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\, F_{jk} \qquad F_{ij} = -\epsilon_{ijk}\, B_k \quad \rightarrow \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$B_1 = -F_{23} \qquad B_2 = -F_{31} \qquad B_3 = -F_{12} \tag{3.92}$$

De stroom-dichtheid (vier-vector) wordt gegeven door

$$J = (c\,\rho, \vec{J}) = (J_0, J_1, J_2, J_3) \tag{3.93}$$

waarbij ρ de ladingsdichtheid voorstelt. Men kan nu de Maxwell-vergelijkingen op een relativistische covariante manier schrijven

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \frac{J_\nu}{c} \quad \text{of} \quad \Box A_\nu - \partial_\nu \partial^\mu A_\mu = \frac{J_\nu}{c}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial\, \vec{E}}{c\partial\, t} = \frac{\vec{J}}{c} \tag{3.94}$$

De andere twee vergelijkingen in (3.88) volgen uit de Bianchi-identiteit

$$\partial_\mu\, F_{\nu\lambda} + \partial_\nu\, F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda\, F_{\mu\nu} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial\, \vec{B}}{c\partial\, t} = 0 \tag{3.95}$$

Verder geldt

$$\partial^\mu \partial^\nu F_{\mu\nu} = \frac{1}{c} \partial^\nu J_\nu = 0 \tag{3.96}$$

omdat $F_{\mu\nu}$ anti-symmetrisch is. Dus J_ν is een behouden stroom. De oplossing voor A_μ is tot op een ijk-transformatie bepaald m.a.w. als A_μ een oplossing dan is de ijk-getransformeerde potentiaal $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ ook een oplossing

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) \quad \rightarrow \quad F'_{\mu\nu} = \partial_\mu\, A'_\nu - \partial_\nu\, A'_\mu$$

$$= F_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu \Lambda(x) - \partial_\nu \partial_\mu \Lambda(x) = F_{\mu\nu} \tag{3.97}$$

Hieruit volgt dat $\vec{E}$ en $\vec{B}$ onafhankelijk zijn van de keuze van Λ. Dit moet ook zo zijn want $\vec{E}$ en $\vec{B}$ zijn observabelen. Om nu een uitdrukking voor A_μ te vinden moeten wij een keuze voor Λ maken. Dit wordt een ijk-keuze genoemd. Laten wij ons beperken tot het vrije elektromagnetische veld zodat $J_\mu = 0$

$$\Box A_\nu - \partial_\nu \partial^\mu A_\mu = 0 \tag{3.98}$$

Bovenstaande vergelijking gaat over in de Klein-Gordon-vergelijking als we kiezen

1 Lorentzijk

$$\partial^\mu A_\mu = 0 \tag{3.99}$$

Stel $\partial^\mu A_\mu \neq 0$, kies dan een Λ waarvoor geldt

$$\partial^\mu A'_\mu = 0 \quad \rightarrow \partial^\mu A_\mu = -\Box \Lambda \tag{3.100}$$

zodat

$$\Box A'_\nu = 0. \tag{3.101}$$

De Lorentzijk is een Lorentzcovariante ijk-keuze.

2 stralingsijk

$$\phi = 0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \quad \rightarrow \quad \partial^\mu A_\mu = 0 \tag{3.102}$$

Het nadeel van deze ijk-keuze is dat hij niet Lorentzcovariant is. Bijvoorbeeld in een systeem S blijkt $\phi = 0$ en $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$. Nu kan men een Lorentztransformatie maken naar een systeem S'waarvoor geldt $\phi' \neq 0$ en $\vec{\nabla}'\cdot\vec{A}' \neq 0$ waarvoor nog steeds geldt $\partial'^\mu A'_\mu = 0$. Het voordeel van de stralingsijk is dat hij alleen de fysische componenten van het stralingsveld heeft zodat wij voorlopig deze ijk zullen kiezen.

Stel $\phi \neq 0$ en $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} \neq 0$ dan kan men een ijk-transformatie maken zodat $\phi' = 0$ en $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = 0$. De ijkfunctie Λ ziet er als volgt uit

$$\Lambda(\vec{x},t) = -c\int_0^t dt'\,\phi(\vec{x},t') - \frac{1}{4\pi}\int d^3\vec{x}'\,\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,\vec{\nabla}'\cdot\vec{A}(\vec{x}',t)$$

$$-\frac{c}{4\pi}\int_0^t dt'\int d^3\vec{x}'\,\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,\Delta'\phi(\vec{x}',t') \tag{3.103}$$

gebruik nu

$$\Delta\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = -4\pi\,\delta^{(3)}(\vec{x}'-\vec{x}) \tag{3.104}$$

Verder als $\rho = 0$ in (3.88) (geen lading) dan volgt uit (3.89)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -\Delta\phi - \frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}}{c\partial\, t} = 0 \quad\rightarrow\quad \Delta\phi = -\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}}{c\partial\, t} \tag{3.105}$$

Met behulp van (3.103)-(3.105) leiden wij af

$$A'_0(\vec{x},t) = A_0(\vec{x},t) + \frac{\partial\,\Lambda(\vec{x},t)}{c\partial\, t} = \phi(\vec{x},t) - \phi(\vec{x},t) - \frac{1}{4\pi}\int d^3\vec{x}'\,\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,\frac{\partial}{c\partial\, t}\vec{\nabla}'\cdot\vec{A}(\vec{x}',t)$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int d^3\vec{x}'\,\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,\Delta'\phi(\vec{x}',t) = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}'(\vec{x},t) = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{x},t) - \Delta\Lambda(\vec{x},t) = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{x},t) + c\int_0^t dt'\,\Delta\phi(\vec{x},t')$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int d^3\vec{x}'\,\Delta\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,\vec{\nabla}'\cdot\vec{A}(\vec{x}',t) + \frac{c}{4\pi}\int_0^t dt'\int d^3\vec{x}'\,\Delta\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,\Delta'\phi(\vec{x}',t') = 0 \tag{3.106}$$

Met de stralingsijk voldoet $\vec{A}$ aan de Klein-Gordon-vergelijking $\Box\vec{A} = 0$. De oplossing wordt

$$\vec{A}(x) = \sum_\alpha\int\frac{d^3\,\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}}\,c\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\Big[a(\vec{k},\alpha)\,\vec{\epsilon}^{(\alpha)}(\vec{k})\,e^{-i\,kx} + a^*(\vec{k},\alpha)\,\vec{\epsilon}^{(\alpha)*}(\vec{k})\,e^{i\,kx}\Big] \tag{3.107}$$

met $k^2 = 0$.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{k} \cdot \vec{\epsilon}^{(\alpha)}(\vec{k}) = 0 \tag{3.108}$$

Hier stelt $\vec{\epsilon}^{(\alpha)}(\vec{k})$ een polarisatie-vector voor. Uit bovenstaande conditie volgt dat er maar twee onafhankelijke polarisaties α bestaan voor het elektromagnetische veld. Deze fysische polarisatie-vectoren staan loodrecht op de voortplantingsrichting (transversaliteitseis). Merk op dat de Klein-Gordon-vergelijking voor het elektromagnetische veld geen massa-term bevat van daar $k^2 = 0$. In vergelijking met het reële scalaire veld in (3.12) hebben wij de volgende substituties gemaakt

$$\vec{p} \quad \rightarrow \quad \hbar\vec{k} \qquad E \quad \rightarrow \quad \hbar\omega \qquad a(\vec{p}) \quad \rightarrow \quad \hbar^{-3/2}\, a(\vec{k}, \alpha)$$

$$k = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right) \qquad k^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \omega = c|\vec{k}| \tag{3.109}$$

We kunnen (3.107) ook schrijven als

$$\vec{A}(x) = \sum_{\alpha} \int d^3\vec{k} \left[a(\vec{k}, \alpha)\, \vec{f}_k^{(\alpha)}(x) + a^*(\vec{k}, \alpha)\, \vec{f}_k^{(\alpha)*}(x)\right]$$

$$\text{met} \quad \vec{f}_k^{(\alpha)}(x) = \frac{c}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\, \vec{\epsilon}^{(\alpha)}(\vec{k})\, e^{-i\,kx} \tag{3.110}$$

Uit de eis:

$$\left(f_k^{(\alpha)}, f_{k'}^{(\alpha')}\right) = \delta_{\alpha\alpha'}\, \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \tag{3.111}$$

waarbij

$$\left(f_k^{(\alpha)}, f_{k'}^{(\alpha')}\right) = \frac{i}{\hbar c} \int d^3\vec{x}\, f_k^{(\alpha)*}(x)\, \overleftrightarrow{\partial_0}\, f_{k'}^{(\alpha')}(x) \tag{3.112}$$

volgt dat de polarisatie-vectoren loodrecht op elkaar staan.

$$\epsilon^{(\alpha)*}(\vec{k}) \cdot \vec{\epsilon}^{(\alpha')}(\vec{k}) = \delta_{\alpha\alpha'} \tag{3.113}$$

Bewijs:

$$\left(f_k^{(\alpha)}, f_{k'}^{(\alpha')}\right) = \frac{i}{(2\pi)^3}\, \frac{c}{2\sqrt{\omega\omega'}} \int d^3\vec{x}\, \epsilon^{(\alpha)*}(\vec{k}) \cdot \vec{\epsilon}^{(\alpha')}(\vec{k}')\, e^{-i\,\vec{k}\cdot\vec{x}}\, e^{i\,\vec{k}'\cdot\vec{x}} \Big\{ e^{i\,\omega t} \frac{\partial}{c\partial\, t} e^{-i\,\omega' t}$$

$$- e^{-i\,\omega' t} \frac{\partial}{c\partial\, t} e^{i\,\omega t} \Big\} = \frac{1}{(2\pi)^3}\, \frac{c}{2\sqrt{\omega\omega'}}\, \frac{\omega + \omega'}{c}\, \epsilon^{(\alpha)*}(\vec{k}) \cdot \vec{\epsilon}^{(\alpha')}(\vec{k}') \int d^3\vec{x}\, e^{i\,(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{x}}\, e^{i\,(\omega-\omega')t}$$

$$= \frac{\omega + \omega'}{2\sqrt{\omega\omega'}}\, \epsilon^{(\alpha)*}(\vec{k}) \cdot \vec{\epsilon}^{(\alpha')}(\vec{k}')\, \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') = \epsilon^{(\alpha)*}(\vec{k}) \cdot \vec{\epsilon}^{(\alpha')}(\vec{k}')\, \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}')$$

$$= \delta_{\alpha\alpha'} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \tag{3.114}$$

Let op dat uit $\vec{k} = \vec{k}'$ volgt $\omega = \omega'$. De Fouriercoëfficiënten kunnen weer uitgedrukt worden in het in-product

$$a(\vec{k},\alpha) = \left(\vec{f}_k^{(\alpha)}, \vec{A}\right) \qquad a^*(\vec{k},\alpha) = -\left(\vec{f}_k^{(\alpha)*}, \vec{A}\right) \tag{3.115}$$

Verder worden twee verschillende soorten polarisatie-vectoren in de literatuur gekozen.

1 Lineaire polarisatie-vectoren

$$\begin{aligned}
\vec{k} &= |\vec{k}|(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) \\
\epsilon^{(1)}(\vec{k}) &= (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta) \\
\epsilon^{(2)}(\vec{k}) &= (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)
\end{aligned} \tag{3.116}$$

zodat $\vec{\epsilon}^{(\alpha)}$ reëel is. Verder hebben wij de eigenschappen

$$\begin{aligned}
&\vec{\epsilon}^{(1)}(\vec{k}) \times \vec{\epsilon}^{(2)}(\vec{k}) = \hat{\vec{k}} \quad \text{met} \quad \hat{\vec{k}} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \\
&\vec{\epsilon}^{(1)}(-\vec{k}) = -\vec{\epsilon}^{(1)}(\vec{k}) \qquad \vec{\epsilon}^{(2)}(-\vec{k}) = \vec{\epsilon}^{(2)}(\vec{k}) \\
&\rightarrow \quad \vec{\epsilon}^{(1)}(-\vec{k}) \times \vec{\epsilon}^{(2)}(-\vec{k}) = -\hat{\vec{k}}
\end{aligned} \tag{3.117}$$

Hieruit blijkt dat $\vec{\epsilon}^{(1)}$, $\vec{\epsilon}^{(2)}$ en $\vec{k}$ een rechtshandig stelsel vormen. Als we over de polarisaties sommeren dan krijgen we

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \epsilon_i^{(\alpha)}(\vec{k})\, \epsilon_j^{(\alpha)}(\vec{k}) = T_{ij}(\vec{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i\, k_j}{|\vec{k}|^2} \tag{3.118}$$

Dit volgt uit

$$T_{ij}(\vec{k}) = a\,\delta_{ij} + b\,\frac{k_i\, k_j}{|\vec{k}|^2} \quad \text{met} \quad k_i\, T_{ij}(\vec{k}) = T_{ij}(\vec{k})\, k_j = 0 \quad T_{ii} = 2 \tag{3.119}$$

2 Circulaire polarisatie-vectoren
We kunnen linkshandige $\alpha = L$ en rechtshandige $\alpha = R$ polarisaties kiezen. Zij worden gegeven door

$$\vec{\epsilon}^{(R)}(\vec{k}) = -\frac{\vec{\epsilon}^{(1)}(\vec{k}) + i\,\vec{\epsilon}^{(2)}(\vec{k})}{\sqrt{2}} \qquad \vec{\epsilon}^{(L)}(\vec{k}) = \frac{\vec{\epsilon}^{(1)}(\vec{k}) - i\,\vec{\epsilon}^{(2)}(\vec{k})}{\sqrt{2}} \tag{3.120}$$

m.a.w. de polarisatie-vectoren zijn complex. De Fouriercoëfficiënten worden

$$a(\vec{k},R) = -\frac{a(\vec{k},1) - i\,a(\vec{k},2)}{\sqrt{2}} \qquad a(\vec{k},L) = \frac{a(\vec{k},1) + i\,a(\vec{k},2)}{\sqrt{2}} \tag{3.121}$$

De eigenschappen van deze polarisatie-vectoren zijn

$$\vec{\epsilon}^{(R)*}(\vec{k}) = -\vec{\epsilon}^{(L)}(\vec{k}) \qquad \vec{\epsilon}^{(R)}(-\vec{k}) = \vec{\epsilon}^{(L)}(\vec{k}) \qquad \vec{\epsilon}^{(L)}(-\vec{k}) = \vec{\epsilon}^{(R)}(\vec{k})$$

$$\vec{\epsilon}^{(\alpha)*}(\vec{k}) \cdot \vec{\epsilon}^{(\alpha')}(\vec{k}) = \delta_{\alpha\alpha'} \quad \rightarrow \quad \vec{\epsilon}^{(\alpha)}(\vec{k}) \cdot \vec{\epsilon}^{(\alpha)}(\vec{k}) = 0 \quad \alpha = R, L \tag{3.122}$$

Tenslotte kan men uit (3.118) weer afleiden

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \epsilon_i^{(\alpha)}(\vec{k})\, \epsilon_j^{(\alpha)*}(\vec{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i\, k_j}{|\vec{k}|^2} \tag{3.123}$$

Men kan nu uit $\vec{A}$ in (3.107) de velden $\vec{E}$ en $\vec{B}$ bepalen. Uit (3.89) met $\phi = 0$ volgt

$$\vec{E}(x) = i \sum_\alpha \int \frac{d^3\,\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}}\, \omega \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \Big[a(\vec{k},\alpha)\, \vec{\epsilon}^{(\alpha)}(\vec{k})\, e^{-i\,kx} - a^*(\vec{k},\alpha)\, \vec{\epsilon}^{(\alpha)*}(\vec{k})\, e^{i\,kx} \Big]$$

$$\vec{B}(x) = i\, c \sum_\alpha \int \frac{d^3\,\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\, \vec{k} \times \Big[a(\vec{k},\alpha)\, \vec{\epsilon}^{(\alpha)}(\vec{k})\, e^{-i\,kx} - a^*(\vec{k},\alpha)\, \vec{\epsilon}^{(\alpha)*}(\vec{k})\, e^{i\,kx} \Big] \tag{3.124}$$

In plaats van de stralingsijk had men ook de Lorentzijk kunnen kiezen. Deze heeft echter het nadeel dat het elektromagnetische veld A_μ onfysische polarisaties krijgt. Het veld wordt

$$A_\mu(x) = \sum_\alpha \int \frac{d^3\,\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}}\, c \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \Big[a(\vec{k},\alpha)\, \epsilon_\mu^{(\alpha)}(\vec{k})\, e^{-i\,kx} + a^*(\vec{k},\alpha)\, \epsilon_\mu^{(\alpha)*}(\vec{k})\, e^{i\,kx} \Big]$$

$$\sum_\alpha k^\mu\, \epsilon_\mu^{(\alpha)} = 0 \quad \text{en} \quad k^2 = 0 \tag{3.125}$$

We hebben naast de twee transversale polarisatie vectoren $\epsilon_\mu^{(\alpha)}$ $\alpha = 1, 2$ of $\alpha = R, L$ een scalaire polarisatie $\epsilon_\mu^{(0)}$ en een longitudinale polarisatie $\epsilon_\mu^{(3)}$. Beide laatste zijn onfysische en voldoen aan de volgende relatie

$$k^\mu\, \epsilon_\mu^{(0)} = -k^\mu\, \epsilon_\mu^{(3)} \tag{3.126}$$

Dit volgt uit (3.125). Voor $k = (|\vec{k}|, \vec{k})$ zien de polarisatie-vectoren eruit als

$$\epsilon^{(0)} = (1, \vec{0}) \quad \epsilon^{(3)} = (0, \vec{\hat{k}}) \quad \epsilon^{(1)} = (0, \vec{\epsilon}^{(1)}) \quad \epsilon^{(2)} = (0, \vec{\epsilon}^{(2)})$$

$$\sum_\alpha \frac{\epsilon_\mu^{(\alpha)}(\vec{k})\, \epsilon_\nu^{(\alpha)*}(\vec{k})}{\epsilon^{(\alpha)}(\vec{k})\, \epsilon^{(\alpha)*}(\vec{k})} = g_{\mu\nu} \qquad \epsilon^{(\alpha)}(\vec{k})\, \epsilon^{(\beta)*}(\vec{k}) = g^{\alpha\beta} \tag{3.127}$$

Men kan de polarisatie-indices als Lorentzindices opvatten.

4 Symmetrieën in de Klassieke Velden-theorie

4.1 Transformaties van het klassieke veld onder de Poincaré-groep

Het klassieke veld wordt genoteerd door $\varphi_r(x)$ waarbij r de index is die aangeeft hoe φ_r onder de Lorentz-groep transformeert. De voorbeelden die in het vorige hoofdstuk behandeld zijn waren

$\varphi_r(x) = \phi(x)$	geen index	scalaire veld	spin nul
$\varphi_r(x) = \psi_r(x)$	$r = 1, 2, 3, 4$	Dirac veld	spin half
$\varphi_r(x) = A_\mu(x)$	$\mu = 0, 1, 2, 3$	E.M. veld	spin een

Poincaré-transformatie

$$x^\mu \quad \rightarrow \quad x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \qquad \Rightarrow \quad \varphi_r(x) \quad \rightarrow \quad \varphi'_r(x') = S(\Lambda)_{rs}\varphi_s(x) \tag{4.1}$$

We gaan nu $S(\Lambda)$ bepalen voor de drie velden die hierboven staan aangegeven.

<u>**scalaire veld**</u>

$$S(\Lambda) = 1 \quad \text{dit volgt uit} \quad \varphi'_r(x') = \varphi_r(x) \tag{4.2}$$

<u>**Dirac-veld**</u>

Volgens het principe van de speciale relativiteit moet de Dirac-vergelijking in alle coördinaten-stelsels dezelfde vorm hebben.

$$\Big(i\,\hbar\,\gamma^\mu\,\partial'_\mu - mc\Big)\,\psi'(x') = 0 \qquad \partial'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu \tag{4.3}$$

invullen geeft

$$\Big(i\,\hbar\,\gamma^\mu\,(\Lambda^{-1})^\nu_\mu\,\partial_\nu - mc\Big)\,S(\Lambda)\psi(x) = 0$$

$$\rightarrow \quad \Big(i\,\hbar\,S(\Lambda)^{-1}\,\gamma^\mu\,S(\Lambda)\,(\Lambda^{-1})^\nu_\mu\,\partial_\nu - mc\Big)\,\psi(x) = 0 \tag{4.4}$$

Vergelijking met (3.32) geeft

$$S(\Lambda)^{-1}\,\gamma^\mu\,S(\Lambda)\,(\Lambda^{-1})^\nu_\mu = \gamma^\nu \quad \text{of} \quad S(\Lambda)^{-1}\,\gamma^\mu\,S(\Lambda) = (\Lambda)^\mu_\nu\,\gamma^\nu \tag{4.5}$$

Om $S(\Lambda)$ te bepalen gaan wij de Lorentz-transformaties infinitesimaal nemen.

$$\Lambda(\omega) = \exp\Big(\omega^{\alpha\beta}\,I_{\alpha\beta}\Big) \qquad \omega^{\alpha\beta} = -\omega^{\beta\alpha} \qquad I_{\alpha\beta} = -I_{\beta\alpha}$$

$$\Big(I_{\alpha\beta}\Big)^\mu_{\ \nu} = g_{\alpha\nu}\,\delta^\mu_\beta - g_{\beta\nu}\,\delta^\mu_\alpha \qquad x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu(\omega)\,x^\nu \tag{4.6}$$

Vervang $\omega^{\alpha\beta}$ door $\Delta\omega^{\alpha\beta} \ll 1$

$$\Lambda^{\mu}_{\nu}(\Delta\omega) = \delta^{\mu}_{\nu} + \Delta\omega^{\alpha\beta} \left(I_{\alpha\beta}\right)^{\mu}_{\nu} \tag{4.7}$$

Probeer de volgende oplossing

$$S_{rt}(\Delta\omega) = \delta_{rt} + \frac{i}{2}\,\Delta\omega^{\alpha\beta} \left(\sigma_{\alpha\beta}\right)_{rt} \tag{4.8}$$

waarbij $\sigma_{\alpha\beta}$ een willekeurige matrix is die werkt op het Dirac-veld $\psi_t(x)$ $r,t = 1,2,3,4$. De inverse van S_{rt} is gegeven door

$$\left(S^{-1}\right)_{rt}(\Delta\omega) = \delta_{rt} - \frac{i}{2}\,\Delta\omega^{\alpha\beta} \left(\sigma_{\alpha\beta}\right)_{rt} \tag{4.9}$$

Vul (4.8) en (4.9) in (4.5)

$$\left(S^{-1}\right)_{rt}(\Delta\omega) \left(\gamma^{\mu}\right)_{ts} S_{su}(\Delta\omega) = \Lambda^{\mu}_{\nu}(\Delta\omega) \left(\gamma^{\nu}\right)_{ru} \tag{4.10}$$

Na expansie links en rechts tot op orde $\Delta\omega$ krijgen wij de relatie

$$\frac{i}{2}\,[\gamma^{\mu}, \sigma_{\alpha\beta}]_{ru} = \left(I_{\alpha\beta}\right)^{\mu}_{\nu} \left(\gamma^{\nu}\right)_{ru} = \left(g_{\alpha\nu}\,\delta^{\mu}_{\beta} - g_{\beta\nu}\,\delta^{\mu}_{\alpha}\right) \left(\gamma^{\nu}\right)_{ru} \tag{4.11}$$

De oplossing is

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}\,[\gamma_{\alpha}, \gamma_{\beta}] \tag{4.12}$$

Dus $S(\Lambda)$ is een representatie van de Lorentz-groep in de spinor-ruimte of Dirac-veld-ruimte. Voor algemene $\omega_{\alpha\beta}$ kunnen we schrijven

$$S(\Lambda) = \exp\left(\frac{i}{2}\,\omega^{\alpha\beta}\,\sigma_{\alpha\beta}\right) \tag{4.13}$$

omdat de Lorentz-groep een Lie-groep is.
Rotaties hebben betrekking op σ_{ij} $i,j = 1,2,3$

$$\sigma_{ij} \equiv \Sigma_k = \begin{pmatrix} \sigma_k & \emptyset \\ \emptyset & \sigma_k \end{pmatrix} \quad i,j,k \quad \text{cyclisch, bijv.} \quad \sigma_{12} = \Sigma_3 \tag{4.14}$$

Speciale Lorentz-transformaties (boosts) hebben betrekking op σ_{0k} $k = 1,2,3$

$$\sigma_{0k} \equiv B_k = i\,\gamma_0\,\gamma_k = i \begin{pmatrix} \emptyset & \sigma_k \\ \sigma_k & \emptyset \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

Eigenschappen

$$\Sigma_k^2 = E \qquad B_k^2 = -E \qquad B_k^3 = -B_k \qquad B_k^4 = E \quad \text{etc.} \tag{4.16}$$

waarbij E de vier bij vier eenheidsmatrix is.
voorbeelden:

1 Rotatie om de k-as $k = x, y, z = 1, 2, 3$

$$\omega^{ij} = \frac{\theta_k}{2} \qquad i, j, k \qquad \text{cyclisch}$$

$$S\left(\frac{\theta_k}{2}\right) = \exp\left\{i\,\frac{\theta_k}{2}\,\Sigma_k\right\} = E\,\cos\frac{\theta_k}{2} + i\,\Sigma_k\,\sin\frac{\theta_k}{2}$$

$$S^\dagger\left(\frac{\theta_k}{2}\right) = S^{-1}\left(\frac{\theta_k}{2}\right) \qquad S \text{ is unitair} \tag{4.17}$$

2 Speciale Lorentz-transformatie in de k-richting

$$\omega^{0k} = \frac{\chi_k}{2} \qquad \tanh\chi_k = -\frac{v_k}{c}$$

$$S\left(\frac{\chi_k}{2}\right) = \exp\left\{i\,\frac{\chi_k}{2}\,B_k\right\} = E\,\cosh\frac{\chi_k}{2} + i\,B_k\,\sinh\frac{\chi_k}{2} =$$

$$= E\,\cosh\frac{\chi_k}{2} - \gamma_0\,\gamma_k\,\sinh\frac{\chi_k}{2}$$

$$S^{-1}\left(\frac{\chi_k}{2}\right) = E\,\cosh\frac{\chi_k}{2} - i\,B_k\,\sinh\frac{\chi_k}{2} = E\,\cosh\frac{\chi_k}{2} + \gamma_0\,\gamma_k\,\sinh\frac{\chi_k}{2}$$

$$\neq S^\dagger\left(\frac{\chi_k}{2}\right) \qquad S \text{ is niet unitair} \tag{4.18}$$

Merk op dat i.h.a geldt

$$S^{-1}(\Lambda) = \gamma_0\,S^\dagger(\Lambda)\,\gamma_0 \quad \text{of} \quad S^\dagger(\Lambda) = \gamma_0\,S^{-1}(\Lambda)\,\gamma_0 \tag{4.19}$$

Elektromagnetische (E.M.) veld

Als de ijk-keuze Lorentz-covariant is dan transformeert $A^\mu(x)$ als (zie (4.6))

$$A_\mu(x) \quad \to A'_\mu(x') = \left(\Lambda^{-1}(\omega)\right)^\nu_{\ \mu} A_\nu(x)$$

$$\to \quad S(\Lambda) = \Lambda^{-1} = \exp\left(-\,\omega^{\alpha\beta}\,I_{\alpha\beta}\right) \tag{4.20}$$

Samenvattend luidt de algemene Lorentz-transformatie van het veld $\varphi_r(x)$

$$\varphi'_r(x') = S(\Lambda)_{rs}\,\varphi_s(x) \quad \text{met} \quad S(\Lambda) = \exp\left(-\,\omega^{\alpha\beta}\,s_{\alpha\beta}\right) \tag{4.21}$$

Scalaire veld	$\varphi_r(x) = \phi(x)$	$s_{\alpha\beta} = 0$
Dirac-veld	$\varphi_r(x) = \psi_r(x)$	$s_{\alpha\beta} = -i\,\sigma_{\alpha\beta}/2$
E.M. veld	$\varphi_r(x) = A_\mu(x)$	$s_{\alpha\beta} = I_{\alpha\beta}$

We leiden nu de representaties van de Lie-algebra $\mathcal{L}(SO(3,1)$ af

$$\varphi'_r(x) = S(\Lambda)_{rs}\,\varphi_s(\Lambda^{-1}x) \tag{4.22}$$

neem $\Delta\omega^{\alpha\beta}$ weer infinitesimaal

$$S(\Lambda) = 1 - \Delta\omega^{\alpha\beta}\,s_{\alpha\beta} \qquad \Lambda^{-1} = 1 - \Delta\omega^{\alpha\beta}\,I_{\alpha\beta} \tag{4.23}$$

dan transformeert

$$\varphi_s(\Lambda^{-1}x^\mu) = \varphi_s\left(\left\{\delta^\mu_\nu - \Delta\omega^{\alpha\beta}\left(I_{\alpha\beta}\right)^\mu_\nu\right\} x^\nu\right) = \varphi_s(x) - \Delta\omega^{\alpha\beta}\left(I_{\alpha\beta}\right)^\mu_\nu x^\nu\,\partial_\mu\,\varphi_s(x)$$

$$= \left(1 - \Delta\omega^{\alpha\beta}\left(x_\alpha\,\partial_\beta - x_\beta\,\partial_\alpha\right)\right)\,\varphi_s(x) \tag{4.24}$$

Met behulp van (4.22) kunnen we schrijven

$$\varphi'_r(x) = \left\{\delta_{rs} - \Delta\omega^{\alpha\beta}\left((x_\alpha\,\partial_\beta - x_\beta\,\partial_\alpha)\,\delta_{rs} + (s_{\alpha\beta})_{rs}\right)\right\}\varphi_s(x)$$

$$= \left(1 + i\,\frac{\omega^{\alpha\beta}}{\hbar}\,M_{\alpha\beta}\right)_{rs}\,\varphi_s(x)$$

$$\text{met}\quad M_{\alpha\beta} = i\,\hbar\,(x_\alpha\,\partial_\beta - x_\beta\,\partial_\alpha + s_{\alpha\beta}) \tag{4.25}$$

De afleiding van de Lie-algebra $\mathcal{L}(T_4)$ van de translatie groep gaat analoog

$$\varphi_r(x) \quad\rightarrow\quad \varphi'_r(x+a) = \varphi_r(x) \quad\text{of}\quad \varphi'_r(x) = \varphi_r(x-a) \tag{4.26}$$

Neem de translaties weer infinitesimaal $a^\mu \ll 1$

$$\varphi'_r(x) = (1 - a^\mu\,\partial_\mu)\,\varphi_r(x) \quad\rightarrow\quad P_\mu = i\,\hbar\,\partial_\mu$$

$$\varphi'_r(x) = \left(1 + i\,\frac{a^\mu}{\hbar}\,P_\mu\right)\varphi_r(x) \tag{4.27}$$

Men kan nu controleren dat $M_{\mu\nu}$ en P_μ representaties zijn van de Lie-algebra $\mathcal{L}(SO(3,1)\Box T_4)$ van de Poincaré-groep

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i\,\hbar\left\{g_{\nu\rho}\,M_{\mu\sigma} - g_{\nu\sigma}\,M_{\mu\rho} - g_{\mu\rho}\,M_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}\,M_{\nu\rho}\right\}$$

$$[P_\mu, M_{\rho\sigma}] = i\,\hbar\left\{g_{\mu\rho}\,P_\sigma - g_{\mu\sigma}\,P_\rho\right\}$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \tag{4.28}$$

4.2 Transformaties van klassieke velden onder pariteit, tijds-omkeer en ladingsconjugatie

Pariteitstransformatie

$$
\begin{aligned}
&t \quad \rightarrow \quad t' = t \qquad x_k \quad \rightarrow \quad x'_k = -x_k \quad k = 1,2,3 \\
&\varphi_r(\vec{x},t) \quad \rightarrow \quad \varphi'_r(\vec{x}',t') = \Big(S_P\Big)_{rs}\, \varphi_s(\vec{x},t)
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

tijds-omkeer-transformatie

$$
\begin{aligned}
&t \quad \rightarrow \quad t' = -t \qquad x_k \quad \rightarrow \quad x'_k = x_k \quad k = 1,2,3 \\
&\varphi_r(\vec{x},t) \quad \rightarrow \quad \varphi'_r(\vec{x}',t') = \Big(S_T\Big)_{rs}\, \varphi^*_s(\vec{x},t)
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

Bepaling van S_P en S_T voor de verschillende velden

<u>scalaire veld</u>

Onder pariteits-omkeer transformeert het scalaire veld als

$$
\begin{aligned}
&\phi'(-\vec{x},t) = S_P\, \phi(\vec{x},t) \\
&S_P = 1 \quad \text{scalaire veld} \quad S_P = -1 \quad \text{pseudo-scalair veld}
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

Onder tijds-omkeer transformeert het complexe veld als

$$
\begin{aligned}
&\phi(\vec{x},-t) = S_T\, \phi^*(\vec{x},t) \\
&S_T = 1 \quad \text{scalair veld} \quad S_T = -1 \quad \text{pseudo-scalair veld}
\end{aligned}
\tag{4.32}
$$

In het geval het veld reëel is kan men $*$ weglaten.

<u>Dirac-veld</u>

Onder pariteits-transformaties verandert de Dirac-vergelijking in

$$
\begin{aligned}
&\Big(i\,\hbar\,\gamma^\mu\,\partial'_\mu - mc\Big)\ \psi'(\vec{x}',t') = 0 \\
&\Big(i\,\hbar\,\gamma^0\,\partial'_0 + i\,\hbar\,\gamma^k\,\partial'_k - mc\Big)\ S_P\,\psi(\vec{x},t) = 0 \qquad \partial'_0 = \partial_0 \quad \partial'_k = -\partial_k \\
&\Big(i\,\hbar\,\gamma^0\,\partial_0 - i\,\hbar\,\gamma^k\,\partial_k - mc\Big)\ S_P\,\psi(\vec{x},t) = 0 \\
&\Big(i\,\hbar\,S_P^{-1}\,\gamma^0\,S_P\,\partial_0 - i\,\hbar\,S_P^{-1}\,\gamma^k\,S_P\,\partial_k - mc\Big)\ \psi(\vec{x},t) = 0
\end{aligned}
\tag{4.33}
$$

Anderzijds luidt de Diracvergelijking

$$\Big(i\,\hbar\,\gamma^0\,\partial_0 + i\,\hbar\,\gamma^k\,\partial_k - mc\Big)\;\psi(\vec{x},t) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad S_P^{-1}\,\gamma^0\,S_P = \gamma^0 \qquad S_P^{-1}\,\gamma^k\,S_P = -\gamma^k \tag{4.34}$$

De algemene oplossing is

$$S_P = \eta\,\gamma^0 = \eta\,\gamma_0 \quad \eta \text{ is een fase-factor} \quad \eta = e^{i\,\alpha} \tag{4.35}$$

Kies $\alpha = 0$ (Dirac-representatie). De eigenschappen zijn

$$S_P = \gamma^0 \quad \rightarrow \quad S_P^\dagger = S_P^{-1} = S_P = S_P^* \quad S_P \text{ is unitair}$$

$$S_P\,u(\vec{p},s) = u(-\vec{p},s) \qquad S_P\,v(\vec{p},s) = -v(-\vec{p},s) \tag{4.36}$$

Spinoren en anti-spinoren hebben tegengestelde pariteit.
Onder tijds-omkeer-transformaties verandert de Dirac-vergelijking in

$$\Big(i\,\hbar\,\gamma^\mu\,\partial'_\mu - mc\Big)\;\psi'(\vec{x}',t') = 0$$

$$\Big(i\,\hbar\,\gamma^0\,\partial'_0 + i\,\hbar\,\gamma^k\,\partial'_k - mc\Big)\;S_T\,\psi^*(\vec{x},t) = 0 \qquad \partial'_0 = -\partial_0 \quad \partial'_k = \partial_k$$

$$\Big(-i\,\hbar\,\gamma^0\,\partial_0 + i\,\hbar\,\gamma^k\,\partial_k - mc\Big)\;S_T\,\psi^*(\vec{x},t) = 0$$

$$\Big(-i\,\hbar\,S_T^{-1}\,\gamma^0\,S_T\,\partial_0 + i\,\hbar\,S_T^{-1}\,\gamma^k\,S_T\,\partial_k - mc\Big)\;\psi^*(\vec{x},t) = 0 \tag{4.37}$$

Uit complexe conjugatie van de Dirac-vergelijking

$$\Big(i\,\hbar\,\gamma^0\,\partial_0 + i\,\hbar\,\gamma^k\,\partial_k - mc\Big)\;\psi(\vec{x},t) = 0 \tag{4.38}$$

volgt

$$\Big(-i\,\hbar\,(\gamma^0)^*\,\partial_0 - i\,\hbar\,(\gamma^k)^*\,\partial_k - mc\Big)\;\psi^*(\vec{x},t) = 0 \tag{4.39}$$

$$S_T^{-1}\,\gamma^0\,S_T = (\gamma^0)^* = (\gamma^0)^T \qquad S_T^{-1}\,\gamma^k\,S_T = -(\gamma^k)^* = (\gamma^k)^T$$

$$\rightarrow \quad S_T^{-1}\,\gamma^\mu\,S_T = (\gamma^\mu)^T \tag{4.40}$$

Hierbij hebben wij gebruik gemaakt van (3.36) De algemene oplossing is

$$S_T = i\,\eta\,\gamma^1\,\gamma^3 \quad \eta \text{ is een fase-factor} \quad \eta = e^{i\,\alpha} \tag{4.41}$$

Kies $\alpha = 0$ (Dirac-representatie). De eigenschappen zijn

$$S_T = i\,\gamma^1\,\gamma^3 = -\Sigma_2 = -\begin{pmatrix} \sigma_2 & \emptyset \\ \emptyset & \sigma_2 \end{pmatrix}$$

$$S_T = S_T^\dagger = S_T^{-1} = -S_T^* \qquad (S_T)^T = -S_T \qquad S_T \text{ is unitair}$$

$$S_T\,u(\vec{p},s) = i\,(-1)^{s+1/2}\,u^*(-\vec{p},-s)$$

$$S_T\,v(\vec{p},s) = -i\,(-1)^{s+1/2}\,v^*(-\vec{p},-s) \tag{4.42}$$

Elektromagnetische veld

Onder pariteits-omkeer transformeert het elektromagnetische veld als

$$A'_0(\vec{x}',t') = A'_0(-\vec{x},t) = A_0(\vec{x},t) \qquad A'_k(\vec{x}',t') = A'_k(-\vec{x},t) = -A_k(\vec{x},t)$$

$$\Rightarrow \quad S_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = S \quad \text{ruimtelijke inversie} \tag{4.43}$$

Bovenstaande volgt uit het feit dat A_0 een scalair en $\vec{A}$ een vector is. De eerste transformeren onder pariteit met een plusteken terwijl de een minteken krijgen.
Onder tijds-omkeer transformeert het elektromagnetische veld als

$$A'_0(\vec{x}',t') = A'_0(\vec{x}',-t) = A_0(\vec{x},t) \qquad A'_k(\vec{x}',t') = A'_k(\vec{x}',-t) = -A_k(\vec{x},t)$$

$$\Rightarrow \quad S_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.44}$$

Dit lijkt op het eerste oog verrassend echter de verklaring luidt als volgt. Voor een statisch (tijds-onafhankelijk) eclectische veld $\vec{E}$ geldt $\vec{E} = -\vec{\nabla} A_0$. het veld $\vec{E}$ mag niet van teken omdraaien als $t \to -t$ dus A_0 draait ook niet van teken om. Deze eigenschap verandert niet als wij $\vec{E}$ in een ander referentie-systeem bekijken waarbij $\vec{E}$ gegeven wordt door

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} A_0 - \frac{\partial\,\vec{A}}{c\partial t} \tag{4.45}$$

maar dit betekent dat als $t \to -t$ geldt $\vec{A} \to -\vec{A}$.
Naast pariteit en tijds-omkeer bestaat er in de velden-theorie ook nog een andere symmetrie-operatie namelijk ladingsconjugatie notatie C. Deze transformeert deeltjes

in anti-deeltjes. De betekenis wordt pas duidelijk bij tweede kwantisatie (ook wel veld-kwantisatie genoemd). Echter deze symmetrie heeft ook consequenties voor klassieke velden

$$\varphi_r(x) \quad \rightarrow \quad \varphi'_r(x) = \Big(S_C\Big)_{rs}\, \varphi^*_r(x) \tag{4.46}$$

Bepaling van S_C voor de verschillende velden

scalaire veld

Onder ladingsconjugatie transformeert het complexe scalaire veld als

$$\phi'(x) = \phi^*(x) \quad \rightarrow \quad S_C = 1 \tag{4.47}$$

Als $\phi^*(x) = \phi(x)$ (veld is reëel) dan is $\phi(x)$ een eigen-toestand onder ladingsconjugatie.

Dirac-veld

Onder ladingsconjugatie transformeert het Dirac-veld als

$$\psi'(x) = S_C\, \bar{\psi}^T(x) = S_C\, \gamma^0\, \psi^*(x) \tag{4.48}$$

Bepaling van S_C

$$\begin{aligned} (i\,\hbar\,\gamma^\mu\,\partial_\mu - mc)\ \psi'(x) &= 0 \\ (i\,\hbar\,\gamma^\mu\,\partial_\mu - mc)\ S_C\,\gamma^0\,\psi^*(x) &= 0 \end{aligned} \tag{4.49}$$

Vermenigvuldig de linkerkant van de vergelijking met $\gamma^0\, S_C^{-1}$

$$\Big(i\,\hbar\,\gamma^0\, S_C^{-1}\,\gamma^\mu\, S_C\,\gamma^0\,\partial_\mu - mc\Big)\ \psi^*(x) = 0 \tag{4.50}$$

Complex conjugeer de bovenstaande uitdrukking

$$\Big(-i\,\hbar\,\Big(\gamma^0\, S_C^{-1})^*\,\Big(\gamma^\mu\Big)^*\,\Big(S_C\,\gamma^0\Big)^*\,\partial_\mu - mc\Big)\ \psi(x) = 0 \tag{4.51}$$

Anderzijds hebben wij

$$(i\,\hbar\,\gamma^\mu\,\partial_\mu - mc)\ \psi(x) = 0 \tag{4.52}$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} &\Big(\gamma^0\, S_C^{-1})^*\,\Big(\gamma^\mu\Big)^*\,\Big(S_C\,\gamma^0\Big)^* = -\gamma^\mu \\ \rightarrow \quad &\Big(S_C^{-1})^*\,\Big(\gamma^\mu\Big)^*\, S_C^* = -\gamma^0\,\gamma^\mu\,\gamma^0 = -\Big(\gamma^\mu)^\dagger \\ \rightarrow \quad &S_C^{-1}\,\gamma^\mu\, S_C = -(\gamma^\mu)^T \end{aligned} \tag{4.53}$$

De algemene oplossing is

$$S_C = i\,\eta\,\gamma_2\,\gamma^0 \quad \eta \text{ is een fase-factor} \tag{4.54}$$

Kies $\eta = 1$. De eigenschappen zijn

$$\begin{aligned}
&S_C = i\,\gamma_2\,\gamma^0 \quad \rightarrow \quad S_C = -S_C^{-1} = -S_C^{\dagger} = -S_C^{T} \quad \text{en} \quad S_C^{*} = S_C \\
&S_C\,\bar{u}^T(\vec{p},s) = (-1)^{s-1/2}\,v(\vec{p},s) \\
&S_C\,\bar{v}^T(\vec{p},s) = (-1)^{s-1/2}\,u(\vec{p},s)
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Merk op dat S_P, S_T en S_C unitair zijn. De ladingsconjugatie-operator transformeert spinoren in anti-spinoren en vice versa. S_C transformeert de Pauli-spinor $\chi^{(s)}$ in $\chi^{(-s)}$ vandaar dat in de definitie van $v(\vec{p},s)$ de Pauli-spinor $\chi^{(-s)}$ voorkomt.

Elektromagnetisch veld

Onder ladingsconjugatie transformeert het elektromagnetische veld als

$$A'_\mu(x) = -A_\mu(x) \quad \rightarrow \quad S_C = -1 \tag{4.56}$$

$A_\mu(x)$ is een reëel veld en dus een eigen-toestand onder ladingsconjugatie. Het minteken kan pas verklaard worden nadat tweede kwantisatie is toegepast. Merk op dat er een relatie bestaat tussen de transformatie-eigenschappen van het Dirac-veld enerzijds en die van het scalaire veld en elektromagnetische veld anderzijds. Definieer de scalaire dichtheid $j(x) = \bar{\psi}(x)\,\psi(x)$ en de vector-dichtheid (stroom) $j_\mu(x) = \bar{\psi}(x)\,\gamma_\mu\,\psi(x)$. De transformatie-eigenschappen van $j(x)$ en $j_\mu(x)$ worden bepaald door die van $\psi(x)$. Verder eisen wij dat $\phi(x)$ en $A_\mu(x)$ op dezelfde wijze transformeren als $j(x)$ en $j_\mu(x)$.

4.3 Lagrange- en Hamiltonformalisme voor klassieke velden

De Lagrangiaan (Lagrange-functie) voor klassieke velden wordt gedefinieerd door

$$L[\varphi_r, \dot{\varphi}_r, t] = \int d^3\vec{x}\,\mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\mu\,\varphi_r, x_\mu) \tag{4.57}$$

Dit is een functionaal!. De actie wordt dan gegeven door

$$S[\varphi_r, \dot{\varphi}_r] = c\int_{t_1}^{t_2} dt\,L[\varphi_r, \dot{\varphi}_r, t] = \int_R d^4x\,\mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\mu\,\varphi_r, x_\mu) \tag{4.58}$$

waarbij $\mathcal{L}$ de Lagrange-dichtheid is. In het vervolg laten wij de expliciete afhankelijkheid van $\mathcal{L}$ van x_μ weg. R is een vier-dimensionale ruimte-tijd volume-element zodanig dat $\int_R d^4x$ een Lorentz-invariant is.

$$\begin{aligned}
&\int d^4x' = \int d^4x\,\Big|\frac{\partial\,x'_\mu}{\partial\,x_\nu}\Big| = \int d^4x\,|\det\Lambda| = \int d^4x \quad \text{met} \quad x'_\mu = \Lambda_\mu^\lambda\,x_\lambda \\
&\rightarrow \quad \frac{\partial\,x'_\mu}{\partial\,x_\nu} = \Lambda_\mu^\lambda\,\delta_\lambda^\nu = \Lambda_\mu^\nu \qquad |\Lambda_\mu^\nu| \equiv |\det\Lambda|
\end{aligned} \tag{4.59}$$

De grens van de ruimte R noteren wij met ∂R de boven- en benedengrens van de integraal $\int d^4x$ worden bepaald door de hyper-oppervlakken die ontstaan door de intersecties $t = t_1$ en $t = t_2$ die een deel vormen van ∂R.

Principe van de kleinste actie (Principe van Hamilton voor velden)

De bewegingsvergelijking voor het veld $\varphi_r(x)$ wordt gegeven door die waarde voor dat veld waarvoor de actie minimaal is. Om het minimum te vinden variëren wij het veld zodanig dat $\varphi_r(x) = const.$ als $x \in \partial R$.

$$\varphi_r(x) \quad \rightarrow \quad \varphi_r(x) + \delta\varphi_r(x) \quad \text{met} \quad \delta\varphi_r(x) = 0 \quad \text{als} \quad x \in \partial R \tag{4.60}$$

De actie varieert dan als

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_R d^4x \Big\{ \mathcal{L}(\varphi_r(x) + \delta\varphi_r(x), \partial_\lambda\varphi_r(x) + \delta\partial_\lambda\varphi_r(x)) - \mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\lambda\varphi_r(x)) \Big\} \\
&= \int_R d^4x \Big\{ \delta\varphi_r(x) \, \frac{\partial}{\partial \; \varphi_r(x)} \mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\lambda\varphi_r(x)) \\
&+ \delta\partial_\mu\varphi_r(x) \, \frac{\partial}{\partial \; \partial_\mu\varphi_r(x)} \mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\lambda\varphi_r(x)) \Big\}
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Gebruikmakend van $\partial_\mu\delta\varphi_r(x) = \delta\partial_\mu\varphi_r(x)$ kunnen we schrijven

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_R d^4x \, \delta\varphi_r(x) \Big\{ \frac{\partial}{\partial \; \varphi_r(x)} \mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\lambda\varphi_r(x)) - \partial_\mu \, \frac{\partial}{\partial \; \partial_\mu\varphi_r(x)} \mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\lambda\varphi_r(x)) \Big\} \\
&+ \int_R d^4x \, \partial_\mu \Big\{ \delta\varphi_r(x) \, \frac{\partial}{\partial \; \partial_\mu\varphi_r(x)} \mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\lambda\varphi_r(x)) \Big\} \\
&= \int_R d^4x \, \delta\varphi_r(x) \Big\{ \frac{\partial}{\partial \; \varphi_r(x)} \mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\lambda\varphi_r(x)) - \partial_\mu \, \frac{\partial}{\partial \; \partial_\mu\varphi_r(x)} \mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\lambda\varphi_r(x)) \Big\} \\
&+ \int_{\partial R} d\sigma_\mu \Big\{ \delta\varphi_r(x) \, \frac{\partial}{\partial \; \partial_\mu\varphi_r(x)} \mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\lambda\varphi_r(x)) \Big\}
\end{aligned} \tag{4.62}$$

In de laatste stap is de Stelling van Gauss

$$\int_R d^4x \, \partial_\mu \, V^\mu(x) = \int_{\partial R} d\sigma_\mu \, V^\mu(x) \tag{4.63}$$

gebruikt die een vierdimensionale ruimte-integraal in een drie-dimensionale oppervlakte-integraal $\int_{\partial R} d\sigma_\mu$ omzet. De oppervlakte-integraal is nul omdat $\delta\varphi(x) = 0$ voor $x \in \partial R$. Hieruit leiden we de Euler-Lagrange-vergelijking af

$$\begin{aligned}
&\delta S = 0 \quad \Rightarrow \\
&\frac{\partial}{\partial \; \varphi_r(x)} \mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\lambda\varphi_r(x)) = \partial_\mu \, \frac{\partial}{\partial \; \partial_\mu\varphi_r(x)} \mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\lambda\varphi_r(x))
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Definitie canonieke impuls

$$\Pi_r(x) = \frac{\partial}{\partial\, \dot{\varphi}_r(x)} \mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\lambda \varphi_r(x)) \quad \text{met} \quad \dot{\varphi}_r(x) = \frac{\partial\, \varphi_r(x)}{\partial\, t} \tag{4.65}$$

Definitie Hamilton-dichtheid

$$\mathcal{H}(\Pi_r(x), \varphi_r(x)) = \Pi_r(x)\, \dot{\varphi}_r(x) - \mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\mu \varphi_r(x)) \tag{4.66}$$

De Hamilton-vergelijkingen luiden:

$$-\frac{\partial\, \mathcal{H}}{\partial\, \varphi_r} = \frac{\partial\, \mathcal{L}}{\partial\, \varphi_r} = \partial_\mu\, \frac{\partial\, \mathcal{L}}{\partial\, \partial_\mu\, \varphi_r} = \dot{\Pi}_r + \partial_k\, \frac{\partial\, \mathcal{L}}{\partial\, \partial_k\, \varphi_r}$$

$$\text{vanwege} \quad \partial_0\, \frac{\partial\, \mathcal{L}}{\partial\, \partial_0\, \varphi_r} = \frac{\partial}{\partial\, t}\, \frac{\partial\, \mathcal{L}}{\partial\, \dot{\varphi}_r} = \frac{\partial\, \Pi_r}{\partial\, t} = \dot{\Pi}_r$$

$$\frac{\partial\, \mathcal{H}}{\partial\, \Pi_r} = \dot{\varphi}_r \tag{4.67}$$

Toepassingen

A <u>Scalaire veld</u>

De Lagrange-dichtheid wordt gegeven door

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi\, \partial_\mu \phi - \frac{1}{2}\, \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\, \phi^2 \tag{4.68}$$

Toepassing van de Euler-Lagrange-vergelijking geeft

$$\frac{\partial\, \mathcal{L}}{\partial\, \partial_\lambda \phi} = \frac{\partial}{\partial\, \partial_\lambda \phi} \left[\frac{1}{2} \partial^\mu \phi\, \partial_\mu \phi - \frac{1}{2}\, \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\, \phi^2 \right] = \frac{1}{2}\, g^{\mu\sigma}\, \delta^\lambda_\sigma\, \partial_\mu \phi$$

$$+\frac{1}{2}\, \delta^\lambda_\mu\, \partial^\mu \phi = \partial^\lambda \phi$$

$$\frac{\partial\, \mathcal{L}}{\partial\, \phi} = -\frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\, \phi$$

$$\Rightarrow \quad \left(\Box + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi(x) = 0$$

$$\Pi = \frac{1}{c}\, \frac{\partial\, \mathcal{L}}{\partial\, \partial_0 \phi} = \frac{1}{c}\, \partial^0 \phi = \frac{1}{c^2} \dot{\phi}$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{c^2}\, (\dot{\phi})^2 - \frac{1}{2c^2}\, (\dot{\phi})^2 + \frac{1}{2}\, \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \phi + \frac{1}{2}\, \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\, \phi^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2}\, (\dot{\phi})^2 + \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \phi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\, \phi^2 \right) \tag{4.69}$$

Voor het complexe scalaire veld wordt de Lagrange-dichtheid

$$\mathcal{L}(\phi,\phi^*,\partial\phi,\partial\phi^*) = \partial^\mu\phi^*\,\partial_\mu\phi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\,\phi^*\,\phi$$

$$\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,\partial_\lambda\phi} = \partial^\lambda\phi^* \qquad \frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,\partial_\lambda\phi^*} = \partial^\lambda\phi$$

$$\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,\phi} = -\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\,\phi^* \qquad \frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,\phi^*} = -\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\,\phi \tag{4.70}$$

Hieruit volgt

$$\left(\Box + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\phi(x) = 0 \qquad \left(\Box + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\phi^*(x) = 0$$

$$\Pi = \frac{1}{c^2}\,\dot\phi^* \qquad \Pi^* = \frac{1}{c^2}\,\dot\phi$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{c^2}\,\dot\phi^*\,\dot\phi + \vec\nabla\phi^*\cdot\vec\nabla\phi + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\,\phi^*\,\phi \tag{4.71}$$

B <u>Dirac-veld</u>

De Lagrange-dichtheid wordt gegeven door

$$\mathcal{L}(\psi,\bar\psi,\partial_\mu\psi,\partial_\mu\bar\psi) = i\,c\,\hbar\,\bar\psi\,\gamma^\mu\,\partial_\mu\psi - mc^2\,\bar\psi\,\psi$$

$$\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,\partial_\mu\psi} = i\,c\,\hbar\,\bar\psi\,\gamma^\mu \qquad \frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,\partial_\mu\bar\psi} = 0$$

$$\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,\psi} = -mc^2\,\bar\psi \qquad \frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,\bar\psi} = i\,c\,\hbar\,\gamma^\mu\,\partial_\mu\psi - mc^2\,\psi \tag{4.72}$$

De bewegingsvergelijkingen worden

$$i\,\hbar\,\partial_\mu\bar\psi\,\gamma^\mu + mc\,\bar\psi = 0 \qquad i\,\hbar\,\gamma^\mu\,\partial_\mu\psi - mc\,\psi = 0$$

$$\Pi = \frac{1}{c}\,\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,\partial_0\psi} = i\,\hbar\,\bar\psi\,\gamma_0 = i\,\hbar\,\bar\psi^\dagger \qquad \Pi^\dagger = \frac{1}{c}\,\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,\partial_0\bar\psi} = 0 \tag{4.73}$$

Men kan de Dirac-vergelijking ook afleiden uit

$$\mathcal{L}'(\psi,\bar\psi,\partial_\mu\psi,\partial_\mu\bar\psi) = -i\,c\,\hbar\,(\partial_\mu\,\bar\psi)\,\gamma^\mu\,\psi - mc^2\,\bar\psi\,\psi$$

$$\Delta\mathcal{L} = \mathcal{L}' - \mathcal{L} = -i\,c\,\hbar\,\partial_\mu\Big(\bar\psi\,\gamma^\mu\,\psi\Big) \tag{4.74}$$

m.a.w. De Lagrange-dichtheid is tot op een totale afgeleide bepaald. Dit is een algemene stelling die uit de actie kan worden afgeleid.

$$S' - S = \int_R d^4x\, \partial_\mu V^\mu(x) = \int_{\partial R} d\sigma_\mu V^\mu(x) \tag{4.75}$$

Hieruit volgt

$$S \quad \text{minimaal} \quad \overset{\longleftarrow}{\longrightarrow} \quad S' \quad \text{minimaal} \tag{4.76}$$

De Hamilton-dichtheid wordt

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= i\,\hbar\,\psi^\dagger\,\dot{\psi} - i\,\hbar\,\psi^\dagger\,\dot{\psi} - i\,c\,\hbar\,\bar{\psi}\,\gamma^k\,\partial_k\psi + mc^2\,\bar{\psi}\,\psi \\ &= -i\,c\,\hbar\,\bar{\psi}\,\gamma^k\,\partial_k\psi + mc^2\,\bar{\psi}\,\psi\end{aligned} \tag{4.77}$$

C Elektromagnetisch veld

De Lagrange-dichtheid wordt gegeven door:

$$\mathcal{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu) = -\frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu} \quad \text{met} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{4.78}$$

Pas nu de Euler-Lagrange-vergelijking toe

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\, F_{\mu\nu}}{\partial\,\partial_\lambda A_\sigma} = \delta^\lambda_\mu\,\delta^\sigma_\nu - \delta^\lambda_\nu\,\delta^\sigma_\mu \\
&\frac{\partial\, F^{\mu\nu}}{\partial\,\partial_\lambda A_\sigma} = g^{\mu\alpha}\,g^{\nu\beta}\,\frac{\partial\, F_{\alpha\beta}}{\partial\,\partial_\lambda A_\sigma} = g^{\mu\lambda}\,g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}\,g^{\nu\lambda} \\
\Rightarrow\quad &\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,\partial_\lambda A_\sigma} = -\frac{1}{4}\,\frac{\partial\, F_{\mu\nu}}{\partial\,\partial_\lambda A_\sigma}\,F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\,F^{\mu\nu}\,\frac{\partial\, F^{\mu\nu}}{\partial\,\partial_\lambda A_\sigma} \\
&= -\frac{1}{4}\left(\delta^\lambda_\mu\,\delta^\sigma_\nu - \delta^\lambda_\nu\,\delta^\sigma_\mu\right)F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}\left(g^{\mu\lambda}\,g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}\,g^{\nu\lambda}\right) \\
&= -\frac{1}{4}\,F^{\lambda\sigma} + \frac{1}{4}\,F^{\sigma\lambda} - \frac{1}{4}\,F^{\lambda\sigma} + \frac{1}{4}\,F^{\sigma\lambda} = -F^{\lambda\sigma} \\
&\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\, A_\sigma} = 0
\end{aligned} \tag{4.79}$$

Hieruit volgt de bewegingsvergelijking

$$\partial_\lambda\,F^{\lambda\sigma} = 0 \quad \text{of} \quad \Box A_\sigma - \partial_\sigma\partial_\lambda\,A^\lambda = 0 \tag{4.80}$$

De canonieke impuls wordt

$$\Pi^\sigma = \frac{1}{c}\,\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\;\partial_0 A_\sigma} = -\frac{1}{c}\,F^{0\sigma} = \frac{1}{c}\,F^{\sigma 0}$$

$$\rightarrow \quad \Pi^0 = 0 \qquad \Pi^k = \frac{1}{c}\,E^k \quad \text{Elektrostatisch veld} \tag{4.81}$$

Als het veld in wisselwerking treedt met een uitwendige stroom dan wordt de Lagrange-dichtheid

$$\mathcal{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu) = -\frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu} - \frac{e}{\hbar c}\,A_\mu\,J^\mu \tag{4.82}$$

met e als elementaire eenheidslading. De Euler-Lagrangevergelijking geeft

$$\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\;\partial_\lambda A_\sigma} = -F^{\lambda\sigma} \qquad \frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\;A_\sigma} = -\frac{e}{\hbar c}\,J^\sigma$$

$$\rightarrow \quad \partial_\lambda\,F^{\lambda\sigma} = \frac{e}{\hbar c}\,J^\sigma \tag{4.83}$$

Uitgedrukt in de E en B velden wordt de Lagrange-dichtheid

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu} = \frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}\,F^{\nu\mu} = \frac{1}{4}\,Sp(F\,F^D) = \frac{1}{2}\Big(|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2\Big) \tag{4.84}$$

Aanwijzing gebruik de notatie

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow$$

$$F^D = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.85}$$

De Hamilton-dichtheid wordt

$$\mathcal{H} = \Pi^\sigma\,\dot{A}_\sigma - \mathcal{L} = E^k \frac{\partial\;A_k}{c\partial\;t} - \frac{1}{2}\left(|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2\right)$$

$$E_k = F_{k0} = \partial_k\,A_0 - \frac{\partial\;A_k}{c\partial\;t} \quad \rightarrow \quad E^k = \partial^k\,A_0 + \frac{\partial\;A_k}{c\partial\;t}$$

$$\rightarrow \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2\right) - E^k\,\partial^k A_0 = \frac{1}{2}\left(|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2\right) - \vec{E}\cdot\vec{\nabla}\phi$$

$$\text{met} \quad A_0 = \phi \quad \text{elektrostatische potentiaal} \tag{4.86}$$

In de stralings-ijk is $\phi = 0$ zodat

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2\right) \tag{4.87}$$

Noether-theorema voor klassieke velden

Als de actie S invariant is onder een continue transformatie dan bestaat er een behouden stroom.

Deze behouden stroom impliceert weer een behouden lading.

Om dit theorema te bewijzen nemen wij weer alle transformaties infinitesimaal.

$$x^\mu \quad \to x'^\mu = x^\mu + \Delta x^\mu \quad \text{met} \quad \Delta x^\mu = X_i^\mu(x)\,\Delta\omega^i(x) \tag{4.88}$$

De velden transformeren dan als

$$\begin{aligned} &\varphi_r(x) \quad \to \quad \varphi'_r(x') = \varphi_r(x) + \Delta\varphi_r(x) \\ &\partial_\mu\varphi_r(x) \quad \to \quad \partial'_\mu\varphi'_r(x') = \partial_\mu\varphi_r(x) + \Delta\,\partial_\mu\varphi_r(x) \\ &\text{met} \quad \Delta\varphi_r(x) = \Phi_{ri}(x)\,\Delta\omega^i(x) \end{aligned} \tag{4.89}$$

Verder definiëren wij de infinitesimale transformaties

$$\begin{aligned} &\varphi_r(x) \quad \to \quad \varphi'_r(x) = \varphi_r(x) + \delta\varphi_r(x) \\ &\partial_\mu\varphi_r(x) \quad \to \quad \partial_\mu\varphi'_r(x) = \partial_\mu\varphi_r(x) + \delta\,\partial_\mu\varphi_r(x) \end{aligned} \tag{4.90}$$

Let op dat het volgende geldt

$$\delta\,\partial_\mu\varphi_r(x) = \partial_\mu\,\delta\varphi_r(x) \quad \text{maar} \quad \Delta\,\partial_\mu\varphi_r(x) \neq \partial_\mu\,\Delta\varphi_r(x) \tag{4.91}$$

omdat δ niet x^μ transformeert en Δ wel. Merk op dat Δ zowel x als $\varphi_r(x)$ transformeert terwijl δ alleen $\varphi_r(x)$ verandert. Men kan nu de volgende relaties tussen beide infinitesimale transformaties Δ en δ afleiden.

$$\begin{aligned} &\varphi'_r(x') = \varphi'_r(x^\mu + X_i^\mu(x)\Delta\omega^i(x)) = \varphi'_r(x) + X_i^\mu(x)\,\Delta\omega^i(x)\,\partial_\mu\varphi'_r(x) \\ &= \varphi'_r(x) + X_i^\mu(x)\,\Delta\omega^i(x)\,\partial_\mu\varphi_r(x) + X_i^\mu(x)\,\Delta\omega^i(x)\,\partial_\mu\,\delta\varphi_r(x) \end{aligned} \tag{4.92}$$

De laatste term kunnen we weglaten aangezien deze van orde $\Delta\,\delta$ is. Verder hebben wij

$$\begin{aligned} &\delta\varphi_r(x) = \varphi'_r(x) - \varphi_r(x) = \varphi'_r(x') - \varphi_r(x) - X_i^\mu(x)\,\Delta\omega^i(x)\,\partial_\mu\varphi_r(x) \\ &= \Delta\varphi_r(x) - X_i^\mu(x)\,\Delta\omega^i(x)\,\partial_\mu\varphi_r(x) \\ &\to \quad \delta\varphi_r(x) = \left(\Phi_{ri}(x) - X_i^\mu(x)\,\partial_\mu\varphi_r(x)\right)\Delta\omega^i(x) \end{aligned} \tag{4.93}$$

Evenzo geldt

$$\delta\,\partial_\mu\varphi_r(x) = \Delta\partial_\mu\varphi_r(x) - X_i^\nu(x)\,\Delta\omega^i(x)\,\partial_\nu\,\partial_\mu\varphi_r(x) \tag{4.94}$$

Onder bovenstaande transformaties verandert de actie als volgt

$$\delta S = \int_{R'} d^4x'\,\mathcal{L}(\varphi'_r(x'), \partial'_\lambda\varphi'_r(x')) - \int_R d^4x\,\mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\lambda\varphi_r(x)) \tag{4.95}$$

De Jacobiaan van de transformatie is

$$\frac{\partial\ x'^\mu}{\partial\ x^\nu} = \delta^\mu_\nu + \partial_\nu\Big(X_i^\mu(x)\,\Delta\omega^i(x)\Big) \quad\rightarrow\quad d^4x' = \left|\frac{\partial\ x'^\mu}{\partial\ x^\nu}\right| d^4x$$

$$= \Big[1 + \partial_\mu\Big(X_i^\mu(x)\,\Delta\omega^i(x)\Big)\Big] \tag{4.96}$$

Expandeer $\mathcal{L}$ in $\Delta\omega$

$$\mathcal{L}(\varphi'_r(x'), \partial'_\lambda\varphi'_r(x')) = \mathcal{L}(\varphi_r(x) + \Delta\varphi_r(x), \partial_\lambda\varphi_r(x) + \Delta\,\partial_\lambda\varphi_r(x))$$

$$= \mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\lambda\varphi_r(x)) + \Delta\varphi_r(x)\,\frac{\partial}{\partial\ \varphi_r(x)}\,\mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\lambda\varphi_r(x))$$

$$+\Delta\,\partial_\mu\varphi_r(x)\frac{\partial}{\partial\ \partial_\mu\varphi_r(x)}\,\mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\lambda\varphi_r(x)) \tag{4.97}$$

δS wordt dan gelijk aan

$$\delta S = \int_R d^4x\Bigg[\partial_\mu\Big\{X_i^\mu(x)\,\Delta\omega^i(x)\Big\}\,\mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\lambda\varphi_r(x))$$

$$+\Delta\varphi_r(x)\,\frac{\partial}{\partial\ \varphi_r(x)}\,\mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\lambda\varphi_r(x))$$

$$+\Delta\,\partial_\mu\varphi_r(x)\varphi_r(x)\frac{\partial}{\partial\ \partial_\mu\varphi_r(x)}\,\mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\lambda\varphi_r(x))\Bigg]$$

$$= \int_R d^4x\Bigg[\partial_\mu\Big\{X_i^\mu(x)\,\Delta\omega^i(x)\,\mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\lambda\varphi_r(x))\Big\}$$

$$-X_i^\mu(x)\,\Delta\omega^i(x)\,\partial_\mu\mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\lambda\varphi_r(x)) + \Big\{\delta\varphi_r(x)$$

$$+X_i^\mu(x)\,\Delta\omega^i(x)\,\partial_\mu\varphi_r(x)\Big\}\,\frac{\partial}{\partial\ \varphi_r(x)}\,\mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\lambda\varphi_r(x)) + \Big\{\delta\,\partial_\mu\varphi_r(x)$$

$$+X_i^\nu(x)\,\Delta\omega^i(x)\,\partial_\nu\,\partial_\mu\varphi_r(x)\Big\}\,\frac{\partial}{\partial\ \partial_\mu\varphi_r(x)}\,\mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\lambda\varphi_r(x))\Bigg] \tag{4.98}$$

Verwissel in de laatste term μ en ν. Verder hebben wij

$$\partial_\mu \mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\lambda \varphi_r(x)) = \partial_\mu \varphi_r(x) \, \frac{\partial}{\partial \ \varphi_r(x)} \, \mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\lambda \varphi_r(x))$$

$$+\partial_\mu \, \partial_\nu \varphi_r(x) \, \frac{\partial}{\partial \ \partial_\nu \varphi_r(x)} \, \mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\lambda \varphi_r(x)) \tag{4.99}$$

Met behulp van (4.99) vallen de tweede, vierde en de laatste term tegen elkaar weg en kunnen we schrijven

$$\begin{aligned}
\delta S \;\; &= \;\; \int_R d^4x \Big[\partial_\mu \Big\{ X_i^\mu(x) \, \Delta\omega^i(x) \, \mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\lambda \varphi_r(x)) \Big\} \\
&\quad + \delta\varphi_r(x) \, \frac{\partial}{\partial \ \varphi_r(x)} \, \mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\lambda \varphi_r(x)) \\
&\quad + \partial_\mu \, \delta\varphi_r(x) \, \frac{\partial}{\partial \ \partial_\mu \varphi_r(x)} \, \mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\lambda \varphi_r(x)) \Big] \\
&= \int_R d^4x \Big[\partial_\mu \Big\{ X_i^\mu(x) \, \Delta\omega^i(x) \, \mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\lambda \varphi_r(x)) \\
&\quad + \delta\varphi_r(x) \, \frac{\partial}{\partial \ \partial_\mu \varphi_r(x)} \, \mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\lambda \varphi_r(x)) \Big\} \\
&\quad + \delta\varphi_r(x) \Big\{ \frac{\partial}{\partial \ \varphi_r(x)} \, \mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\lambda \varphi_r(x)) \\
&\quad - \partial_\mu \, \frac{\partial}{\partial \ \partial_\mu \varphi_r(x)} \, \mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\lambda \varphi_r(x)) \Big\} \Big]
\end{aligned} \tag{4.100}$$

De laatste term verdwijnt omdat $\varphi_r(x)$ aan de Euler-Lagrange-vergelijking voldoet. Substitueer $\delta\varphi_r(x)$ (4.93) in bovenstaande formule dan kan de verandering in de actie geschreven worden als

$$\begin{aligned}
\delta S \;\; &= \;\; -\int_R d^4x \, \partial_\mu \Big[\Big\{ T^\mu_\nu(x) \, X_i^\nu(x) \\
&\quad - \Phi_{ri}(x) \, \frac{\partial}{\partial \ \partial_\mu \varphi_r(x)} \, \mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\lambda \varphi_r(x)) \Big\} \, \Delta\omega^i(x) \Big]
\end{aligned} \tag{4.101}$$

waarbij de energie-impuls-tensor gedefinieerd is als

$$T^\mu_\nu(x) = \partial_\nu \varphi_r(x) \, \frac{\partial}{\partial \ \partial_\mu \varphi_r(x)} \, \mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\lambda \varphi_r(x)) - \delta^\mu_\nu \, \mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\lambda \varphi_r(x)) \tag{4.102}$$

Wij definiëren nu de Noether-stroom

$$j_i^\mu(x) = T_\nu^\mu(x)\,X_i^\nu(x) - \Phi_{ri}(x)\,\frac{\partial}{\partial\,\partial_\mu\varphi_r(x)}\,\mathcal{L}(\varphi_r(x),\partial_\lambda\varphi_r(x)) \tag{4.103}$$

zodat de verandering van de actie kan worden geschreven als

$$\delta S = -\int_R d^4x\,\partial_\mu\Big(j_i^\mu(x)\,\Delta\omega^i(x)\Big) = -\int_{\partial R} d\sigma_\mu\,\Big(j_i^\mu(x)\,\Delta\omega^i(x)\Big) \tag{4.104}$$

Als S invariant gelaten wordt door de transformatie en $\Delta\omega^i(x)$ is onafhankelijk van x dan

$$\delta S = -\Delta\omega^i\int_R d^4x\,\partial_\mu j_i^\mu(x) = -\Delta\omega^i\int_{\partial R} d\sigma_\mu\,j_i^\mu(x) = 0 \tag{4.105}$$

Dit geldt voor een willekeurige ruimte R en oppervlak ∂R begrensd door $t = t_1$ en $t = t_2$. Dus geldt

$$\partial_\mu j_i^\mu(x) = 0 \tag{4.106}$$

m.a.w. $j_i^\mu(x)$ is een behouden stroom. Hieruit volgt weer dat de lading gedefinieerd door

$$Q_i = \frac{1}{c}\int_V d^3\vec{x}\,j_i^0(\vec{x},t) \quad \rightarrow \quad \frac{d\,Q_i}{d\,t} = 0 \tag{4.107}$$

behouden is.
Bewijs:

$$\begin{aligned}\frac{d\,Q_i}{d\,t} &= \frac{1}{c}\int_V d^3\vec{x}\,\partial_0 j_i^0(\vec{x},t) = \frac{1}{c}\int_V d^3\vec{x}\,\Big(\partial_\mu j_i^\mu(\vec{x},t) - \partial_k j_i^k(\vec{x},t)\Big)\\ &= \frac{1}{c}\int_V d^3\vec{x}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_i(\vec{x},t) = \frac{1}{c}\int_{\partial V} d\vec{S}\cdot\vec{j}_i(\vec{x},t) = 0\\ &\text{Stelling van Gauss}\end{aligned} \tag{4.108}$$

Hierbij hebben we aangenomen dat

$$\vec{j}_i(\vec{x},t) = 0 \quad \text{voor} \quad x \in \partial V \tag{4.109}$$

Meestal neemt men aan dat $|\vec{x}| \rightarrow \infty$.
Opmerking: i.h.a. kan men laten zien dat

$$Q_i = \frac{1}{c}\int_\sigma d\sigma_\mu\,j_i^\mu(\vec{x},t) \tag{4.110}$$

behouden is waarbij σ_μ een hyper-oppervlak is. In het bovenstaande bewijs hebben we $t = \mathit{constant}$ gekozen zodat $d\sigma_\mu = d^3\vec{x}\,\delta_\mu^0$.
De Noether-stroom is niet uniek men kan altijd twee typen termen toevoegen zonder dat de Noether-lading verandert. Deze zijn

1

$$\partial_\mu j_i^\mu = 0 \quad \rightarrow \quad \partial_\mu j_i^{'\mu} = 0 \quad \text{met} \quad j_i^{'\mu} = j_i^\mu + V_i^\mu \tag{4.111}$$

mits $V_i^\mu = 0$ door gebruik te maken van de Euler-Lagrange-vergelijking waaraan alle velden moeten voldoen.

2

$$\partial_\mu j_i^\mu = 0 \quad \rightarrow \quad \partial_\mu j_i^{'\mu} = 0 \quad \text{met} \quad j_i^{'\mu} = j_i^\mu + \partial_\nu A_i^{\mu\nu}$$

$$\text{met de conditie} \quad A_i^{\mu\nu} = -A_i^{\nu\mu} \quad \text{zodat} \quad \partial_\mu \partial_\nu A_i^{\mu\nu} = 0 \tag{4.112}$$

Toepassing van het Noether-theorema op ruimtelijke symmetrieën.

Deze wordt in de relativiteitstheorie gegeven door de Poincaré-groep $SO(3,1)\Box T_4$. De Noether-stromen luiden als volgt:

1 Translaties T_4. Neem deze infinitesimaal $a^\mu \ll 1$.

$$x^{'\mu} = x^\mu + a^\mu \quad \rightarrow \quad \Delta x^\mu = a^\mu$$

$$\Delta x^\mu = X_\nu^\mu(x)\,\Delta\omega^\nu \quad \text{met} \quad \Delta\omega^\nu = a^\nu$$

$$\rightarrow \quad X_\nu^\mu(x) = \delta_\nu^\mu \quad \text{of} \quad X_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}$$

$$\varphi_r'(x+a) = \varphi_r(x) \quad \rightarrow \quad \Delta\varphi_r(x) = 0$$

$$\Delta\varphi_r(x) = \Phi_{r\nu}(x)\,\Delta\omega^\nu \quad \rightarrow \quad \Phi_{r\nu}(x) = 0 \tag{4.113}$$

De Noether-stroom voor translaties wordt gegeven door de energie-impuls-tensor (tweede rang tensor)

$$T_\nu^\mu(x) = j_\nu^\mu(x) \quad \text{of} \quad T^{\mu\nu}(x) = j^{\mu\nu}(x) \quad \text{met} \quad \partial_\mu T^{\mu\nu}(x) = 0 \tag{4.114}$$

2 De eigenlijke orthochrone homogene Lorentz-groep $L_+^\uparrow = SO(3,1)$. Neem de transformaties weer infinitesimaal $\Delta\omega^{\alpha\beta} \ll 1$

$$x^{'\mu} = x^\mu + \Delta\omega^{\alpha\beta}\Big(I_{\alpha\beta}\Big)^\mu_{\ \nu} x^\nu \quad \rightarrow \quad \Delta x^\mu = \Delta\omega^{\alpha\beta}\Big(I_{\alpha\beta}\Big)^\mu_{\ \nu} x^\nu$$

$$\Delta x^\mu = X^\mu_{\alpha\beta}\,\Delta\omega^{\alpha\beta}$$

$$\rightarrow \quad X^\mu_{\alpha\beta} = \Big(I_{\alpha\beta}\Big)^\mu_{\ \nu} x^\nu \quad \text{of} \quad X_{\nu\alpha\beta} = \Big(I_{\alpha\beta}\Big)^\lambda_{\ \nu} x_\lambda \tag{4.115}$$

De velden worden infinitesimaal getransformeerd als

$$\varphi_r'(x') = \varphi_r(x) - \Delta\omega^{\alpha\beta}\Big(s_{\alpha\beta}\Big)_{rt}\varphi_t(x) \qquad \Delta\varphi_r(x) = \Phi_{r\alpha\beta}(x)\,\Delta\omega^{\alpha\beta}$$

$$\rightarrow \quad \Phi_{r\alpha\beta}(x) = -\Big(s_{\alpha\beta}\Big)_{rt}\varphi_t(x) \tag{4.116}$$

De Noether-stroom wordt

$$j^\mu_{\alpha\beta}(x) = T^\mu_\nu(x)\Big(I_{\alpha\beta}\Big)^\nu_{\ \lambda}\, x^\lambda + \Big(s_{\alpha\beta}\Big)_{rt}\,\varphi_t(x)\,\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,\partial_\mu\varphi(x)}$$

$$= T^\mu_\beta(x)\,x_\alpha - T^\mu_\alpha(x)\,x_\beta + \Big(s_{\alpha\beta}\Big)_{rt}\,\varphi_t(x)\,\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,\partial_\mu\varphi_r(x)} \qquad (4.117)$$

Dit leidt tot de definitie van de impuls-moment-tensor (derde rang tensor)

$$M^{\mu\alpha\beta}(x) = j^{\mu\alpha\beta}(x) \quad \text{met} \quad \partial_\mu M^{\mu\alpha\beta}(x) = 0 \qquad (4.118)$$

De Noether-ladingen voor de Poincaré-groep zijn

1 Translaties

$$P^\nu = \frac{1}{c}\int d^3\vec{x}\,T^{0\nu} \qquad \frac{d\,P^\nu}{d\,t} = 0$$

$$\mathcal{H} = T^{00} \quad \text{Hamilton-dichtheid} \qquad (4.119)$$

P^ν is een constante van beweging en representeert de vier-impuls van het veld $\varphi_r(x)$.

2 De eigenlijke orthochrone homogene Lorentz-groep $L^\uparrow_+ = SO(3,1)$.

$$J^{\alpha\beta} = \frac{1}{c}\int d^3\vec{x}\,M^{0\alpha\beta} \qquad \frac{d\,J^{\alpha\beta}}{d\,t} = 0 \qquad (4.120)$$

$J^{\alpha\beta}$ is een constante van beweging en representeert de totale impuls-moment van het veld $\varphi_r(x)$.

$$J^{\alpha\beta} = L^{\alpha\beta} + S^{\alpha\beta}$$

$$S^{\alpha\beta} = \int d^3\vec{x}\,\Pi_r(x)\,\Big(s^{\alpha\beta}\Big)_{rt}\,\varphi_t(x) \quad \text{intrinsiek impuls-moment (spin)}$$

$$L^{\alpha\beta} = \frac{1}{c}\int d^3\vec{x}\,\Big(x^\alpha\,T^{0\beta}(x) - x^\beta\,T^{0\alpha}(x)\Big) \quad \text{baan-impuls-moment} \quad (4.121)$$

Wij gaan de Noether-stroom en de Noether-lading nader bestuderen voor het klassieke scalaire, Dirac- en het Elektromagnetische veld.

1 Scalaire veld

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu\phi\,\partial^\nu\phi - \frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}\,\Big(\partial^\lambda\phi\,\partial_\lambda\phi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\,\phi^2\Big)$$

$$\mathcal{H} = T^{00} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{c^2}(\dot{\phi})^2 + \vec{\nabla}\phi\cdot\vec{\nabla}\phi + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\,\phi^2\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(c^2\,\Pi^2 + \vec{\nabla}\phi\cdot\vec{\nabla}\phi + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\,\phi^2\Big)$$

$$T^{0i} = \partial^0\phi\,\partial^i\phi \tag{4.122}$$

Substitueer de oplossing van het vrije veld dan kunnen wij de vier-impuls van het veld in zijn Fourier-coëfficiënten uitdrukken.

$$P^\nu = \frac{1}{c}\int d^3\vec{x}\,T^{0\nu} = \frac{1}{2}\int d^3\vec{p}\,p^\nu\,\Big[a(\vec{p})\,a^*(\vec{p}) + a^*(\vec{p})\,a(\vec{p})\Big] \tag{4.123}$$

Met het oog op tweede kwantisatie, waar de Fourier-coëfficiënten operatoren voorstellen, hebben wij aangenomen dat de laatste niet commuteren. Voor het klassieke veld stellen deze coëfficiënten complexe getallen voor die natuurlijk wel commuteren. Voor het scalaire veld geldt verder

$$P^0 = \frac{1}{c}\int d^3\vec{x}\,\mathcal{H} \qquad P^k = \int d^3\vec{x}\,\Pi\,\partial^k\,\phi$$

$$J^{\alpha\beta} = L^{\alpha\beta} = \frac{1}{c}\int d^3\vec{x}\,\Big(x^\alpha\,T^{0\beta} - x^\beta\,T^{0\alpha}\Big)$$

$$S^{\alpha\beta} = 0 \quad \text{geen spin} \tag{4.124}$$

Een ingewikkelde berekening geeft

$$J^{0k} = \frac{i\,\hbar}{2}\int d^3\vec{p}\sqrt{p^0}\,\Big[a^*(\vec{p})\,\frac{\partial}{\partial\,p_k}\Big(\sqrt{p^0}\,a(\vec{p})\Big) - a(\vec{p})\,\frac{\partial}{\partial\,p_k}\Big(\sqrt{p^0}\,a^*(\vec{p})\Big)\Big] \tag{4.125}$$

Voor klassieke velden kunnen wij na partiële integratie schrijven

$$J^{0k} = i\,\hbar\int d^3\vec{p}\,\sqrt{p^0}\,a^*(\vec{p})\,\frac{\partial}{\partial\,p_k}\Big(\sqrt{p^0}\,a(\vec{p})\Big) \tag{4.126}$$

De ruimtelijke componenten van de impuls-moment-tensor zijn

$$J^{kl} = \frac{i\,\hbar}{2}\int d^3\vec{p}$$

$$\Big[p^k\Big\{\frac{a^*(\vec{p})}{\sqrt{p^0}}\,\frac{\partial}{\partial\,p_l}\Big(\sqrt{p^0}\,a(\vec{p})\Big) - \sqrt{p^0}\,a(\vec{p})\,\frac{\partial}{\partial\,p_l}\Big(\frac{a^*(\vec{p})}{\sqrt{p^0}}\Big)\Big\}$$

$$-p^l\,\Big\{\frac{a^*(\vec{p})}{\sqrt{p^0}}\,\frac{\partial}{\partial\,p_k}\Big(\sqrt{p^0}\,a(\vec{p})\Big) - \sqrt{p^0}\,a(\vec{p})\,\frac{\partial}{\partial\,p_k}\Big(\frac{a^*(\vec{p})}{\sqrt{p^0}}\Big)\Big\}\Big] \tag{4.127}$$

Voor klassieke velden kunnen wij na partiële integratie schrijven

$$J^{kl} = i\,\hbar \int d^3\vec{p}\, \frac{a^*(\vec{p})}{\sqrt{p^0}} \left[p^k\, \frac{\partial}{\partial\; p_l} - p^l\, \frac{\partial}{\partial\; p_k}\right] \sqrt{p^0}\, a(\vec{p}) \tag{4.128}$$

Men kan aantonen dat P^ν en $J^{\mu\nu}$ ook verkregen kunnen worden door middel van het in-product voor scalaire velden

$$P^\nu = \frac{1}{2}\Big(\phi(x), \underline{P}^\nu\, \phi(x)\Big) \qquad J^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\Big(\phi(x), \underline{M}^{\mu\nu}\, \phi(x)\Big)$$

$$\text{met} \quad \underline{P}^\nu = i\,\hbar\,\partial^\nu \qquad \underline{M}^{\mu\nu} = i\,\hbar\,\Big(x^\mu\,\partial^\nu - x^\nu\,\partial^\mu\Big) \tag{4.129}$$

Merk op dat voor $\nu = 0$ men voor de berekening van P^0 gebruik maakt van de bewegingsvergelijking voor het scalaire veld.

2 Dirac-veld

$$T^{\mu\nu} = i\,c\,\hbar\,\bar{\psi}\,\gamma^\mu\,\partial^\nu\psi - g^{\mu\nu}\,\Big(i\,c\,\hbar\,\bar{\psi}\,\gamma^\lambda\,\partial^\lambda\psi - mc^2\,\bar{\psi}\,\psi\Big)$$

$$\mathcal{H} = T^{00} = -i\,c\,\hbar\,\bar{\psi}\,\gamma^k\,\partial_k\psi + mc^2\,\bar{\psi}\,\psi$$

$$T^{0i} = i\,c\,\hbar\,\bar{\psi}\,\gamma^0\,\partial^i\psi = i\,c\,\hbar\,\psi^\dagger\,\partial^i\psi \tag{4.130}$$

Omdat $\psi(x)$ aan de bewegingsvergelijking (hier Dirac-vergelijking) voldoet verdwijnt de term die vermenigvuldigd wordt met de tensor $g^{\mu\nu}$ in $T^{\mu\nu}$.

$$T^{\mu\nu} = i\,c\,\hbar\,\bar{\psi}\,\gamma^\mu\,\partial^\nu\psi \quad \rightarrow \quad T^{0\nu} = i\,c\,\hbar\,\psi^\dagger\,\partial^\nu\psi$$

$$P^\nu = \frac{1}{c}\int d^3\vec{x}\, T^{0\nu}(x) = i\,\hbar\int d^3\vec{x}\,\psi^\dagger(x)\,\partial^\nu\psi(x)$$

$$= \int d^3\vec{x}\,\Pi(x)\,\partial^\nu\psi(x)$$

$$M^{\mu\nu\lambda} = c\,\hbar\,\bar{\psi}\,\gamma^\mu\left[i\,x^\nu\,\partial^\lambda - i\,x^\lambda\,\partial^\nu + \frac{1}{2}\,\sigma^{\nu\lambda}\right]\psi \tag{4.131}$$

Alleen P^ν kan op een eenvoudige manier worden uitgedrukt in de Fourier-coëfficiënten van het Dirac-veld. Het resultaat is

$$P^\nu = \sum_s \int d^3\vec{p}\,p^\nu\,\Big[b^*(\vec{p},s)\,b(\vec{p},s) - d(\vec{p},s)\,d^*(\vec{p},s)\Big] \tag{4.132}$$

De Noether-ladingen voor de Lorentz-groep worden

$$J^{\alpha\beta} = S^{\alpha\beta} + L^{\alpha\beta} = \frac{1}{c}\int d^3\vec{x}\,M^{0\alpha\beta}$$

$$S^{\alpha\beta} = \frac{\hbar}{2} \int d^3\vec{x}\, \psi^\dagger(x)\, \sigma^{\alpha\beta}\, \psi(x) = \int d^3\vec{x}\, \Pi_r(x) \Big(-\frac{i}{2}\, \sigma^{\alpha\beta} \Big)_{rt} \psi_t(x)$$

$$L^{\alpha\beta} = i\,\hbar \int d^3\vec{x}\, \psi^\dagger(x) \left(x^\alpha\, \partial^\beta - x^\beta\, \partial^\alpha \right) \psi(x)$$

$$= \int d^3\vec{x}\, \Pi(x) \left(x^\alpha\, \partial^\beta - x^\beta\, \partial^\alpha \right) \psi(x) \tag{4.133}$$

We kunnen de Noether-ladingen weer uitdrukken in een in-product maar nu voor het Dirac-veld

$$P^\nu = \Big(\psi(x), \underline{P}^\nu\, \psi(x) \Big) \qquad J^{\mu\nu} = \Big(\psi(x), \underline{M}^{\mu\nu}\, \psi(x) \Big)$$

$$\text{met} \quad \underline{P}^\nu = i\,\hbar\, \partial^\nu \qquad \underline{M}^{\mu\nu} = i\,\hbar \left(x^\mu\, \partial^\nu - x^\nu\, \partial^\mu - \frac{i}{2}\, \sigma^{\mu\nu} \right) \tag{4.134}$$

Als we ons beperken tot de ruimtelijke componenten krijgen we weer de generatoren van de rotatie-groep $SO(3)$

$$\sigma_{ij} \equiv \Sigma_k = \begin{pmatrix} \sigma_k & \emptyset \\ \emptyset & \sigma_k \end{pmatrix} \quad i,j,k \quad \text{cyclisch} \tag{4.135}$$

Als de kwantisatie-as van de spin in de richting van de impuls gekozen wordt ($\vec{n} = \vec{p}/|\vec{p}|$) dan wordt de uitdrukking voor S^{ij} zeer eenvoudig. In het algemeen kan men de heliciteit van een veld definiëren als

$$W = \frac{i\,\hbar}{2}\, \epsilon_{ijk} \int d^3\vec{x}\, \Pi_r(x) \left(s_{ij} \right)_{rt} \partial_k \varphi_t(x) \tag{4.136}$$

In het geval van het Dirac-veld is s_{ij} gelijk aan

$$s_{ij} = -\frac{i}{2}\, \sigma_{ij} = \frac{1}{4}[\gamma_i, \gamma_j] = -\frac{i}{2}\, \epsilon_{ijm}\, \Sigma_m \tag{4.137}$$

Met $\Pi_r(x) = i\,\hbar\, \psi_r^\dagger(x)$ wordt de heliciteit gelijk aan

$$W = \frac{\hbar}{4}\, \epsilon_{ijk} \int d^3\vec{x}\, \Pi_r(x) \left(\sigma_{ij} \right)_{rt} \partial_k\, \psi_t(x) = \frac{\hbar}{2} \int d^3\vec{x}\, \Pi_r(x) \left(\vec{\Sigma} \cdot \nabla \right)_{rt} \psi_t(x) \tag{4.138}$$

Hierbij is gebruik gemaakt van

$$\epsilon_{ijk}\, \epsilon_{ijm} = 2\, \delta_{km} \tag{4.139}$$

Na substitutie van het Dirac-veld kan men W uitdrukken in de Fourier-coëfficiënten

$$W = \frac{\hbar}{2} \sum_s \int d^3\vec{p}\, (2\, s)\, |\vec{p}| \left[b^*(\vec{p}, s)\, b(\vec{p}, s) + d(\vec{p}, s)\, d^*(\vec{p}, s) \right] \tag{4.140}$$

In de afleiding is gebruik gemaakt van de eigenschappen

$$\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}\, u(\vec{p}, s) = 2\, s\, |\vec{p}|\, u(\vec{p}, s) \qquad \vec{\Sigma} \cdot \vec{p}\, v(\vec{p}, s) = -2\, s\, |\vec{p}|\, v(\vec{p}, s) \tag{4.141}$$

3 elektromagnetisch veld

De Noether-stromen zijn

$$T^{\mu\nu} = -F^{\mu\lambda}\,\partial^\nu A_\lambda - g^{\mu\nu}\,\mathcal{L} = -g_{\lambda\sigma}\,F^{\mu\lambda}\,\partial^\nu A^\sigma + \frac{1}{4}\,F_{\lambda\sigma}\,F^{\lambda\sigma}$$

$$T^{0\nu} = -F^{0\lambda}\,\partial^\nu A_\lambda - g^{0\nu}\,\mathcal{L} = c\,\Pi^\lambda\,\partial^\nu A_\lambda - g^{0\nu}\,\mathcal{L}$$

$$T^{00} = \mathcal{H} = \Pi^\lambda\,\dot{A}_\lambda - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2\right) - \vec{E}\cdot\vec{\nabla}\phi$$

$$T^{0i} = c\,\Pi^\lambda\,\partial^i A_\lambda = c\,\Pi^k\,\partial^i A_k = E^k\,\partial^i A_k = -E_k\,\frac{\partial\;A_k}{\partial\;x_i}$$

$$= -E_k\,\frac{\partial\;A_i}{\partial\;x_k} - (\vec{E}\times\vec{B})_i = E_k\,\frac{\partial\;A^i}{\partial\;x_k} + (\vec{E}\times\vec{B})^i \tag{4.142}$$

De impuls-moment-tensor is gelijk aan

$$M^{\mu\nu\lambda} = T^{\mu\lambda}\,x^\nu - T^{\mu\nu}\,x^\lambda - F^{\mu\alpha}\left(I^{\nu\lambda}\right)_\alpha^{\;\beta} A_\beta = \left(F^{\mu\sigma}\,\partial^\nu A_\sigma + g^{\mu\nu}\,\mathcal{L}\right)x^\lambda$$

$$-\left(F^{\mu\sigma}\,\partial^\lambda A_\sigma + g^{\mu\lambda}\,\mathcal{L}\right)x^\nu - F^{\mu\lambda}\,A^\nu + F^{\mu\nu}\,A^\lambda \tag{4.143}$$

De Noether-ladingen zijn

$$P^0 = H = \frac{1}{c}\int d^3\vec{x}\,T^{00} = \frac{1}{2c}\int d^3\vec{x}\left(|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2\right)$$

E.M. energie-dichtheid

$$P^i = \frac{1}{c}\int d^3\vec{x}\,T^{0i} = \frac{1}{c}\int d^3\vec{x}\,(\vec{E}\times\vec{B})^i \quad \text{Poynting-vector}$$

$$\text{of}\quad P^i = \frac{1}{c}\int d^3\vec{x}\,\Pi^\lambda\,\partial^i A_\lambda \tag{4.144}$$

Merk op dat

$$\int d^3\vec{x}\,E_k\,\frac{\partial\;A^i}{\partial\;x_k} = -\int d^3\vec{x}\,A^i\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \quad \text{omdat} \quad \nabla\cdot\vec{E} = 0 \tag{4.145}$$

In het geval van de stralings-ijk kan de impuls als volgt in de Fourier-coëfficiënten worden uitgedrukt

$$P^\nu = \frac{1}{2}\sum_\alpha\int d^3\vec{k}\,\hbar\,k^\nu\left[a(\vec{k},\alpha)\,a^*(\vec{k},\alpha) + a^*(\vec{k},\alpha)\,a(\vec{k},\alpha)\right]$$

$$\alpha = 1,2 \quad \text{of} \quad \alpha = R,L \tag{4.146}$$

In het geval van de Lorentz-ijk hebben we ook nog twee on-fysische polarisaties

$$P^\nu = -\frac{1}{2}\sum_\alpha \int d^3\vec{k}\,\hbar\,k^\nu\,g^{\lambda\sigma}\left[a(\vec{k},\lambda)\,a^*(\vec{k},\sigma) + a^*(\vec{k},\lambda)\,a(\vec{k},\sigma)\right] \qquad (4.147)$$

Het impuls-moment wordt

$$\begin{aligned} J^{\alpha\beta} &= \frac{1}{c}\int d^3\vec{x}\,M^{0\alpha\beta} = S^{\alpha\beta} + L^{\alpha\beta} \\ S^{\alpha\beta} &= \int d^3\vec{x}\left(\Pi^\alpha\,A^\beta - \Pi^\beta\,A^\alpha\right) \\ L^{\alpha\beta} &= \int d^3\vec{x}\left[\left(-\Pi^\sigma\,\partial^\alpha A_\sigma + \frac{1}{c}\,g^{0\alpha}\,\mathcal{L}\right)x^\beta - \left(-\Pi^\sigma\,\partial^\beta A_\sigma\right.\right. \\ &\left.\left.+\frac{1}{c}\,g^{0\beta}\,\mathcal{L}\right)x^\alpha\right] \end{aligned} \qquad (4.148)$$

De componenten zijn

$$S^{\alpha\beta} = \int d^3\vec{x}\,\Pi^\sigma\left(I^{\alpha\beta}\right)^{\lambda}_{\ \sigma}A_\lambda \qquad (4.149)$$

$$\begin{aligned} L^{0k} &= \frac{1}{c}\int d^3\vec{x}\left[c\,x^0\,\Pi^\sigma\,\partial^k A_\sigma - x^k\,\mathcal{H}\right] \\ L^{kl} &= \int d^3\vec{x}\left[x^k\,\Pi^\sigma\,\partial^l A_\sigma - x^l\,\Pi^\sigma\,\partial^k A_\sigma\right] \end{aligned} \qquad (4.150)$$

Ook in het geval van het elektromagnetisch veld kan men de Noether-ladingen weer uitdrukken in in-producten

$$\begin{aligned} &P^\nu = \frac{1}{2}\left(A^\sigma, \underline{P}^\nu\,A_\sigma\right) \qquad J^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(A^\sigma, \underline{M}^{\mu\nu}\,A_\sigma\right) \\ &\text{met}\quad \underline{P}^\nu = i\,\hbar\,\partial^\nu \qquad \underline{M}^{\mu\nu} = i\,\hbar\left(x^\mu\,\partial^\nu - x^\nu\,\partial^\mu + I^{\mu\nu}\right) \end{aligned} \qquad (4.151)$$

In analogie met het Dirac-veld (4.136) kunnen wij ook hier de heliciteit van het elektro-magnetische veld definiëren. In dit geval is $s_{ij} = I_{ij}$ en de heliciteit wordt

$$W_m = \frac{1}{2}\,\epsilon_{mij}\int d^3\vec{x}\,\Pi^\sigma(x)\left(I_{ij}\right)^{\lambda}_{\ \sigma}A_\lambda(x) \qquad (4.152)$$

Waarbij $\Pi^0(x) = 0$ en $\Pi^k(x) = E^k(x)/c$. Definieer

$$I_{ij} = \epsilon_{ijk}\,\Sigma_k \quad\rightarrow\quad \Sigma_k = \frac{1}{2}\,\epsilon_{ijk}\,I_{ij} \qquad \left(\Sigma_k\right)_{ij} = -\epsilon_{kij} \qquad (4.153)$$

W kan dan herschreven worden als

$$\vec{W} = \int d^3\vec{x}\, \Pi^\sigma(x) \left(\vec{\Sigma}\right)_\sigma^{\ \lambda} A_\lambda(x) = \frac{1}{c} \int d^3\vec{x}\, \vec{E} \times \vec{A} \tag{4.154}$$

Uit

$$\left(I_{ij}\right)_\sigma^{\ \lambda} = g_{i\sigma}\, \delta_j^\lambda - g_{j\sigma}\, \delta_i^\lambda \tag{4.155}$$

volgt

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{h} = i\,\vec{\Sigma} \cdot \hat{\vec{k}} = \frac{i}{|\vec{k}|} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_2 \\ 0 & k_3 & 0 & -k_1 \\ 0 & -k_2 & k_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{met} \quad \hat{h}^\dagger = \hat{h} \tag{4.156}$$

Men kan nu laten zien dat voor alle polarisaties geldt

$$\hat{h}\,\epsilon^{(0)} = 0 \quad \hat{h}\,\epsilon^{(1)} = i\,\epsilon^{(2)} \quad \hat{h}\,\epsilon^{(2)} = -i\,\epsilon^{(1)} \quad \hat{h}\,\epsilon^{(3)} = 0 \tag{4.157}$$

Hieruit volgt dat de rechts- en linkshandige polarisaties eigen-toestanden van de heliciteitsoperator zijn

$$\hat{h}\,\epsilon^{(R)} = \epsilon^{(R)} \quad \hat{h}\,\epsilon^{(L)} = -\epsilon^{(L)}$$

$$\hat{h}\,\epsilon^{(\alpha)} = s_\alpha\,\epsilon^{(\alpha)} \quad \hat{h}\,\epsilon^{*(\alpha)} = -s_\alpha\,\epsilon^{*(\alpha)}$$

$$s_R = 1 \quad s_L = -1 \tag{4.158}$$

Vergelijking (4.154) kan men uitdrukken in de Fourier-coëfficiënten van het electromagnetische veld en men vindt

$$\vec{W} = \frac{\hbar}{2} \sum_\alpha \int d^3\vec{k}\, s_\alpha\, \hat{\vec{k}} \left[a(\vec{k},\alpha)\, a^*(\vec{k},\alpha) + a^*(\vec{k},\alpha)\, a(\vec{k},\alpha)\right]$$

$$\alpha = R, L \tag{4.159}$$

Tenslotte willen wij nog een opmerking maken over de energie-impuls-tensor $T^{\mu\nu}$. Deze moet symmetrisch zijn in μ en ν. Dit is automatisch het geval voor het scalaire veld maar niet voor velden met spin zoals het Dirac-veld en het elektromagnetische veld. Om dit te verhelpen heeft Belinfante een verbeterde energie-impuls-tensor ingevoerd. Deze wordt gegeven door

$$\Theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\rho \, G^{\rho\mu\nu} \quad \text{met} \quad \Theta^{\mu\nu} = \Theta^{\nu\mu} \quad \partial_\mu \, \Theta^{\mu\nu} = 0$$

$$\text{met} \quad G^{\rho\mu\nu} = \frac{1}{2}\Big(H^{\rho\mu\nu} + H^{\mu\nu\rho} + H^{\nu\mu\rho}\Big) = -G^{\mu\rho\nu}$$

$$H^{\rho\mu\nu} = \frac{\partial\, \mathcal{L}}{\partial\, \partial_\rho \varphi_r} \Big(s^{\mu\nu}\Big)_{rt} \varphi_t \tag{4.160}$$

De resultaten zijn

Dirac-veld

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{i}{4}\, c\, \hbar\, \bar{\psi}(x) \Big(\gamma^\mu \overset{\leftrightarrow}{\partial^\nu} + \gamma^\nu \overset{\leftrightarrow}{\partial^\mu}\Big]\, \psi(x)$$

E.M. veld

$$\Theta^{\mu\nu} = -F^{\mu\rho} F_\rho^\nu - g^{\mu\nu}\, \mathcal{L} \quad \text{met} \quad F_\rho^\nu = \partial^\nu A_\rho - \partial_\rho A^\nu \tag{4.161}$$

4.4 Globale en Lokale ijk-symmetrieën

Er zijn twee soorten symmetrieën in de natuurkunde

a Externe symmetrieën
Deze hebben betrekking op ruimte en tijd. Bijvoorbeeld in de speciale relativiteitstheorie worden deze symmetrieën door de Poincaré-groep gegeven. Voor de klassieke mechanica en de niet-relativistische kwantummechanica is dit de Galilei-groep.

b Interne symmetrieën
Deze hebben betrekking op de interne vrijheidsgraden. Hierbij worden de ruimtetijd coördinaten niet veranderd. Het gevolg is dat niet alleen de actie maar ook de Lagrange-dichtheid invariant wordt gelaten. Voorbeelden van dit soort symmetrieën zijn:

1 vrijheidsgraad: lading. Symmetrie: groep $U(1)$. Theorie: elektrodynamica.

2 vrijheidsgraad: isospin. Symmetrie: groep $SU(2)$. Theorie: sterke wisselwerkingen.

3 vrijheidsgraad: kleur. Symmetrie: groep $SU(3)$. Theorie: quantumchromodynamica.

De interne symmetrie-transformaties, mits zij continu zijn, worden ijk-transformaties genoemd. De laatste worden voorgesteld door een Lie-groep. Laten wij ons beperken tot ijk-transformaties op velden. Deze zien eruit als

$$\varphi_{r,k}(x) \quad \rightarrow \quad \varphi'_{r,k}(x) = \Big[\exp\Big(-i\,\vec{\alpha}(x)\cdot\vec{T}\Big)\Big]_{kl}\,\varphi_{r,l}(x)$$

$$\vec{\alpha}(x)\cdot\vec{T} = \alpha_i(x)\,T_i = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)\,T_i \tag{4.162}$$

Hierbij zijn $\alpha_i(x)$ reële functies van ruimte en tijd die de variëteit van de Lie-groep G opspannen. De indices k,l behoren tot de interne symmetri-egroep G terwijl r verwijst naar de externe groep, in dit geval de Lorentz-groep $SO(3,1)$. Verder zijn T_i de generatoren van de Lie-groep G en zijn daarom elementen van de Lie-algebra $\mathcal{L}(G)$ die voldoen aan de commutatie-relaties

$$[T_a,T_b] = i\,f_{abc}\,T_c \tag{4.163}$$

De structuurconstantes f_{abc} zijn anti-symmetrisch in a,b,c. Als de representaties van de groep unitair is dan geldt

$$\Big[\exp\Big(-i\,\vec{\alpha}(x)\cdot\vec{T}\Big)\Big]^{\dagger} = \Big[\exp\Big(i\,\vec{\alpha}(x)\cdot\vec{T}^{\dagger}\Big)\Big] = \Big[\exp\Big(i\,\vec{\alpha}(x)\cdot\vec{T}\Big)\Big]$$

$$\Rightarrow \quad T_a^{\dagger} = T_a \quad T_a \text{ is hermitisch} \quad \vec{T} = (T_1,T_2,\cdots T_n) \tag{4.164}$$

Men onderscheidt twee soorten ijk-transformaties

1 Globale ijk-transformaties. Hierbij zijn $\alpha_i(x)$ onafhankelijk van x. Deze worden ook wel ijk-transformaties van de eerste soort genoemd.

2 Lokale ijk-transformaties. Hierbij zijn $\alpha_i(x)$ afhankelijk van x. Deze worden ook wel ijk-transformaties van de tweede soort genoemd.

Globale ijk-transformaties

Voor globale ijk-invariantie bestaat er een Noether-stroom met een behouden lading. Neem de ijk-transformatie infinitesimaal

$$\varphi'_{r,k}(x) = \Big(\mathbf{1} - i\,\vec{\alpha}\cdot\vec{T}\Big)_{kl}\,\varphi_{r,l}(x) = \Big[\delta_{kl} - i\,\alpha_a\Big(T_a\Big)_{kl}\Big]\varphi_{r,l}(x) \tag{4.165}$$

Hieruit volgt zie (4.88) en (4.89)

$$\Delta x^{\mu} = 0 \quad \rightarrow \quad X_k^{\mu}(x) = 0$$

$$\Delta\varphi_{r,k}(x) = \Phi_{ka}(x)\,\Delta\omega_a \quad \text{met} \quad \Delta\omega_a = -\alpha_a \quad \text{en}$$

$$\Phi_{r,ka}(x) = i\Big(T_a\Big)_{kl}\,\varphi_{r,l}(x) \quad \Phi^*_{r,ka}(x) = -i\Big(T_a^*\Big)_{kl}\,\varphi^*_{r,l}(x) \tag{4.166}$$

Let op dat de ruimte-tijd coördinaten niet onder ijk-transformaties veranderen. De Noether-stroom in (4.103) wordt

$$j_a^\mu(x) = -i \, \frac{\partial \, \mathcal{L}}{\partial \, \partial_\mu \varphi_{r,k}(x)} \Big(T_a\Big)_{kl} \, \varphi_{r,l}(x) \tag{4.167}$$

met als Noether-lading

$$Q_a = \frac{1}{\hbar c} \int d^3\vec{x} \, j_a^0(x) \quad \text{met} \quad \frac{d \, Q_a}{d \, t} = 0 \tag{4.168}$$

Voorbeelden

A Complexe scalaire veld

$$\begin{aligned} \phi_k'(x) &= \Big[\exp\Big(-i\,\vec{\alpha}\cdot\vec{T}\Big)\Big]_{kl}\,\phi_l(x) \\ \phi_k'^*(x) &= \Big[\exp\Big(i\,\vec{\alpha}\cdot\vec{T}^*\Big)\Big]_{kl}\,\phi_l^*(x) = \phi_l^*(x)\,\Big[\exp\Big(i\,\vec{\alpha}\cdot\vec{T}\Big)\Big]_{lk} \end{aligned} \tag{4.169}$$

De Ladingsdichtheid

$$\mathcal{L}^B_{mat} = \partial^\mu \phi_k^* \, \partial_\mu \phi_k - \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \phi_k^* \, \phi_k \tag{4.170}$$

is onder deze ijk-transformatie invariant. De afhankelijkheid van x is voor de eenvoud weggelaten. De Noether-stroom wordt

$$\begin{aligned} j_a^\mu(x) &= -i\,\frac{\partial\,\mathcal{L}^B_{mat}}{\partial\,\partial_\mu\phi_k}\Big(T_a\Big)_{kl}\,\phi_l + i\,\frac{\partial\,\mathcal{L}^B_{mat}}{\partial\,\partial_\mu\phi_k^*}\Big(T_a^*\Big)_{kl}\,\phi_l^* \\ &= i\,\Big(\partial_\mu\phi_k\Big(T_a\Big)_{kl}\,\phi_l^* - \partial^\mu\phi_k^*\Big(T_a^*\Big)_{kl}\,\phi_l\Big) \\ &= i\,\Big(\partial_\mu\phi_k\Big(T_a\Big)_{kl}\,\phi_l^* - \phi_k\Big(T_a\Big)_{kl}\,\partial^\mu\phi_l^*\Big) = \\ & -i\,\phi_k\Big(T_a\Big)_{kl}\,\overset{\leftrightarrow}{\partial^\mu}\,\phi_l^* \end{aligned} \tag{4.171}$$

Hieruit volgt dat de Noether-stroom reëel is

$$\begin{aligned} j_a^{*\mu} = \quad & \Big(-i\,\phi_k\Big(T_a\Big)_{kl}\,\overset{\leftrightarrow}{\partial^\mu}\,\phi_l^*\Big)^* = i\,\phi_k^*\Big(T_a^*\Big)_{kl}\,\overset{\leftrightarrow}{\partial^\mu}\,\phi_l = \\ & i\,\phi_k^*\Big(T_a\Big)_{lk}\,\overset{\leftrightarrow}{\partial^\mu}\,\phi_l = -i\,\phi_l\Big(T_a\Big)_{lk}\,\overset{\leftrightarrow}{\partial^\mu}\,\phi_k^* = j_a^\mu \\ & \rightarrow \quad Q_a^* = Q_a \end{aligned} \tag{4.172}$$

Dus de lading is ook reëel. Als we het veld in zijn Fourier-coëfficiënten uitdrukken dan kan de lading als volgt geschreven worden

$$Q_a = \frac{i}{\hbar}\Big(T_a\Big)_{kl}\int d^3\vec{x}\Big[\phi_k^*\,\Pi_l - \Pi_k^*\,\phi_l\Big]$$

$$Q_a = \int d^3\vec{p}\,\Big[a_{+,k}(\vec{p})\,\Big(T_a\Big)_{kl}\,a_{+,l}^*(\vec{p}) - a_{-,k}^*(\vec{p})\,\Big(T_a\Big)_{kl}\,a_{-,l}(\vec{p})\Big] \qquad (4.173)$$

B <u>Complexe Dirac-veld</u>

$$\psi'_{r,k}(x) = \Big[\exp\Big(-i\,\vec{\alpha}\cdot\vec{T}\Big)\Big]_{kl}\,\psi_{r,l}(x)$$

$$\bar{\psi}'_{r,k}(x) = \Big[\exp\Big(i\,\vec{\alpha}\cdot\vec{T}^*\Big)\Big]_{kl}\,\bar{\psi}_{r,l}(x) = \bar{\psi}_{r,l}(x)\,\Big[\exp\Big(i\,\vec{\alpha}\cdot\vec{T}\Big)\Big]_{lk} \qquad (4.174)$$

De Lagrange-dichtheid

$$\mathcal{L}^F_{mat} = i\,c\,\hbar\,\bar{\psi}_{r,k}\,\Big(\gamma^\mu\Big)_{rs}\,\partial_\mu\psi_{s,k} - mc^2\,\bar{\psi}_{r,k}\,\psi_{r,k} \qquad (4.175)$$

is onder deze ijk-transformatie invariant. De Noether-stroom wordt

$$j_a^\mu(x) = -i\,\frac{\partial\,\mathcal{L}^F_{mat}}{\partial\,\partial_\mu\psi_{r,k}}\,\Big(T_a\Big)_{kl}\,\psi_{r,l} + i\,\frac{\partial\,\mathcal{L}^F_{mat}}{\partial\,\partial_\mu\bar{\psi}_{r,k}}\,\Big(T_a^*\Big)_{kl}\,\bar{\psi}_{r,l}$$

$$= c\,\hbar\,\bar{\psi}_{r,k}\,\Big(\gamma^\mu\Big)_{rs}\,\Big(T_a\Big)_{kl}\,\psi_{s,l} \qquad (4.176)$$

Hieruit volgt dat de Noether-stroom reëel is m.a.w.

$$j_a^{*\mu} = j_a^\mu \quad \rightarrow \quad Q_a^* = Q_a \qquad (4.177)$$

de lading is ook reëel. Als we het veld in zijn Fourier-coëfficiënten uitdrukken dan kan de lading als volgt geschreven worden

$$Q_a = -i\,c\,\Big(T_a\Big)_{kl}\int d^3\vec{x}\,\Pi_{r,k}\,\psi_{r,l}$$

$$Q_a = \sum_s\int d^3\vec{p}\,\Big[b_k^*(\vec{p},s)\,\Big(T_a\Big)_{kl}\,b_l(\vec{p},s) + d_k(\vec{p},s)\,\Big(T_a\Big)_{kl}\,d_l^*(\vec{p},s)\Big] \qquad (4.178)$$

In het geval van het elektromagnetisme wordt de ijk-groep door $U(1)$ gegeven. Deze bestaat uit de verzameling van fase-transformaties gegeven door

$$U(1) = \{e^{i\,\alpha}\} \quad \rightarrow \quad T_{kl} = \delta_{kl} \qquad (4.179)$$

In dit geval stelt Q de lading voor die wij voor het elektromagnetisme hebben leren kennen. In dit geval staat in de uitdrukking voor Q ook nog de elementaire eenheidslading $e = 1,6.10^{-19}\,\mathrm{C}$ vermeld

Lokale ijk-transformaties

Voor lokale ijk-transformaties kan men aantonen dat de Noether-stroom na toepassing van de bewegingsvergelijking voor de velden geschreven kan worden als $\partial_\mu T^{\mu\nu}$ waarbij $T^{\mu\nu} = -T^{\nu\mu}$. In dit geval is de Noether-lading gelijk aan nul (zie de opmerking in (4.112)) en men heeft geen echte Noether-stroom. Lagrange-dichtheden die globaal ijk-invariant zijn, zijn heel vaak niet lokaal ijk-invariant. Voorbeelden zijn de Lagrange-dichtheden in (4.70) en (4.72). Dit kan men laten zien. Voor de eenvoud zullen wij de ijk-transformaties infinitesimaal nemen. In het geval van scalaire velden krijgt men

$$\phi'_k(x) = \left[\delta_{kl} - i\,\vec{\alpha}(x)\cdot\left(\vec{T}\right)_{kl}\right]\phi_l(x)$$

$$\phi'^*_k(x) = \phi^*_l(x)\left[\delta_{lk} + i\,\vec{\alpha}(x)\cdot\left(\vec{T}\right)_{lk}\right] \tag{4.180}$$

$$\partial_\mu\,\phi'_k(x) = -i\,\partial_\mu\vec{\alpha}(x)\cdot\left(\vec{T}\right)_{kl}\phi_l(x) + \left[\delta_{kl} - i\,\vec{\alpha}(x)\cdot\left(\vec{T}\right)_{kl}\right]\partial_\mu\phi_l(x)$$

$$\partial_\mu\,\phi'^*_k(x) = i\,\phi^*_l(x)\,\partial_\mu\vec{\alpha}(x)\cdot\left(\vec{T}\right)_{lk} + \partial_\mu\phi^*_l(x)\left[\delta_{lk} + i\,\vec{\alpha}(x)\cdot\left(\vec{T}\right)_{lk}\right] \tag{4.181}$$

De Lagrange-dichtheid voor het scalaire veld in (4.70) transformeert dan als

$$\delta\mathcal{L}^B_{mat} = \mathcal{L}^B_{mat}\Big(\phi'_k(x), \partial_\lambda\phi'_k(x)\Big) - \mathcal{L}^B_{mat}\Big(\phi_k(x), \partial_\lambda\phi_k(x)\Big) \tag{4.182}$$

met

$$\delta\mathcal{L}^B_{mat} = i\,\phi^*_l(x)\,\partial^\mu\vec{\alpha}(x)\cdot\left(\vec{T}\right)_{lk}\partial_\mu\phi_k(x) - i\,\partial^\mu\phi^*_k(x)\,\partial_\mu\vec{\alpha}(x)\cdot\left(\vec{T}\right)_{kl}\phi_l(x)$$

$$= \partial^\mu\vec{\alpha}(x)\cdot\vec{j}^\mu(x) = \partial^\mu\alpha_a(x)\,j^\mu_a(x) \tag{4.183}$$

Voor het Dirac-veld krijgt men de lokale ijk-transformaties

$$\psi'_{r,k}(x) = \left[\delta_{kl} - i\,\vec{\alpha}(x)\cdot\left(\vec{T}\right)_{kl}\right]\psi_{r,l}(x)$$

$$\bar{\psi}'_{r,k}(x) = \bar{\psi}_{r,l}(x)\left[\delta_{lk} + i\,\vec{\alpha}(x)\cdot\left(\vec{T}\right)_{lk}\right] \tag{4.184}$$

$$\partial_\mu\,\psi'_{r,k}(x) = -i\,\partial_\mu\vec{\alpha}(x)\cdot\left(\vec{T}\right)_{kl}\psi_{r,l}(x) + \left[\delta_{kl} - i\,\vec{\alpha}(x)\cdot\left(\vec{T}\right)_{kl}\right]\partial_\mu\psi_{r,l}(x)$$

$$\partial_\mu\,\bar{\psi}'_{r,k}(x) = i\,\bar{\psi}_{r,l}(x)\,\partial_\mu\vec{\alpha}(x)\cdot\left(\vec{T}\right)_{lk} + \partial_\mu\bar{\psi}_{r,l}(x)\left[\delta_{lk} + i\,\vec{\alpha}(x)\cdot\left(\vec{T}\right)_{lk}\right] \tag{4.185}$$

De Lagrange-dichtheid voor het Dirac-veld in (4.72) transformeert als

$$\delta\mathcal{L}^F_{mat} = \hbar\,c\,\bar{\psi}_{r,k}(x)\Big(\gamma^\mu\Big)_{rs}\psi_{s,l}(x)\partial_\mu\vec{\alpha}(x)\cdot\left(\vec{T}\right)_{kl} =$$

$$\partial_\mu\vec{\alpha}(x)\cdot\vec{j}^\mu(x) = \partial_\mu\alpha_a(x)\,j^\mu_a(x) \tag{4.186}$$

Men ziet dat in beide gevallen de Lagrange-dichtheden wel globaal ($\partial_\mu \alpha_a(x) = 0$) maar niet lokaal ijk-invariant zijn. Om de Lagrange-dichtheden lokaal ijk-invariant te maken moeten wij een ijk-veld invoeren. Laten we eerst opmerken dat ijk-invariantie-brekende term evenredig is met de Noether-stroom die optrad bij globale ijk-invariantie. Deze stroom transformeert als volgt.
Voor scalaire velden verloopt de transformatie als

$$j_a'^{\mu}(x) = -i\left(\partial_\mu \phi_k'^*(x)\left(T_a\right)_{kl}\phi_l'(x) - \phi_k'^*(x)\left(T_a\right)_{kl}\partial^\mu \phi_l'(x)\right) = j_a^\mu(x)$$
$$+\partial^\mu \alpha_b(x)\left(\phi_m^*(x)\left(T_a\right)_{mk}\left(T_a\right)_{kl}\phi_l(x) + \phi_k^*(x)\left(T_a\right)_{kl}\left(T_a\right)_{lm}\phi_m(x)\right)$$
$$-\alpha_b(x)\left(\partial^\mu \phi_k^*(x)\left([T_a, T_b]\right)_{km}\phi_m(x) - \phi_k^*(x)\left([T_a, T_b]\right)_{km}\partial^\mu \phi_m(x)\right) \quad (4.187)$$

vervang in de laatste term m door l zodat de getransformeerde stroom gelijk is aan

$$j_a'^{\mu}(x) = j_a^\mu(x) - i\,\alpha_b(x)\,f_{abc}\left(\partial^\mu \phi_k^*(x)\left(T_c\right)_{kl}\phi_l(x) - \phi_k^*(x)\left(T_c\right)_{kl}\partial^\mu \phi_l(x)\right)$$
$$+\partial^\mu \alpha_b(x)\,\phi_k^*(x)\left(\{T_a, T_b\}\right)_{kl}\phi_l(x) = \left(\delta_{ac} + \alpha_b(x)\,f_{abc}\right) j_c^\mu(x)$$
$$+\partial^\mu \alpha_b(x)\,\phi_k^*(x)\left(\{T_a, T_b\}\right)_{kl}\phi_l(x) = \left(\delta_{ac} - i\,\alpha_b(x)\left(T_b\right)_{ac}\right) j_c^\mu(x)$$
$$+\partial^\mu \alpha_b(x)\,\phi_k^*(x)\left(\{T_a, T_b\}\right)_{kl}\phi_l(x) \quad (4.188)$$

Voor $\partial_\mu \alpha_b(x) = 0$ (globaal) transformeert de stroom $j_a^\mu(x)$ onder de groep zodanig dat de matrix-representatie van T_b de volgende waarde aanneemt

$$\left(T_b\right)_{ac} = -i\,f_{bac} = i\,f_{abc} \quad (4.189)$$

Men zegt dat $j_a^\mu(x)$ in de adjoint-representatie van de groep zit.
Voor het Dirac-veld verloopt de transformatie op analoge wijze

$$j_a'^{\mu}(x) = j_a^\mu(x) - i\,\hbar\,c\,\alpha_b(x)\,\bar{\psi}_{r,k}(x)\left([T_a, T_b]\right)_{kl}\left(\gamma^\mu\right)_{rs}\psi_{s,l}(x)$$
$$= \left(\delta_{ac} + \alpha_b(x)\,f_{abc}\right) j_c^\mu(x) = \left(\delta_{ac} - i\,\alpha_b(x)\left(T_b\right)_{ac}\right) j_c^\mu(x) \quad (4.190)$$

Ook in het geval van het Dirac-veld zit de Noether-stroom in de adjoint-representatie. In feite geldt dit voor ieder willekeurig veld. Om nu de Lagrange-dichtheden in (4.170) en (4.175) lokaal ijk-invariant te maken voegen wij een nieuwe term aan $\mathcal{L}_{mat}$ toe. Aangezien dit voor het Dirac-veld eenvoudiger is zullen wij hiermee beginnen. Voer de volgende interactie-Lagrange-dichtheid in

$$\mathcal{L}_{int}^F = -\frac{g}{\hbar c}\,j_{a,\mu}(x)\,A_a^\mu(x) \quad (4.191)$$

Hier is g de ijkkoppelingconstante die de sterkte aangeeft waarmee het ijkveld $A_a^\mu(x)$ aan de stroom koppelt. Het ijkveld transformeert lokaal als volgt

$$\begin{aligned} A_a'^\mu(x) &= \Big(\delta_{ac} - i\,\alpha_b(x)\Big(T_b\Big)_{ac}\Big)\,A_c^\mu(x) + \frac{\hbar c}{g}\,\partial^\mu\alpha_a(x) \\ &= A_a^\mu(x) + f_{abc}\,\alpha_b(x)\,A_c^\mu(x) + \frac{\hbar c}{g}\,\partial^\mu\alpha_a(x) \end{aligned} \tag{4.192}$$

Men ziet dat het ijk-veld globaal ook in de adjoint-representatie zit. Dit moet zo zijn want $\mathcal{L}_{int}^F$ moet globaal ijk-invariant zijn. Echter onder lokale ijk-transformatie transformeert de interactie-Lagrange-dichtheid als

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int}'^F &= -\frac{g}{\hbar c}\,j'_{a,\mu}(x)\,A_a'^\mu(x) \\ &= -\frac{g}{\hbar c}\Big(\delta_{ac} + \alpha_b(x)\,f_{abc}\Big)\,j_{c,\mu}(x)\,\Big(\delta_{ae} + \alpha_d(x)\,f_{ade}\Big)\,A_e^\mu(x) \\ & \quad -j_{a,\mu}(x)\,\partial^\mu\alpha_a(x) = -\frac{g}{\hbar c}\,j_{a,\mu}(x)\,A_a^\mu(x) \\ & \quad -\frac{g}{\hbar c}\,\alpha_b(x)\Big(f_{ebc} + f_{cbe}\Big)\,j_{c,\mu}(x)\,A_e^\mu(x) - \partial^\mu\vec{\alpha}(x)\cdot\vec{j}_\mu(x) \\ &= \mathcal{L}_{int}^F - \partial^\mu\vec{\alpha}(x)\cdot\vec{j}_\mu(x) \\ &\to \delta\mathcal{L}_{int}^F = \mathcal{L}_{int}'^F - \mathcal{L}_{int}^F = -\partial^\mu\vec{\alpha}(x)\cdot\vec{j}_\mu(x) \end{aligned} \tag{4.193}$$

en de combinatie

$$\mathcal{L}^F = \mathcal{L}_{mat}^F + \mathcal{L}_{int}^F \tag{4.194}$$

is dus lokaal ijk-invariant omdat

$$\delta\mathcal{L}_{mat}^F = -\delta\mathcal{L}_{int}^F \tag{4.195}$$

In het geval van scalaire velden is de term $\mathcal{L}_{int}$ niet voldoende om de Lagrange-dichtheid lokaal ijk-invariant te maken. In dit geval krijgen wij na transformatie

$$\mathcal{L}'_{int} = \mathcal{L}_{int} - \partial^\mu\vec{\alpha}(x)\cdot\vec{j}_\mu(x) - \frac{g}{\hbar c}\,\partial_\mu\alpha_b(x)\,\phi_k^*(x)\,\Big(\{T_a, T_b\}\Big)_{kl}\,\phi_l(x)\,A_a^\mu(x) \tag{4.196}$$

Wij voegen nu aan $\mathcal{L}_{int}$ de volgende term toe

$$\frac{g^2}{(\hbar c)^2}\,\phi_k^*(x)\,\Big(T_b\,T_a\Big)_{kl}\,\phi_l(x)\,A_b^\mu(x)\,A_{a,\mu}(x) \tag{4.197}$$

Onder lokale ijk-transformaties gaat deze term over in

$$\frac{g^2}{(\hbar c)^2}\,\phi_k'^*(x)\left(T_b\,T_a\right)_{kl}\phi_l'(x)\,A_b'^{\mu}(x)\,A_{a,\mu}'(x)$$

$$=\frac{g^2}{(\hbar c)^2}\,\phi_k^*(x)\left(T_a\,T_b\right)_{kl}\phi_l(x)\,A_b^{\mu}(x)\,A_{a,\mu}(x)$$

$$+\frac{g}{\hbar c}\,\partial_\mu\alpha_b(x)\,\phi_k^*(x)\left(\{T_a\,T_b\}\right)_{kl}\phi_l(x)\,A_a^{\mu}(x) \tag{4.198}$$

Definieer voor de scalaire velden een nieuwe interactie-Lagrange-dichtheid

$$\mathcal{L}_{int}^B=-\frac{g}{\hbar c}\,j_{a,\mu}(x)\,A_a^{\mu}(x)+\frac{g^2}{\hbar c}\,\phi_k^*(x)\left(T_b\,T_a\right)_{kl}\phi_l(x)\,A_b^{\mu}(x)\,A_{a,\mu}(x) \tag{4.199}$$

Onder lokale ijk-transformaties gaat deze weer over in

$$\mathcal{L}_{int}'^B=\mathcal{L}_{int}^B-\partial^\mu\vec{\alpha}(x)\cdot\vec{j}_\mu(x) \tag{4.200}$$

zodat ook hier

$$\mathcal{L}^B=\mathcal{L}_{mat}^B+\mathcal{L}_{int}^B \tag{4.201}$$

lokaal ijk-invariant is. Om de theorie compleet te maken moeten wij analoog aan de afgeleiden van het scalaire veld en het Dirac-veld ook afgeleiden van het ijk-veld in de Lagrange-dichtheid hebben. Deze wordt voor het ijk-veld gegeven door

$$\mathcal{L}_{ijk}=-\frac{1}{4}\,F_{a,\mu\nu}\,F_a^{\mu\nu} \tag{4.202}$$

met de ijk-veld-tensor

$$F_a^{\mu\nu}=\partial^\mu\,A_a^\nu(x)-\partial^\nu\,A_a^\mu(x)-\frac{g}{\hbar c}\,f_{abc}\,A_b^\mu(x)\,A_c^\nu(x) \tag{4.203}$$

Onder lokale ijk-transformaties verandert de tensor als volgt

$$F_a'^{\mu\nu}=\partial^\mu\,A_a'^\nu(x)-\partial^\nu\,A_a'^\mu(x)-\frac{g}{\hbar c}\,f_{abc}\,A_b'^\mu(x)\,A_c'^\nu(x)=F_a^{\mu\nu}$$

$$+f_{ade}\left(\partial^\mu\alpha_d(x)\,A_e^\nu(x)+\alpha_d(x)\,\partial^\mu A_e^\nu(x)\right)+\frac{\hbar c}{g}\,\partial^\mu\,\partial^\nu\alpha_a(x)$$

$$-f_{ade}\left(\partial^\nu\alpha_d(x)\,A_e^\mu(x)+\alpha_d(x)\,\partial^\nu A_e^\mu(x)\right)-\frac{\hbar c}{g}\,\partial^\nu\,\partial^\mu\alpha_a(x)$$

$$-\frac{g}{\hbar c}\,f_{abc}\,A_b^\mu(x)\left(f_{cde}\,\alpha_d(x)\,A_e^\nu(x)+\frac{\hbar c}{g}\,\partial^\nu\alpha_c(x)\right)-\frac{g}{\hbar c}\,f_{abc}\left(f_{bde}\,\alpha_d(x)\,A_e^\mu(x)\right.$$

$$
+\frac{\hbar c}{g}\,\partial^\mu \alpha_b(x)\Big)\,A_c^\nu(x) = F_a^{\mu\nu} + f_{abc}\Big(\partial^\mu \alpha_b(x)\,A_c^\nu(x) + \alpha_b(x)\,\partial^\mu A_c^\nu(x)\Big)
$$

$$
-f_{acb}\Big(\partial^\nu \alpha_c(x)\,A_b^\mu(x) + \alpha_c(x)\,\partial^\nu A_b^\mu(x)\Big) - \frac{g}{\hbar c}\,f_{abc}\,A_b^\mu(x)\,\Big(f_{cde}\,\alpha_d(x)\,A_e^\nu(x)
$$

$$
+\frac{\hbar c}{g}\,\partial^\nu \alpha_c(x)\Big) - \frac{g}{\hbar c}\,f_{abc}\Big(f_{bde}\,\alpha_d(x)\,A_e^\mu(x) + \frac{\hbar c}{g}\,\partial^\mu \alpha_b(x)\Big)\,A_c^\nu(x)
$$

$$
= F_a^{\mu\nu} + f_{abc}\,\alpha_b(x)\,\partial^\mu A_c^\nu(x) - f_{acb}\,\alpha_c(x)\,\partial^\nu A_b^\mu(x) - \frac{g}{\hbar c}\,\alpha_d(x)\,\Big(f_{abe}\,f_{edc}
$$

$$
+f_{aec}\,f_{edb}\Big)\,A_b^\mu(x)\,A_c^\nu(x) \tag{4.204}
$$

Gebruik nu de relatie

$$
-f_{abe}\,f_{edc} - f_{aec}\,f_{edb} = -f_{ade}\,f_{ebc} \tag{4.205}
$$

Deze volgt uit de Jacobi-identiteit

$$
[[T_a, T_b], T_c] + [[T_b, T_c], T_a] + [[T_c, T_a], T_b] = 0
$$

$$
\text{met} \quad [T_a, T_b] = i\,f_{abe}\,T_e \quad \text{etc.} \tag{4.206}
$$

Wij kunnen nu schrijven

$$
F_a^{'\mu\nu} = F_a^{\mu\nu} + f_{ade}\,\alpha_d(x)\,\Big(\partial^\mu A_e^\nu(x) - \partial^\nu A_e^\mu(x) - \frac{g}{\hbar c}\,f_{ebc}\,A_b^\mu(x)\,A_c^\nu(x)\Big)
$$

$$
= F_a^{\mu\nu} + f_{ade}\,\alpha_d(x)\,F_e^{\mu\nu} = \Big(\delta_{ae} - i\,\alpha_d(x)\,\Big(T_d\Big)_{ae}\Big)\,F_e^{\mu\nu}
$$

$$
\text{met} \quad \Big(T_d\Big)_{ae} = -i\,f_{dae} = i\,f_{ade} \tag{4.207}
$$

Dus ook $F_a^{\mu\nu}$ zit in de adjoint representatie van de groep. Uit het bovenstaande volgt dat $\mathcal{L}_{ijk}$ lokaal ijk-invariant is. De volledige Lagrange-dichtheid luidt:

$$
\mathcal{L} = \mathcal{L}_{ijk} + \mathcal{L}_{mat} + \mathcal{L}_{int} \tag{4.208}
$$

De index *mat* slaat op materie-velden. Dit zijn alle velden behalve de ijk-velden.

Het begrip covariante afgeleide

Wij hebben gezien dat onder lokale ijk-transformaties $\partial_\mu \phi_k(x)$ en $\partial_\mu \psi_k(x)$ anders transformeren dan $\phi_k(x)$ en $\psi_k(x)$ zoals in (4.169) en (4.174) respectievelijk zijn aangegeven. Vandaar dat $\partial_\mu \phi_k(x)$ en $\partial_\mu \psi_k(x)$ verkeerde vectoren in de representatie-ruimte van de groep zijn. Wij definiëren daarom een nieuw soort afgeleide nl. de covariante afgeleide

$$
D^\mu = \mathbf{1}\,\partial^\mu + i\,\frac{g}{\hbar c}\,T_a\,A_a^\mu(x) = \mathbf{1}\,\partial^\mu + i\,\frac{g}{\hbar c}\,\vec{T} \cdot \vec{A}^\mu(x) \tag{4.209}
$$

Wij bekijken nu hoe de covariante afgeleide verandert onder lokale ijk-transformaties. Dit laten wij zien voor het scalaire veld.

$$\begin{aligned}\left(D^\mu\right)_{kl}\phi_l(x) &= \left(\delta_{kl}\,\partial^\mu + i\,\frac{g}{\hbar c}\left(T_a\right)_{kl}A^\mu_a(x)\right)\phi_l(x)\\ \left(D^\mu\right)_{kl}\phi^*_l(x) &= \left(\delta_{lk}\,\partial^\mu - i\,\frac{g}{\hbar c}\left(T_a\right)_{lk}A^\mu_a(x)\right)\phi^*_l(x)\end{aligned} \tag{4.210}$$

Pas nu de lokale ijk-transformatie toe

$$\begin{aligned}
&\left(D'^\mu\right)_{kl}\phi'_l(x) = \left(\delta_{kl}\,\partial^\mu + i\,\frac{g}{\hbar c}\left(T_a\right)_{kl}A'^\mu_a(x)\right)\left(\delta_{lm} - i\,\alpha_a(x)\left(T_a\right)_{lm}\right)\phi_m(x)\\
&= \left(\delta_{kl}\,\partial^\mu + i\,\frac{g}{\hbar c}\left(T_b\right)_{kl}\left\{A^\mu_b(x) + f_{bde}\,\alpha_d(x)\,A^\mu_e(x) + \frac{\hbar c}{g}\,\partial^\mu\alpha_b(x)\right\}\right)\\
&\times\left(\delta_{lm} - i\,\alpha_a(x)\left(T_a\right)_{lm}\right)\phi_m(x) = \delta_{km}\,\partial^\mu\phi_m(x) - i\,\partial^\mu\alpha_a(x)\left(T_a\right)_{km}\partial^\mu\phi_m(x)\\
&-i\,\alpha_a(x)\left(T_a\right)_{km}\partial^\mu\phi_m(x) + i\,\frac{g}{\hbar c}\left(T_b\right)_{km}A^\mu_b(x)\,\phi_m(x)\\
&+i\,\frac{g}{\hbar c}\,f_{bde}\,\alpha_d(x)\left(T_b\right)_{km}A^\mu_e(x)\,\phi_m(x) + i\,\partial^\mu\alpha_b(x)\left(T_b\right)_{km}\phi_m(x)\\
&+\frac{g}{\hbar c}\,\alpha_a(x)\left(T_b\right)_{kl}\left(T_a\right)_{lm}A^\mu_b(x)\,\phi_m(x)\\
&= \left(\delta_{km} - i\,\alpha_a(x)\left(T_a\right)_{km}\right)\partial^\mu\phi_m(x) + i\,\frac{g}{\hbar c}\left(T_b\right)_{km}A^\mu_b(x)\,\phi_m(x)\\
&+i\,\frac{g}{\hbar c}\,f_{bde}\,\alpha_d(x)\left(T_b\right)_{km}A^\mu_e(x)\,\phi_m(x) + \frac{g}{\hbar c}\,\alpha_a(x)\left(T_b\,T_a\right)_{km}A^\mu_b(x)\,\phi_m(x)\\
&= \left(\delta_{km} - i\,\alpha_a(x)\left(T_a\right)_{km}\right)\left(\delta_{ml}\,\partial^\mu + i\,\frac{g}{\hbar c}\left(T_b\right)_{ml}A^\mu_b(x)\right)\phi_l(x)\\
&-i\,\frac{g}{\hbar c}\left(T_b\right)_{kl}A^\mu_b(x)\,\phi_l(x) - \frac{g}{\hbar c}\,\alpha_a(x)\left(T_a\,T_b\right)_{kl}A^\mu_b(x)\,\phi_l(x)\\
&+i\,\frac{g}{\hbar c}\left(T_b\right)_{kl}A^\mu_b(x)\,\phi_l(x) + i\,\frac{g}{\hbar c}\,f_{cab}\,\alpha_a(x)\left(T_c\right)_{kl}A^\mu_b(x)\,\phi_l(x)\\
&+\frac{g}{\hbar c}\,\alpha_a(x)\left(T_b\,T_a\right)_{kl}A^\mu_b(x)\,\phi_l(x)\\
&= \left(\delta_{km} - i\,\alpha_a(x)\left(T_a\right)_{km}\right)\left(D^\mu\right)_{ml}\phi_l(x)
\end{aligned} \tag{4.211}$$

De afleiding voor het Dirac-veld geeft hetzelfde resultaat. De conclusie is dat $D^\mu\phi(x)$ en $D^\mu\psi(x)$ op dezelfde wijze transformeren als $\phi(x)$ en $\psi(x)$ en dus goede vectoren in de representatie-ruimte van de groep zijn. Wij kunnen de Lagrange-dichtheid in (4.208) op een manifest ijk-invariante manier schrijven. Voor scalaire velden krijgt men

$$\mathcal{L}^B = -\frac{1}{4}\, F_{a,\mu\nu}\, F_a^{\mu\nu} + \Big(D^\mu\, \phi\Big)_k^* \Big(D_\mu\, \phi\Big)_k - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\, \phi_k^*\, \phi_k \tag{4.212}$$

en voor de Dirac-velden

$$\mathcal{L}^F = -\frac{1}{4}\, F_{a,\mu\nu}\, F_a^{\mu\nu} + i\, c\, \hbar\, \bar{\psi}_{r,k} \Big(\gamma^\mu\Big)_{rs} \Big(D_\mu\Big)_{kl}\, \psi_{s,l} - mc^2\, \bar{\psi}_{r,k}\, \psi_{r,k} \tag{4.213}$$

Na toepassing van de Euler-Lagrange-vergelijking krijgt men de bewegings vergelijkingen. Deze zijn voor de scalaire velden

$$D^\mu\, F_{a,\mu\nu} = \frac{g}{\hbar c}\, j_{a,\nu} \qquad j_{a,\nu} = i\, \phi_k^* \Big(T_a\Big)_{kl} \overset{\leftrightarrow}{D_\nu}\, \phi_l$$

$$\Big(D^\mu\, D_\mu + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\Big)\, \phi_k = 0 \qquad \phi_k^* \Big(\overset{\leftarrow}{D^{*\mu}}\; \overset{\leftarrow}{D_\mu^*} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\Big) = 0 \tag{4.214}$$

en voor de Dirac-velden

$$D^\mu\, F_{a,\mu\nu} = \frac{g}{\hbar c}\, j_{a,\nu} \qquad j_{a,\nu} = c\, \hbar\, \bar{\psi}_{r,k} \Big(\gamma_\nu\Big)_{rs} \Big(T_a\Big)_{kl}\, \psi_{s,l}$$

$$\Big(i\, \hbar\, \gamma^\mu\, D_\mu - mc\Big)\, \psi_k = 0 \qquad \bar{\psi}_k \Big(i\, \hbar\, \gamma^\mu\, D_\mu + mc\Big) = 0 \tag{4.215}$$

<u>Voorbeelden</u>

Elektrodynamica
Hier is de ijk-groep $U(1)$ die Abels is. Er is slechts één generator namelijk de lading. De structuur-constante $f_{abc} = 0$

Isospin
Hier is de ijk-groep $SU(2)$ die niet-Abels is. De structuurconstantes zijn $f_{abc} = \epsilon_{abc}$ (Levi-Civita-tensor componenten $a, b, c = 1, 2, 3$).

De fundamentele representatie zit in de twee-dimensionale ruimte van iso-spinoren. Deze wordt gegeven door:

$$T_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad T_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad T_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.216}$$

In de adjoint-representatie $\Big(T_a\Big)_{mn} = -i\, \epsilon_{amn}$, die in de drie-dimensionale ruimte zit, krijgt men de volgende matrices:

$$T_1 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad T_2 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T_3 = i\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.217}$$

5 Relativistische quantumveldentheorie

Het formalisme om relativistische velden te kwantiseren is analoog aan de procedure in de niet-relativistische kwantummechanica. In het laatste hadden wij te maken met een systeem van een eindig aantal vrijheidsgraden $\{q_i(t), p_i(t)\}$. In het eerste geval hebben wij van doen met een systeem wat een oneindig aantal vrijheidsgraden bevat gegeven door $\{\varphi(\vec{x}, t), \Pi(\vec{x}, t)\}$.

ANALOGIE

eerste Kwantisatie niet-relativistische kwantummechanica	tweede Kwantisatie relativistische quantumveldentheorie
gegeneraliseerde coördinaten: $q_i(t)$	gegeneraliseerde coördinaten: $\varphi(\vec{x}, t)$
canonieke impuls: $p_i(t) = \dfrac{\partial\, \mathcal{L}}{\partial\, \dot{q}_i(t)}$	canonieke impuls: $\Pi(\vec{x}, t) = \dfrac{\partial\, \mathcal{L}}{\partial\, \dot{\varphi}(\vec{x}, t)}$
$H = \sum_{i=1}^{N} \dfrac{p_i^2}{2m} + V(q_1, \cdots q_n)$	$\mathcal{H} = \dfrac{1}{2}\Big[c^2\, \Pi^2(\vec{x}, t) + \vec{\nabla}\varphi(\vec{x}, t) \cdot \vec{\nabla}\varphi(\vec{x}, t) + \dfrac{m^2 c^2}{\hbar^2}\, \varphi^2(\vec{x}, t)\Big]$
$[\hat{q}_k(t), \hat{p}_l(t)] = i\,\hbar\, \delta_{kl}$	$[\hat{\varphi}(\vec{x}, t), \hat{\Pi}(\vec{x}', t)] = i\,\hbar\, \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$
$[\hat{q}_k(t), \hat{q}_l(t)] = 0$	$[\hat{\varphi}(\vec{x}, t), \hat{\varphi}(\vec{x}', t)] = 0$
$[\hat{p}_k(t), \hat{p}_l(t)] = 0$	$[\hat{\Pi}(\vec{x}, t), \hat{\Pi}(\vec{x}', t)] = 0$

De commutatie-relaties voor de velden worden in de Engelse literatuur "equal time commutation (ETC)" relations genoemd. Door deze relaties worden de klassieke velden kwantum-operatoren die in een Hilbert-ruimte werken analoog aan $\hat{q}_i, \hat{p}_i$ in de niet-relativistische kwantummechanica. Deze Hilbert-ruimte bestaat uit deeltjes die gekarakteriseerd worden door hun impuls en spin. Bovenstaande ETC-relaties gelden alleen voor geheeltallige spin velden zoals het scalaire veld (spin nul) en het elektromagnetische veld (spin een). In het geval van halftallige spin velden zoals het Dirac-veld (spin half) moeten de commutatoren vervangen worden door anti-commutatoren. Deze procedure volgt uit het "spin-statistiek theorema". Hieruit leidt men af dat geheeltallige spin velden door commutatie-relaties en dat halftallige spin velden door anti-commutatie-relaties moeten worden gekwantiseerd. Indien dit niet gebeurd wordt de Einstein-causaliteit geschonden. Dit principe houdt in dat de commutator van twee fysische operatoren $A(x)$ en $B(y)$ gelijk is aan nul als x en y ruimteachtig gescheiden zijn m.a.w.

$$[\hat{A}(x), \hat{B}(y)] = 0 \quad \text{als} \quad (x-y)^2 < 0 \tag{5.1}$$

Een voorbeeld is de elektromagnetische stroom $\hat{j}_\mu(x)$

$$[\hat{j}_\mu(x), \hat{j}_\mu(y)] = 0 \quad \text{als} \quad (x-y)^2 < 0$$

$$\begin{aligned} \text{met} \qquad & \hat{j}_\mu(x) = i : \hat{\phi}^\dagger(x) \overset{\leftrightarrow}{\partial_\mu} \hat{\phi}(x) : \quad \text{scalair veld} \\ & \hat{j}_\mu(x) = c\hbar \; : \bar{\hat{\psi}}(x) \gamma_\mu \hat{\psi}(x) : \quad \text{Dirac-veld} \end{aligned} \tag{5.2}$$

De verklaring van : volgt later.

5.1 Kwantisatie van het reëele scalaire veld

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \frac{\hbar c}{\sqrt{2E}} \left[\hat{a}(\vec{p})\, e^{-i\,px/\hbar} + \hat{a}^\dagger(\vec{p})\, e^{i\,px/\hbar}\right] \tag{5.3}$$

In vergelijking met het klassieke veld vervangen wij complexe conjugatie $*$ door hermitische conjugatie $\dagger$ omdat $\hat{a}(\vec{p})$ en $\hat{a}^\dagger(\vec{p})$ operatoren worden door de tweede Kwantisatie. Merk op dat $\hat{\phi}(x)$ hermitisch is. De annihilatie en creatie-operatoren kan men in inproducten uitdrukken (zie (3.6))

$$\begin{aligned} \hat{a}(\vec{p}) &= (f_p, \hat{\phi}) = \frac{i}{\hbar c} \int d^3\vec{x}\, f_p^*(x) \overset{\leftrightarrow}{\partial_0} \hat{\phi}(x) \\ &= \frac{i}{\hbar c} \int d^3\vec{x} \left[c\, f_p^*(x)\, \hat{\Pi}(x) - \hat{\phi}(x)\, \partial_0 f_p^*(x)\right] \\ \hat{a}^\dagger(\vec{p}) &= -(f_p^*, \hat{\phi}) = -\frac{i}{\hbar c} \int d^3\vec{x}\, f_p(x) \overset{\leftrightarrow}{\partial_0} \hat{\phi}(x) \\ &= -\frac{i}{\hbar c} \int d^3\vec{x} \left[c\, f_p(x)\, \hat{\Pi}(x) - \hat{\phi}(x)\, \partial_0 f_p(x)\right] \end{aligned} \tag{5.4}$$

Hieruit volgt

$$[\hat{a}(\vec{p}), \hat{a}^\dagger(\vec{p}\,')] = \frac{1}{\hbar^2 c^2} \int d^3\vec{x} \int d^3\vec{x}\,' \Big\{ - c\, f_p^*(\vec{x}, t)\, \partial_0 f_{p'}(\vec{x}\,', t)\, [\hat{\Pi}(\vec{x}, t), \hat{\phi}(\vec{x}\,', t)]$$

$$-c\, f_{p'}(\vec{x}', t)\, \partial_0 f_p^*(\vec{x}, t)\, [\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\Pi}(\vec{x}', t)]\Big\}$$

$$= \frac{i}{\hbar c} \int d^3\vec{x}\, f_p^*(\vec{x}, t)\ \overleftrightarrow{\partial_0}\ f_{p'}(\vec{x}, t) = (f_p, f_{p'}) = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \tag{5.5}$$

Evenzo kan men laten zien

$$\begin{aligned} [\hat{a}(\vec{p}), \hat{a}(\vec{p}')] &= -\frac{i}{\hbar c} \int d^3\vec{x}\, f_p^*(\vec{x}, t)\ \overleftrightarrow{\partial_0}\ f_{p'}^*(\vec{x}, t) = -(f_p, f_{p'}^*) = 0 \\ [\hat{a}^\dagger(\vec{p}), \hat{a}^\dagger(\vec{p}')] &= -\frac{i}{\hbar c} \int d^3\vec{x}\, f_p(\vec{x}, t)\ \overleftrightarrow{\partial_0}\ f_{p'}(\vec{x}, t) = -(f_p^*, f_{p'}) = 0 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Bovenstaande commutatie-relaties zijn hetzelfde als die zijn afgeleid voor de harmonische oscillator in de niet relativistische kwantummechanica. Echter nu hebben wij een oneindig aantal vrijheidsgraden ($\vec{p}$ is continu). Dus de vervanging wordt

$$\begin{aligned} &\hat{a}_i \quad \rightarrow \quad \hat{a}(\vec{p}) \\ &[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij} \quad \rightarrow \quad [\hat{a}(\vec{p}), \hat{a}^\dagger(\vec{p}')] = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \end{aligned} \tag{5.7}$$

Door de tweede Kwantisatie worden de impuls P^μ en het impuls-moment $J^{\mu\nu}$ ook operatoren in de Hilbert-ruimte aangezien deze in de velden worden uitgedrukt. Analoog aan de harmonische oscillator voor een eindig aantal vrijheidsgraden (niet relativistische kwantummechanica) bestaat er een grondtoestand met laagste energie in de Hilbert-ruimte H. Deze wordt het vacuüm genoemd, notatie $|0\rangle \in$ H. Deze toestand bevat geen deeltjes. De n^e aangeslagen toestand van de harmonische oscillator komt overeen met een n-deeltjes toestand die n verschillende impulsen heeft, notatie $|\vec{p}_1; \vec{p}_2; \cdots; \vec{p}_n\rangle \in$ H
Voer nu de getal-dichtheid-operator in

$$\hat{N}(\vec{p}) = \hat{a}^\dagger(\vec{p})\, \hat{a}(\vec{p}) \tag{5.8}$$

zodat de getal-operator eruit ziet als

$$\hat{N} = \int d^3\vec{p}\, \hat{N}(\vec{p}) \quad \text{met} \quad \hat{N}|\vec{p}_1; \vec{p}_2; \cdots; \vec{p}_n\rangle = n\, |\vec{p}_1; \vec{p}_1; \cdots; \vec{p}_n\rangle \tag{5.9}$$

Uit de commutatie-relaties voor de creatie- en annihilatie-operatoren volgt

$$\begin{aligned} &[\hat{N}(\vec{p}), \hat{a}(\vec{p}')] = -\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}')\, \hat{a}(\vec{p}) \qquad [\hat{N}(\vec{p}), \hat{a}^\dagger(\vec{p}')] = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}')\, \hat{a}^\dagger(\vec{p}) \\ &\Rightarrow \quad [\hat{N}, \hat{a}(\vec{p})] = -\hat{a}(\vec{p}) \qquad [\hat{N}, \hat{a}^\dagger(\vec{p})] = \hat{a}^\dagger(\vec{p}) \end{aligned} \tag{5.10}$$

Men kan nu het volgende afleiden

$$\begin{aligned} &\hat{a}^\dagger(\vec{p})\, |\vec{p}_1; \vec{p}_2; \cdots; \vec{p}_n\rangle = c_+\, |\vec{p}; \vec{p}_1; \cdots; \vec{p}_n\rangle \\ &\hat{N}\, \hat{a}^\dagger(\vec{p})\, |\vec{p}_1; \vec{p}_2; \cdots; \vec{p}_n\rangle = \hat{a}^\dagger(\vec{p})\, (\hat{N} + \hat{1})\, |\vec{p}_1; \vec{p}_2; \cdots; \vec{p}_n\rangle \\ &= (n+1)\, \hat{a}^\dagger(\vec{p}) |\vec{p}_1; \vec{p}_2; \cdots; \vec{p}_n\rangle \end{aligned} \tag{5.11}$$

of

$$\hat{a}^\dagger(\vec{p})\,|\vec{p}_1;\vec{p}_2;\cdots;\vec{p}_n\rangle = c_+\,|\vec{p};\vec{p}_1;\vec{p}_2;\cdots;\vec{p}_n\rangle \quad \text{met} \quad \vec{p} \neq \vec{p}_i \tag{5.12}$$

Uit bovenstaande volgt dat $\hat{a}^\dagger(\vec{p})$ een creatie-operator is die een deeltje met impuls $\vec{p}$ in de Hilbert-ruimte creëert. Vanwege normalisatie-redenen zullen wij $c_+ = \sqrt{n+1}$ nemen. Een n-deeltjes-toestand kan nu geschreven worden als

$$|\vec{p}_1;\vec{p}_2;\cdots;\vec{p}_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\,\hat{a}^\dagger(\vec{p}_1)\,\hat{a}^\dagger(\vec{p}_2)\cdots\hat{a}^\dagger(\vec{p}_n)\,|0\rangle \tag{5.13}$$

$\hat{a}(\vec{p})$ is een annihilatie-operator die een deeltje in de Hilbert-ruimte vernietigt.

$$\hat{N}\,\hat{a}(\vec{p})\,|\vec{p}_1\rangle = \hat{a}(\vec{p})\,(\hat{N}-\hat{1})\,|\vec{p}_1\rangle = 0 \quad\rightarrow\quad \hat{a}(\vec{p})\,|\vec{p}_1\rangle = c_-|0\rangle \tag{5.14}$$

Omdat alleen voor de vacuümtoestand geldt dat $\hat{N}\,|0\rangle = 0$ Kies $c_- = 1$ voor normalisatie-redenen. Laat nu $\hat{a}(\vec{p})$ op een algemene toestand werken

$$\hat{a}(\vec{p})\,|\vec{p}_1;\vec{p}_2;\cdots;\vec{p}_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\,\hat{a}(\vec{p})\hat{a}^\dagger(\vec{p}_1)\,\hat{a}^\dagger(\vec{p}_2)\cdots\hat{a}^\dagger(\vec{p}_n)\,|0\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\Big[\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}_1)|\vec{p}_2;\cdots;\vec{p}_n\rangle + \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}_2)|\vec{p}_1;\vec{p}_3;\cdots;\vec{p}_n\rangle + \cdots$$

$$+\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}_n)|\vec{p}_1;\vec{p}_2;\cdots;\vec{p}_{n-1}\rangle\Big] \tag{5.15}$$

Omdat de creatie-operatoren met elkaar commuteren is de toestand $|\vec{p}_1;\vec{p}_2;\cdots;\vec{p}_n\rangle$ symmetrische onder verwisseling van de impulsen. Derhalve krijgt men de Bose-Einstein statistiek voor deeltjes met spin nul.

$$\hat{N}(\vec{p})\,|\vec{p}_1;\vec{p}_2;\cdots;\vec{p}_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\,\hat{a}^\dagger(\vec{p})\,\hat{a}(\vec{p})\,\hat{a}^\dagger(\vec{p}_1)\,\hat{a}^\dagger(\vec{p}_2)\,\cdots\hat{a}^\dagger(\vec{p}_n)\,|0\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\Big\{\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}_1)\,\sqrt{n}\,|\vec{p};\vec{p}_2;\cdots;\vec{p}_n\rangle + \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}_2)\,\sqrt{n}\,|\vec{p}_1;\vec{p};\cdots;\vec{p}_n\rangle$$

$$+\cdots+\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}_n)\,\sqrt{n}\,|\vec{p}_1;\vec{p}_2;\cdots;\vec{p}\rangle\Big\}$$

$$= \Big\{\sum_{i=1}^{n}\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}_i)\Big\}\,|\vec{p}_1;\vec{p}_2;\cdots;\vec{p}_n\rangle \tag{5.16}$$

Verder hebben we de eigenschap

$$\langle\vec{p}_1;\vec{p}_2;\cdots;\vec{p}_n| = |\vec{p}_1;\vec{p}_2;\cdots;\vec{p}_n\rangle^\dagger = \langle 0|\frac{1}{\sqrt{n!}}\,\hat{a}(\vec{p}_n)\cdots\hat{a}(\vec{p}_2)\,\hat{a}(\vec{p}_1) \tag{5.17}$$

Het in-product is gelijk aan

$$\langle\vec{p}_1;\vec{p}_2;\cdots;\vec{p}_m|\vec{p}_1\,';\vec{p}_2\,';\cdots;\vec{p}_n\,'\rangle = 0 \quad \text{voor} \quad m \neq n$$

$$\langle\vec{p}_1;\vec{p}_2;\cdots;\vec{p}_n|\vec{p}_1\,';\vec{p}_2\,';\cdots;\vec{p}_n\,'\rangle = \frac{1}{n!}\sum_{P(p_1',p_2',\cdots,p_n')}\delta^{(3)}(\vec{p}_1-\vec{p}_1\,')$$

$$\delta^{(3)}(\vec{p}_2-\vec{p}_2\,')\cdots\delta^{(3)}(\vec{p}_n-\vec{p}_n\,') \quad \text{voor} \quad m = n \tag{5.18}$$

$P(p_1',p_2',\cdots,p_n')$ stelt de permutatie voor van de impulsen $p_1',p_2',\cdots,p_n'$. Men ziet dat bij een continue representatie van de toestandsvektoren in de Hilbert-ruimte zich dezelfde problemen voordoen als waargenomen voor vlakke golven in de niet-relativistische kwantummechanica nl. het verschijnsel van delta-functies. Dit heeft tot gevolg dat de impulsen die in de veel-deeltjes toestand voorkomen niet aan elkaar gelijk kunnen worden gesteld. Voor verstrooiingsprocessen is dit ook niet nodig. De meest algemene toestand $|\Phi\rangle \in \mathrm{H}$ kan men schrijven als

$$|\Phi\rangle = f_0\,|0\rangle + \sum_{n=1}^{\infty}\int d^3\vec{p}_1\,d^3\vec{p}_2\cdots\vec{p}_n\,f_n(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\cdots,\vec{p}_n)|\vec{p}_1;\vec{p}_2;\cdots;\vec{p}_n\rangle \tag{5.19}$$

waarbij $f_n(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\cdots,\vec{p}_n)$ symmetrisch is onder verwisseling van de impulsen. Verder is f_n complex. De toestand $|\Phi\rangle$ is op 1 genormeerd

$$1 = \langle\Phi|\Phi\rangle = |f_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\int d^3\vec{p}_1\,d^3\vec{p}_2\cdots\vec{p}_n\,|f_n(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\cdots,\vec{p}_n)|^2 \tag{5.20}$$

De vier-impuls van het kwantum-veld kan nu in creatie- en annihilatie-operatoren worden uitgedrukt. Uit (4.123) volgt

$$\hat{P}^\mu = \frac{1}{2}\int d^3\vec{p}\,p^\mu\left[a(\vec{p})\,a^\dagger(\vec{p}) + a^\dagger(\vec{p})\,a(\vec{p})\right] = \int d^3\vec{p}\,p^\mu\left[\hat{N}(\vec{p}) + \frac{1}{2}\delta^{(3)}(0)\right] \tag{5.21}$$

De laatste term is erg lelijk en wel voor de volgende redenen

a De distributie $\delta^{(3)}(0)$ is niet gedefinieerd.

b $\hat{P}^\mu|0\rangle \neq 0$. Dit betekend dat het vacuüm (geen deeltjes !!) niet de eigenwaarde nul heeft voor de energie- en impuls-operator.

Om dit euvel te verhelpen voeren wij normaal geordende operatoren in. Dit komt erop neer dat wij de term $\delta^{(3)}(0)$ overal weglaten waar hij verschijnt.

Normale Ordening

Definitie

$$:\hat{a}(\vec{p})\,\hat{a}^\dagger(\vec{p}):\equiv \hat{a}^\dagger(\vec{p})\,\hat{a}(\vec{p}) \tag{5.22}$$

Deze operatie houdt in dat voor een willekeurig product van creatie- en annihilatie-operatoren na normale ordening de creatie-operatoren links van de annihilatie-operatoren staan. Bijv.

$$: \hat{a}^\dagger(\vec{p}_1)\,\hat{a}(\vec{p}_2)\,\hat{a}(\vec{p}_3)\,\hat{a}^\dagger(\vec{p}_4) := \hat{a}^\dagger(\vec{p}_1)\,\hat{a}^\dagger(\vec{p}_4)\,\hat{a}(\vec{p}_2)\,\hat{a}(\vec{p}_3) \tag{5.23}$$

Merk op dat de onderlinge volgorde tussen de creatie-operatoren en tussen de annihilatie-operatoren er niet toe doet. Men kan na normale ordening schrijven

$$: \hat{P}^\mu := \int d^3\vec{p}\, p^\mu\, \hat{N}(\vec{p}) \quad \text{met} \quad : \hat{P}^\mu : |0\rangle = 0$$

$$: \hat{P}^\mu :\, |\vec{p}_1; \vec{p}_2; \cdots; \vec{p}_n\rangle = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} p_i^\mu \Big\}\, |\vec{p}_1; \vec{p}_2; \cdots; \vec{p}_n\rangle \tag{5.24}$$

Verder kunnen wij afleiden (zie (4.124) en (4.129))

$$[: \hat{P}^\mu :, \hat{\phi}(\vec{x},t)] = -i\,\hbar\,\partial^\mu \hat{\phi}(\vec{x},t) \equiv -\underline{P}^\mu\,\hat{\phi}(\vec{x},t)$$

$$[: \hat{J}^{\mu\nu} :, \hat{\phi}(\vec{x},t)] = -i\,\hbar\,\Big(x^\mu\,\partial^\nu - x^\nu\,\partial^\mu\Big)\,\hat{\phi}(\vec{x},t) = -\underline{M}^{\mu\nu}\,\hat{\phi}(\vec{x},t) \tag{5.25}$$

$\underline{P}^\mu$ en $\underline{M}^{\mu\nu}$ zijn de klassieke representaties van het scalaire veld.

5.2 Kwantisatie van het complexe scalaire veld

De velden worden gegeven door

$$\hat{\phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\hat{\phi}_1(x) + i\,\hat{\phi}_2(x)\Big) \qquad \hat{\phi}^\dagger(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\hat{\phi}_1(x) - i\,\hat{\phi}_2(x)\Big) \tag{5.26}$$

waarbij $\hat{\phi}_i(x)$ $(i = 1, 2)$ hermitische (reële) velden zijn. Uit het laatste volgt

$$[\hat{\phi}_k(\vec{x},t), \hat{\Pi}_l(\vec{x}',t)] = i\,\hbar\,\delta_{kl}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')$$

$$[\hat{\phi}_k(\vec{x},t), \hat{\phi}_l(\vec{x}',t)] = 0$$

$$[\hat{\Pi}_k(\vec{x},t), \hat{\Pi}_l(\vec{x}',t)] = 0 \tag{5.27}$$

In het geval van het complexe scalaire veld luiden de ETC commutatie-relaties als volgt

$$[\hat{\phi}(\vec{x},t), \hat{\Pi}(\vec{x}',t)] = i\,\hbar\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') \qquad [\hat{\phi}^\dagger(\vec{x},t), \hat{\Pi}^\dagger(\vec{x}',t)] = i\,\hbar\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')$$

$$[\hat{\phi}(\vec{x},t), \hat{\phi}(\vec{x}',t)] = 0 \qquad [\hat{\phi}^\dagger(\vec{x},t), \hat{\phi}^\dagger(\vec{x}',t)] = 0$$

$$[\hat{\phi}(\vec{x},t), \hat{\phi}^\dagger(\vec{x}',t)] = 0 \qquad [\hat{\Pi}(\vec{x},t), \hat{\Pi}^\dagger(\vec{x}',t)] = 0$$

$$[\hat{\phi}(\vec{x},t), \hat{\Pi}^\dagger(\vec{x}',t)] = 0 \qquad [\hat{\phi}^\dagger(\vec{x},t), \hat{\Pi}(\vec{x}',t)] = 0 \tag{5.28}$$

De twee kwantum-velden krijgen de volgende representatie

$$
\begin{aligned}
\hat{\phi}(x) &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \frac{\hbar c}{\sqrt{2E}} \Big[\hat{a}_+(\vec{p})\, e^{-i\,px/\hbar} + \hat{a}_-^\dagger(\vec{p})\, e^{i\,px/\hbar}\Big] \\
\hat{\phi}^\dagger(x) &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \frac{\hbar c}{\sqrt{2E}} \Big[\hat{a}_-(\vec{p})\, e^{-i\,px/\hbar} + \hat{a}_+^\dagger(\vec{p})\, e^{i\,px/\hbar}\Big]
\end{aligned} \tag{5.29}
$$

De creatie- en annihilatie-operatoren kunnen worden uitgedrukt in die van de reële velden $\hat{\phi}_i$

$$
\begin{aligned}
\hat{a}_+(\vec{p}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\hat{a}_1(\vec{p}) + i\,\hat{a}_2(\vec{p})\Big) \qquad & \hat{a}_-^\dagger(\vec{p}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\hat{a}_1^\dagger(\vec{p}) + i\,\hat{a}_2^\dagger(\vec{p})\Big) \\
\hat{a}_+^\dagger(\vec{p}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\hat{a}_1^\dagger(\vec{p}) - i\,\hat{a}_2^\dagger(\vec{p})\Big) \qquad & \hat{a}_-(\vec{p}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\hat{a}_1(\vec{p}) - i\,\hat{a}_2(\vec{p})\Big)
\end{aligned} \tag{5.30}
$$

Uit de commutatie-relaties

$$
\begin{aligned}
&[\hat{a}_k(\vec{p}), \hat{a}_l^\dagger(\vec{p}\,')] = \delta_{kl}\, \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}\,') \\
&[\hat{a}_k(\vec{p}), \hat{a}_l(\vec{p}\,')] = 0 \\
&[\hat{a}_k^\dagger(\vec{p}), \hat{a}_l^\dagger(\vec{p}\,')] = 0
\end{aligned} \tag{5.31}
$$

volgen

$$
\begin{aligned}
&[\hat{a}_\pm(\vec{p}), \hat{a}_\pm^\dagger(\vec{p}\,')] = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}\,') \qquad && [\hat{a}_\pm(\vec{p}), \hat{a}_\mp^\dagger(\vec{p}\,')] = 0 \\
&[\hat{a}_\pm(\vec{p}), \hat{a}_\pm(\vec{p}\,')] = 0 && [\hat{a}_\pm(\vec{p}), \hat{a}_\mp(\vec{p}\,')] = 0 \\
&[\hat{a}_\pm^\dagger(\vec{p}), \hat{a}_\pm^\dagger(\vec{p}\,')] = 0 && [\hat{a}_\pm^\dagger(\vec{p}), \hat{a}_\mp^\dagger(\vec{p}\,')] = 0
\end{aligned} \tag{5.32}
$$

De interpretatie is dat $\hat{a}_+^\dagger(\vec{p})$ en $\hat{a}_+(\vec{p})$ de creatie- en annihilatie-operatoren van de positief geladen deeltjes voorstellen terwijl $\hat{a}_-^\dagger(\vec{p})$ en $\hat{a}_-^(\vec{p})$ de creatie- en annihilatie-operatoren van de negatief geladen deeltjes zijn. De Hilbert-ruimtes van de positief en negatief geladen deeltjes worden respectievelijk genoteerd door $\mathrm{H}^{(+)}$ en $\mathrm{H}^{(-)}$ met als toestandsvektoren

$$
|\vec{p}_1; \vec{p}_2; \cdots; \vec{p}_m\rangle \in \mathrm{H}^{(+)} \qquad |\vec{q}_1; \vec{q}_2; \cdots; \vec{q}_n\rangle \in \mathrm{H}^{(-)} \tag{5.33}
$$

Hieruit kan men de volgende product-ruimte construeren $\mathrm{H} = \mathrm{H}^{(+)} \otimes \mathrm{H}^{(-)}$ met als toestandsvektor

$$
|\vec{p}_1; \vec{p}_2; \cdots; \vec{p}_m; \vec{q}_1; \vec{q}_2; \cdots; \vec{q}_n\rangle \in \mathrm{H} \tag{5.34}
$$

Deze kan uit het vacuüm

$$
|0\rangle = |0\rangle_+\, |0\rangle_- \tag{5.35}
$$

gecreëerd worden via

$$|\vec{p}_1;\vec{p}_2;\cdots;\vec{p}_m;\vec{q}_1;\vec{q}_2;\cdots;\vec{q}_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!\,m!}}\,\hat{a}^\dagger_+(\vec{p}_1)\,\hat{a}^\dagger_+(\vec{p}_2)\cdots\hat{a}^\dagger_+(\vec{p}_m)$$

$$\hat{a}^\dagger_-(\vec{q}_1)\,\hat{a}^\dagger_-(\vec{q}_2)\cdots\hat{a}^\dagger_-(\vec{q}_n)\,|0\rangle \tag{5.36}$$

Definieer weer de getal-dichtheid-operator

$$\hat{N}_\pm(\vec{p}) = \hat{a}^\dagger_\pm(\vec{p})\hat{a}_\pm(\vec{p}) \quad \text{getal-dichtheid-operator}$$

$$\hat{N}_\pm = \int d^3\vec{p}\,\hat{N}_\pm(\vec{p}) \quad \text{getal-operator} \tag{5.37}$$

We kunnen nu weer na normale ordening de impuls-operator : $\hat{P}^\mu$: en de ladingsoperator : $\hat{Q}$: schrijven als

$$:\hat{P}^\mu := \int d^3\vec{p}\,p^\mu\left(\hat{N}_+(\vec{p}) + \hat{N}_-(\vec{p})\right)$$

$$:\hat{Q} := e\int d^3\vec{p}\left(\hat{N}_+(\vec{p}) - \hat{N}_-(\vec{p})\right) \tag{5.38}$$

met

$$:\hat{P}^\mu:\,|\vec{p}_1;\vec{p}_2;\cdots;\vec{p}_m;\vec{q}_1;\vec{q}_2;\cdots;\vec{q}_n\rangle = \Big\{\sum_{i=1}^m p_i^\mu + \sum_{i=1}^n q_i^\mu\Big\}\,|\vec{p}_1;\vec{p}_2;\cdots;\vec{p}_m;$$

$$\vec{q}_1;\vec{q}_2;\cdots;\vec{q}_n\rangle$$

$$:\hat{Q}:\,|\vec{p}_1;\vec{p}_2;\cdots;\vec{p}_m;\vec{q}_1;\vec{q}_2;\cdots;\vec{q}_n\rangle = e\,(m-n)\,|\vec{p}_1;\vec{p}_2;\cdots;\vec{p}_m;$$

$$\vec{q}_1;\vec{q}_2;\cdots;\vec{q}_n\rangle \tag{5.39}$$

Verder hebben wij de eigenschap

$$[:\hat{Q}:,:\hat{P}^\mu:] = 0 \qquad [:\hat{Q}:,:\hat{J}^{\mu\nu}:] = 0 \tag{5.40}$$

De eerste commutator volgt uit

$$[\hat{N}_\pm(\vec{p}),\hat{N}_\pm(\vec{p})] = 0 \quad \text{en} \quad [\hat{N}_\mp(\vec{p}),\hat{N}_\pm(\vec{p})] = 0 \tag{5.41}$$

5.3 Kwantisatie van het complexe Dirac-veld

Zoals in het begin van dit hoofdstuk is vermeld moet een halftallig-spin-veld en zijn canonieke impuls aan anti-commutatie-relaties voldoen. In het geval van het Dirac-veld worden deze gegeven door

$$
\begin{aligned}
&\{\hat{\psi}_\alpha(\vec{x},t), \hat{\Pi}_\beta(\vec{x}',t)\} = i\,\hbar\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') \\
&\{\hat{\psi}_\alpha(\vec{x},t), \hat{\psi}_\beta(\vec{x}',t)\} = 0 \\
&\{\hat{\Pi}_\alpha(\vec{x},t), \hat{\Pi}_\beta(\vec{x}',t)\} = 0 \\
&\text{met} \quad \hat{\Pi}_\alpha(\vec{x},t) = i\,\hbar\,\hat{\psi}^\dagger_\alpha(\vec{x},t) \qquad \alpha,\beta = 1,2,3,4
\end{aligned}
\tag{5.42}
$$

De kwantum-velden zijn

$$
\begin{aligned}
\hat{\psi}_\alpha(x) &= \sum_s \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sqrt{\frac{mc^2}{E}} \left[\hat{b}(\vec{p},s)\,u_\alpha(\vec{p},s)\,e^{-i\,px/\hbar} + \hat{d}^\dagger(\vec{p},s)\,v_\alpha(\vec{p},s)\,e^{i\,px/\hbar}\right] \\
\hat{\psi}^\dagger_\alpha(x) &= \sum_s \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sqrt{\frac{mc^2}{E}} \left[\hat{b}^\dagger(\vec{p},s)\,u^\dagger_\alpha(\vec{p},s)\,e^{i\,px/\hbar} + \hat{d}(\vec{p},s)\,v^\dagger_\alpha(\vec{p},s)\,e^{-i\,px/\hbar}\right]
\end{aligned}
\tag{5.43}
$$

Een verkorte schrijfwijze is (zie (3.72))

$$
\hat{\psi}(x) = \sum_s \int d^3\vec{p}\left[\hat{b}(\vec{p},s)\,\psi_{1,\vec{p},s}(x) + \hat{d}^\dagger(\vec{p},s)\,\psi_{2,\vec{p},s}(x)\right] \tag{5.44}
$$

Met de definities (zie (3.72)-(3.74)) kunnen de creatie- en annihilatie-operatoren geschreven worden als

$$
\begin{aligned}
\hat{b}(\vec{p},s) &= \left(\psi_{1,\vec{p},s}, \hat{\psi}\right) = \int d^3\vec{x}\,\psi^\dagger_{1,\vec{p},s}(x)\,\hat{\psi}(x) \\
\hat{b}^\dagger(\vec{p},s) &= \left(\psi^\dagger_{1,\vec{p},s}, \hat{\psi}^\dagger\right) = \frac{1}{i\hbar}\int d^3\vec{x}\,\psi_{1,\vec{p},s}(x)\,\hat{\Pi}(x) \\
\hat{d}(\vec{p},s) &= \left(\psi^\dagger_{2,\vec{p},s}, \hat{\psi}^\dagger\right) = \frac{1}{i\hbar}\int d^3\vec{x}\,\psi_{2,\vec{p},s}(x)\,\hat{\Pi}(x) \\
\hat{d}^\dagger(\vec{p},s) &= \left(\psi_{2,\vec{p},s}, \hat{\psi}\right) = \int d^3\vec{x}\,\psi^\dagger_{2,\vec{p},s}(x)\,\hat{\psi}(x)
\end{aligned}
\tag{5.45}
$$

Hieruit volgt

$$
\begin{aligned}
&\{\hat{b}(\vec{p},s), \hat{b}^\dagger(\vec{p}',s')\} = \frac{1}{i\,\hbar}\int d^3\vec{x}\int d^3\vec{x}'\,\psi^\dagger_{1,\vec{p},s}(x)\,\psi_{1,\vec{p}',s'}(x')\,\{\hat{\psi}(\vec{x},t), \Pi(\vec{x}',t)\} \\
&= \int d^3\vec{x}\,\psi^\dagger_{1,\vec{p},s}(x)\,\psi_{1,\vec{p}',s'}(x) = \delta_{ss'}\,\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}') \\
&\{\hat{d}(\vec{p},s), \hat{d}^\dagger(\vec{p}',s')\} = \delta_{ss'}\,\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')
\end{aligned}
$$

$$\{\hat{b}(\vec{p},s),\hat{b}(\vec{p}',s')\}=0 \qquad \{\hat{d}(\vec{p},s),\hat{d}(\vec{p}',s')\}=0$$

$$\{\hat{b}^\dagger(\vec{p},s),\hat{b}^\dagger(\vec{p}',s')\}=0 \qquad \{\hat{d}^\dagger(\vec{p},s),\hat{d}^\dagger(\vec{p}',s')\}=0$$

$$\{\hat{b}(\vec{p},s),\hat{d}(\vec{p}',s')\}=0 \qquad \{\hat{b}(\vec{p},s),\hat{d}^\dagger(\vec{p}',s')\}=0$$

$$\{\hat{b}^\dagger(\vec{p},s),\hat{d}(\vec{p}',s')\}=0 \qquad \{\hat{b}^\dagger(\vec{p},s),\hat{d}^\dagger(\vec{p}',s')\}=0 \tag{5.46}$$

$\hat{b}^\dagger(\vec{p},s)$ en $\hat{b}(\vec{p},s)$ zijn de creatie- en annihilatie-operatoren van het negatief geladen spin half deeltje (e^-, μ^-,τ^- etc.).
$\hat{d}^\dagger(\vec{p},s)$ en $\hat{d}(\vec{p},s)$ zijn de creatie- en annihilatie-operatoren van het positief geladen spin half deeltje (e^+, μ^+,τ^+ etc.).
De Hilbert-ruimtes van de negatief geladen deeltjes en positief geladen anti-deeltjes worden respectievelijk gegeven door $\mathrm{H}^{(-)}$ en $\mathrm{H}^{(+)}$. De toestandsvektoren zijn

$$|\vec{p}_1,s_1;\vec{p}_2,s_2;\cdots;\vec{p}_m,s_m\rangle \in \mathrm{H}^{(-)} \qquad |\vec{q}_1,t_1;\vec{q}_2,t_2;\cdots;\vec{q}_n,t_n\rangle \in \mathrm{H}^{(+)} \tag{5.47}$$

met

$$|\vec{p}_1,s_1;\vec{p}_2,s_2;\cdots;\vec{p}_m,s_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{m!}}\,\hat{b}^\dagger(\vec{p}_1,s_1)\,\hat{b}^\dagger(\vec{p}_2,s_2)\cdots\hat{b}^\dagger(\vec{p}_m,s_m)|0\rangle_-$$

$$|\vec{q}_1,t_1;\vec{q}_2,t_2;\cdots;\vec{q}_n,t_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\,\hat{d}^\dagger(\vec{q}_1,t_1)\,\hat{d}^\dagger(\vec{q}_2,t_2)\cdots\hat{d}^\dagger(\vec{q}_n,t_n)|0\rangle_+ \tag{5.48}$$

Omdat de creatie-operatoren anti-commuteren is de veel-deeltjes-toestand anti-symmetrisch onder verwisseling van de impulsen en de spins.

$$|\vec{p}_1,s_1;\cdots\vec{p}_i,s_i;\cdots\vec{p}_j,s_j;\cdots\vec{p}_m,s_m\rangle = -|\vec{p}_1,s_1;\cdots\vec{p}_j,s_j;\cdots\vec{p}_i,s_i;\cdots\vec{p}_m,s_m\rangle$$

$$|\vec{q}_1,t_1;\cdots\vec{q}_i,t_i;\cdots\vec{q}_j,t_j;\cdots\vec{q}_n,t_n\rangle = -|\vec{q}_1,t_1;\cdots\vec{q}_j,t_j;\cdots\vec{q}_i,t_i;\cdots\vec{q}_n,t_n\rangle \tag{5.49}$$

Hieruit volgt de Fermi-Dirac-statistiek van de spin half deeltjes. Men kan nu ook de product-ruimte $\mathrm{H}=\mathrm{H}^{(-)}\otimes\mathrm{H}^{(+)}$ construeren met de toestandsvektor

$$|\vec{p}_1,s_1;\vec{p}_2,s_2;\cdots;\vec{p}_m,s_m;\vec{q}_1,t_1;\vec{q}_2,t_2;\cdots;\vec{q}_n,t_n\rangle = |\vec{p}_1,s_1;\vec{p}_2,s_2;\cdots;\vec{p}_m,s_m\rangle$$

$$|\vec{q}_1,t_1;\vec{q}_2,t_2;\cdots;\vec{q}_n,t_n\rangle \in \mathrm{H} \tag{5.50}$$

Deze toestand kan uit het vacuüm gecreëerd worden als

$$|\vec{p}_1,s_1;\vec{p}_2,s_2;\cdots;\vec{p}_m,s_m;\vec{q}_1,t_1;\vec{q}_2,t_2;\cdots;\vec{q}_n,t_n\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n!\,m!}}\,\hat{b}^\dagger(\vec{p}_1,s_1)\,\hat{b}^\dagger(\vec{p}_2,s_2)\cdots\hat{b}^\dagger(\vec{p}_m,s_m)\hat{d}^\dagger(\vec{q}_1,t_1)\,\hat{d}^\dagger(\vec{q}_2,t_2)\cdots\hat{d}^\dagger(\vec{q}_n,t_n)\,|0\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle\vec{p}_1,s_1;\vec{p}_2,s_2;\cdots;\vec{p}_m,s_m;\vec{q}_1,t_1;\vec{q}_2,t_2;\cdots;\vec{q}_n,t_n|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n!\,m!}}\,\langle 0|\hat{d}(\vec{q}_n,t_n)\cdots\hat{d}(\vec{q}_2,t_2)\,\hat{d}(\vec{q}_1,t_1)\,\hat{b}\vec{p}_m,s_m)\cdots\hat{b}(\vec{p}_2,s_2)\,\hat{b}(\vec{p}_1,s_1) \tag{5.51}$$

De normering is

$$\langle \vec{p}_1', s_1'; \cdots ; \vec{p}_{m'}', s_{m'}'; \vec{q}_1', t_1'; \cdots ; \vec{q}_{n'}', t_{n'}' | \vec{p}_1, s_1; \cdots ; \vec{p}_m, s_m; \vec{q}_1, t_1; \cdots ; \vec{q}_n, t_n\rangle$$

$$= \frac{\delta_{mm'}\delta_{nn'}}{m!\,n!} \det |\delta_{s_i s_j'}\, \delta^{(3)}(\vec{p}_i - \vec{p}_j')| \, \det |\delta_{t_k t_l'}\, \delta^{(3)}(\vec{q}_k - \vec{q}_l')| \tag{5.52}$$

De creatie-operatoren op een veel-deeltjes-toestand werken als volgt

$$\hat{b}^\dagger(\vec{p}, s)\, |\vec{p}_1, s_1; \cdots ; \vec{p}_m, s_m; \vec{q}_1, t_1; \cdots ; \vec{q}_n, t_n\rangle = (-1)^{i+1} \sqrt{m+1}$$

$$|\vec{p}_1, s_1; \cdots \vec{p}_i, s_i; \cdots ; \vec{p}_m, s_m; \vec{q}_1, t_1; \cdots ; \vec{q}_n, t_n\rangle \quad \vec{p}_i = \vec{p} \quad s_i = s$$

$$\hat{d}^\dagger(\vec{q}, t)\, |\vec{p}_1, s_1; \cdots ; \vec{p}_m, s_m; \vec{q}_1, t_1; \cdots ; \vec{q}_n, t_n\rangle = (-1)^{m+j+1} \sqrt{n+1}$$

$$|\vec{p}_1, s_1; \cdots ; \vec{p}_m, s_m; \vec{q}_1, t_1; \cdots \vec{q}_j, t_j; \cdots \vec{q}_n, t_n\rangle \quad \vec{q}_j = \vec{q} \quad t_j = t \tag{5.53}$$

en voor de annihilatie-operatoren geldt

$$\hat{b}(\vec{p}, s)\, |\vec{p}_1, s_1; \cdots ; \vec{p}_m, s_m; \vec{q}_1, t_1; \cdots ; \vec{q}_n, t_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1}$$

$$\delta_{ss_i}\, \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}_i)\, |\vec{p}_1, s_1; \cdots \vec{p}_{i-1}, s_{i-1}; \vec{p}_{i+1}, s_{i+1}; \cdots ; \vec{p}_m, s_m; \vec{q}_1, t_1; \cdots ; \vec{q}_n, t_n\rangle$$

$$\hat{d}(\vec{q}, t)\, |\vec{p}_1, s_1; \cdots ; \vec{p}_m, s_m; \vec{q}_1, t_1; \cdots ; \vec{q}_n, t_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{m+j+1}$$

$$\delta_{tt_j}\, \delta^{(3)}(\vec{q} - \vec{q}_i)\, |\vec{p}_1, s_1; \cdots ; \vec{p}_m, s_m; \vec{q}_1, t_1; \cdots \vec{q}_{j-1}, t_{j-1}; \vec{q}_{j+1}, t_{j+1}; \cdots \vec{q}_n, t_n\rangle \tag{5.54}$$

Men kan nu weer de getal-dichtheid-operator voor deeltjes en anti-deeltjes definiëren

$$\hat{N}_-(\vec{p}, s) = \hat{b}^\dagger(\vec{p}, s)\, \hat{b}(\vec{p}, s) \qquad \hat{N}_+(\vec{p}, s) = \hat{d}^\dagger(\vec{p}, s)\, \hat{d}(\vec{p}, s) \tag{5.55}$$

waaruit weer de getal-operator volgt

$$\hat{N}_\pm = \sum_s \int d^3\vec{p}\, \hat{N}_\pm(\vec{p}, s) \tag{5.56}$$

De commutatie-relaties luiden

$$[\hat{N}_-(\vec{p}, s), \hat{b}(\vec{p}', s')] = -\delta_{ss'}\, \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}')\, \hat{b}(\vec{p}, s)$$

$$[\hat{N}_-(\vec{p}, s), \hat{b}^\dagger(\vec{p}', s')] = \delta_{ss'}\, \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}')\, \hat{b}^\dagger(\vec{p}, s)$$

$$[\hat{N}_+(\vec{p}, s), \hat{d}(\vec{p}', s')] = -\delta_{ss'}\, \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}')\, \hat{d}(\vec{p}, s)$$

$$[\hat{N}_+(\vec{p}, s), \hat{d}^\dagger(\vec{p}', s')] = \delta_{ss'}\, \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}')\, \hat{d}^\dagger(\vec{p}, s) \tag{5.57}$$

met als eigenschap voor de getal-dichtheid-operator

$$
\begin{aligned}
&\hat{N}_-(\vec{p},s) \quad |\vec{p}_1,s_1;\vec{p}_2,s_2;\cdots;\vec{p}_m,s_m;\vec{q}_1,t_1;\vec{q}_2,t_2;\cdots;\vec{q}_n,t_n\rangle = \\
&\Big\{\sum_{i=1}^{m}\delta_{ss_i}\,\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}_i)\Big\}\,|\vec{p}_1,s_1;\vec{p}_2,s_2;\cdots;\vec{p}_m,s_m;\vec{q}_1,t_1;\vec{q}_2,t_2;\cdots;\vec{q}_n,t_n\rangle \\
&\hat{N}_+(\vec{q},t) \quad |\vec{p}_1,s_1;\vec{p}_2,s_2;\cdots;\vec{p}_m,s_m;\vec{q}_1,t_1;\vec{q}_2,t_2;\cdots;\vec{q}_n,t_n\rangle = \\
&\Big\{\sum_{j=1}^{n}\delta_{tt_j}\,\delta^{(3)}(\vec{q}-\vec{q}_j)\Big\}\,|\vec{p}_1,s_1;\vec{p}_2,s_2;\cdots;\vec{p}_m,s_m;\vec{q}_1,t_1;\vec{q}_2,t_2;\cdots;\vec{q}_n,t_n\rangle
\end{aligned}
\tag{5.58}
$$

In de toestanden komen alle impulsen en spins slechts één keer voor. Dit volgt uit de Fermi-Dirac-statistiek. Dit is in tegenstelling tot de Bose-Einstein-statistiek waar een oneindig aantal deeltjes met dezelfde kwantum-getallen voorkomen. Hier konden we echter geen continue representatie voor vinden. Een algemene multi-fermion toestand kan geschreven worden als

$$
\begin{aligned}
|\Phi\rangle = f_0\,|0\rangle &+ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{m}\sum_{s_i=\pm1/2}\int d^3\vec{p}_i\,\prod_{j=1}^{n}\sum_{t_j=\pm1/2}\int d^3\vec{q}_j\,f(\vec{p}_1,s_1\cdots\vec{p}_m,s_m) \\
&\times g(\vec{q}_1,t_1\cdots\vec{q}_n,t_n)\,|\vec{p}_1,s_1;\vec{p}_2,s_2;\cdots;\vec{p}_m,s_m;\vec{q}_1,t_1;\vec{q}_2,t_2;\cdots;\vec{q}_n,t_n\rangle
\end{aligned}
\tag{5.59}
$$

Hierbij zijn $f(\vec{p}_1,s_1\cdots\vec{p}_m,s_m)$ en $g(\vec{q}_1,t_1\cdots\vec{q}_n,t_n)$ complexe functies die respectievelijk anti-symmetrisch zijn onder verwisseling van de spins en impulsen $\{\vec{p}_i,s_i\}$ en $\{\vec{q}_j,t_j\}$. De normering van $|\Phi\rangle$ op 1 houdt in

$$
\begin{aligned}
1 = \langle\Phi|\Phi\rangle = |f_0|^2 &+ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{m}\sum_{s_i=\pm1/2}\int d^3\vec{p}_i\,\prod_{j=1}^{n}\sum_{t_j=\pm1/2}\int d^3\vec{q}_j \\
&\times|f(\vec{p}_1,s_1\cdots\vec{p}_m,s_m)|^2\,|g(\vec{q}_1,t_1\cdots\vec{q}_n,t_n)|^2
\end{aligned}
\tag{5.60}
$$

De vier-impuls, de heliciteit en de lading kunnen weer als volgt worden geschreven

$$
\begin{aligned}
\hat{P}^\mu &= \sum_s\int d^3\vec{p}\,p^\mu\,\Big(\hat{b}^\dagger(\vec{p},s)\,\hat{b}(\vec{p},s)+\hat{d}(\vec{p},s)\,\hat{d}^\dagger(\vec{p},s)\Big) \\
\hat{W} &= \frac{\hbar}{2}\sum_s\int d^3\vec{p}\,(2s)\,|\vec{p}|\,\Big(\hat{b}^\dagger(\vec{p},s)\,\hat{b}(\vec{p},s)+\hat{d}(\vec{p},s)\,\hat{d}^\dagger(\vec{p},s)\Big) \\
\hat{Q} &= e\sum_s\int d^3\vec{p}\,\Big(\hat{b}^\dagger(\vec{p},s)\,\hat{b}(\vec{p},s)-\hat{d}(\vec{p},s)\,\hat{d}^\dagger(\vec{p},s)\Big) \qquad e<0
\end{aligned}
\tag{5.61}
$$

Dit kan weer om-geschreven worden in

$$\hat{P}^\mu = \sum_s \int d^3\vec{p}\, p^\mu \left(\hat{N}_-(\vec{p},s) + \hat{N}_+(\vec{p},s) - \delta^{(3)}(0)\right)$$

$$\hat{W} = \frac{\hbar}{2} \sum_s \int d^3\vec{p}\, (2s)\, |\vec{p}| \left(\hat{N}_-(\vec{p},s) - \hat{N}_+(\vec{p},s) + \delta^{(3)}(0)\right)$$

$$\hat{Q} = e \sum_s \int d^3\vec{p} \left(\hat{N}_-(\vec{p},s) - \hat{N}_+(\vec{p},s) + \delta^{(3)}(0)\right) \tag{5.62}$$

Net als in het geval van de bosonische operatoren moeten wij voor de fermionen alle operatoren normaal ordenen. Definieer

$$: \hat{b}(\vec{p},s)\, \hat{b}^\dagger(\vec{p},s) := -\hat{b}^\dagger(\vec{p},s)\, \hat{b}(\vec{p},s)$$

$$: \hat{d}(\vec{p},s)\, \hat{d}^\dagger(\vec{p},s) := -\hat{d}^\dagger(\vec{p},s)\, \hat{d}(\vec{p},s) \tag{5.63}$$

Het minteken komt van de anti-commutator. Normale ordening elimineert de term $\delta^{(3)}(0)$. Bijvoorbeeld

$$\hat{b}(\vec{p},s)\, \hat{b}^\dagger(\vec{p},s) = \{\hat{b}(\vec{p},s), \hat{b}^\dagger(\vec{p},s)\} - \hat{b}^\dagger(\vec{p},s)\, \hat{b}(\vec{p},s)$$

$$= \delta^{(3)}(0) - \hat{b}^\dagger(\vec{p},s)\, \hat{b}(\vec{p},s) \tag{5.64}$$

Hetzelfde geldt voor $\hat{d}(\vec{p},s)\, \hat{d}^\dagger(\vec{p},s)$. In het algemeen betekent dit dat voor een willekeurig product van creatie- en annihilatie-operatoren dat na normale ordening de creatie-operatoren links van de annihilatie-operatoren staan. Bovendien moet men rekening houden dat na een oneven aantal verwisselingen een extra minteken verschijnt.
Voorbeeld:

$$: \hat{b}_1\, \hat{d}_2\, \hat{d}_3^\dagger\, \hat{b}_4^\dagger := -\hat{b}_4^\dagger\, \hat{d}_3^\dagger\, \hat{b}_1\, \hat{d}_2 = \hat{b}_4^\dagger\, \hat{d}_3^\dagger\, \hat{d}_2\, \hat{b}_1 \tag{5.65}$$

Na normale ordening krijgen vergelijkingen in (5.62) de volgende vorm

$$: \hat{P}^\mu := \sum_s \int d^3\vec{p}\, p^\mu \left(\hat{N}_-(\vec{p},s) + \hat{N}_+(\vec{p},s)\right)$$

$$: \hat{W} := \frac{\hbar}{2} \sum_s \int d^3\vec{p}\, (2s)\, |\vec{p}| \left(\hat{N}_-(\vec{p},s) - \hat{N}_+(\vec{p},s)\right)$$

$$: \hat{Q} := e \sum_s \int d^3\vec{p} \left(\hat{N}_-(\vec{p},s) - \hat{N}_+(\vec{p},s)\right) = e\left(\hat{N}_- - \hat{N}_+\right) \tag{5.66}$$

Deze operatoren werken als volgt op de toestanden

$$: \hat{P}^\mu :\ |\vec{p}_1, s_1; \vec{p}_2, s_2; \cdots; \vec{p}_m, s_m; \vec{q}_1, t_1; \vec{q}_2, t_2; \cdots; \vec{q}_n, t_n\rangle$$

$$= \Big\{ \sum_{i=1}^{m} p_i^\mu + \sum_{j=1}^{n} q_j^\mu \Big\} \, |\vec{p}_1, s_1; \vec{p}_2, s_2; \cdots; \vec{p}_m, s_m; \vec{q}_1, t_1; \vec{q}_2, t_2; \cdots; \vec{q}_n, t_n\rangle$$

$$: \hat{W} : \; |\vec{p}_1, s_1; \vec{p}_2, s_2; \cdots; \vec{p}_m, s_m; \vec{q}_1, t_1; \vec{q}_2, t_2; \cdots; \vec{q}_n, t_n\rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2} \Big\{ \sum_{i=1}^{m} (2s_i)\, |\vec{p}_i| - \sum_{j=1}^{n} (2t_j)\, |\vec{q}_j| \Big\} \, |\vec{p}_1, s_1; \vec{p}_2, s_2; \cdots; \vec{p}_m, s_m; \vec{q}_1, t_1; \vec{q}_2, t_2; \cdots; \vec{q}_n, t_n\rangle$$

$$: \hat{Q} : \; |\vec{p}_1, s_1; \vec{p}_2, s_2; \cdots; \vec{p}_m, s_m; \vec{q}_1, t_1; \vec{q}_2, t_2; \cdots; \vec{q}_n, t_n\rangle$$

$$= e\,(m-n)\, |\vec{p}_1, s_1; \vec{p}_2, s_2; \cdots; \vec{p}_m, s_m; \vec{q}_1, t_1; \vec{q}_2, t_2; \cdots; \vec{q}_n, t_n\rangle \tag{5.67}$$

Verder kunnen wij weer afleiden

$$[: \hat{P}^\mu :, \hat{\psi}(\vec{x}, t)] = -i\,\hbar\,\partial^\mu\, \hat{\psi}(\vec{x}, t) = -\underline{p}^\mu\, \hat{\psi}(\vec{x}, t)$$

$$[: \hat{J}^{\mu\nu} :, \hat{\psi}(\vec{x}, t)] = -i\,\hbar\,\Big(x^\mu\,\partial^\nu - x^\nu\,\partial^\mu - \frac{i}{2}\,\sigma^{\mu\nu} \Big)\, \hat{\psi}(\vec{x}, t) = -\underline{M}^\mu\, \hat{\psi}(\vec{x}, t) \tag{5.68}$$

De ladingsoperator $: \hat{Q} :$ commuteert weer met de generatoren van de Poincaré-groep

$$[: \hat{Q} :, : \hat{P}^\mu :] = 0 \qquad [: \hat{Q} :, \hat{J}^{\mu\nu} :] = 0 \tag{5.69}$$

Tenslotte willen wij de samenhang tussen de spin en de statistiek van fermionen laten zien. Stel dat $\hat{\psi}$ en $\hat{\Pi}$ aan commutatie-relaties voldoen i.p.v. aan anti-commutatie-relaties dan voldoen $b, b^\dagger, d, d^\dagger$ aan commutatie-relaties. In dit geval ziet bijvoorbeeld de energie-operator $: \hat{H} :$ na normale ordening eruit als

$$: \hat{H} := c : P^0 := \sum_s \int d^3\vec{p}\, E\, \Big(b^\dagger(\vec{p}, s)\, b(\vec{p}, s) - d^\dagger(\vec{p}, s)\, d(\vec{p}, s) \Big) \tag{5.70}$$

De eigenwaarde voor de anti-fermionen wordt dan

$$: \hat{H} : \; |\vec{q}_1, t_1; \vec{q}_2, t_2; \cdots; \vec{q}_n, t_n\rangle = -\sum_{i=1}^{n} E_i\, |\vec{q}_1, t_1; \vec{q}_2, t_2; \cdots; \vec{q}_n, t_n\rangle \tag{5.71}$$

Aangezien $\sum_{i=1}^n E_i \to \infty$ voor $n \to \infty$ zijn de eigenwaarden van $: \hat{H} :$ naar beneden niet begrensd. Dit is onaanvaardbaar voor een kwantum-theorie waar de eis geldt dat de grondtoestand (hier het vacuüm) de laagste eigenwaarde heeft die bovendien nog eindig moet zijn. De conclusie is dat het spin half karakter van het Dirac-veld er toe leidt dat men anti-commutatie-relaties moet nemen om het veld te kwantiseren. Het zelfde geldt voor geheeltallige spin veld zoals het scalaire of elektromagnetische veld. Hier moet men commutatie-relaties nemen om het veld te kwantiseren voor dezelfde reden als hierboven namelijk het vermeiden van een energie-spectrum dat naar beneden onbegrensd is. Deze waarneming is een van de belangrijkste successen van de quantumveldentheorie namelijk de samenhang tussen spin en statistiek.

5.4 Kwantisatie van het elektromagnetische veld

Op de polarisatie-vectoren $\epsilon^\mu(\vec{k})$ na lijkt het elektromagnetische veld het meest op het reële scalaire veld $\phi(x)$. Laten wij de kwantisatie van het elektromagnetische veld eerst in de stralingsijk bekijken. In dit geval komt in dit veld alleen de fysische polarisaties voor. Het gekwantiseerde veld wordt

$$\hat{\vec{A}}(\vec{x},t) = \sum_\alpha \int d^3\vec{k}\, c \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \left[\hat{a}(\vec{k},\alpha)\, \vec{\epsilon}^{\,\alpha}(\vec{k})\, e^{-i\,kx} + \hat{a}^\dagger(\vec{k},\alpha)\, \vec{\epsilon}^{\,*\alpha}(\vec{k})\, e^{i\,kx}\right]$$

$$\alpha = 1,2 \quad \text{of} \quad \alpha = R, L \tag{5.72}$$

waarbij $\hat{a}^\dagger(\vec{k},\alpha)$ en $\hat{a}(\vec{k},\alpha)$ de creatie- en annihilatie-operatoren zijn die voldoen aan de relaties

$$[\hat{a}(\vec{k},\alpha), \hat{a}^\dagger(\vec{k}',\alpha')] = \delta_{\alpha\alpha'}\, \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')$$

$$[\hat{a}^\dagger(\vec{k},\alpha), \hat{a}^\dagger(\vec{k}',\alpha')] = 0$$

$$[\hat{a}(\vec{k},\alpha), \hat{a}(\vec{k}',\alpha')] = 0 \tag{5.73}$$

Het verband tussen de creatie- en annihilatie-operatoren van de lineaire ($\alpha = 1,2$) en circulaire polarisaties ($\alpha = R, L$) wordt gegeven door

$$\hat{a}(\vec{k},R) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\hat{a}(\vec{k},1) - i\,\hat{a}(\vec{k},2)\Big) \qquad \hat{a}(\vec{k},L) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\hat{a}(\vec{k},1) + i\,\hat{a}(\vec{k},2)\Big) \tag{5.74}$$

De canonieke commutatie-relaties zijn gelijk aan

$$[\hat{A}_i(\vec{x},t), \hat{\Pi}_j(\vec{x}',t)] = \frac{1}{c}\,[\hat{A}_i(\vec{x},t), \hat{E}_j(\vec{x}',t)] =$$

$$-i\,\hbar \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\, e^{-i\,\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\vec{k}|^2}\right)$$

$$[\hat{\Pi}_i(\vec{x},t), \hat{\Pi}_j(\vec{x}',t)] = 0$$

$$[\hat{A}_i(\vec{x},t), \hat{A}_j(\vec{x}',t)] = 0 \tag{5.75}$$

Merk op dat de commutator consistent is met de stralingsijk-conditie

$$\partial_k \hat{A}_k = \vec{\nabla}\cdot\hat{\vec{A}} = 0 \tag{5.76}$$

Aangezien de stralingsijk leidt tot fysische polarisaties van het elektromagnetische veld ontstaan alleen fysische toestanden (hier fotonen genoemd) in de veel-deeltjes-ruimte zodat deze een echte Hilbert-ruimte is. Deze toestand wordt genoteerd door

$$|\vec{k}_1,\alpha_1;\vec{k}_2,\alpha_2;\cdots;\vec{k}_n,\alpha_n\rangle \in \mathrm{H} \quad \text{met} \quad \alpha_i = R, L \tag{5.77}$$

Deze kan worden gecreëerd uit het vacuüm

$$|\vec{k}_1, \alpha_1; \vec{k}_2, \alpha_2; \cdots; \vec{k}_n, \alpha_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\, a^\dagger(\vec{k}_1, \alpha_1)\, a^\dagger(\vec{k}_2, \alpha_2) \cdots a^\dagger(\vec{k}_n, \alpha_n)\, |0\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle\vec{k}_1, \alpha_1; \vec{k}_2, \alpha_2; \cdots; \vec{k}_n, \alpha_n| = \frac{1}{\sqrt{n!}}\, \langle 0|\, a(\vec{k}_n, \alpha_n) \cdots a(\vec{k}_2, \alpha_2)\, a(\vec{k}_1, \alpha_1) \tag{5.78}$$

Omdat de creatie- en annihilatie-operatoren onderling commuteren zijn de toestanden weer symmetrisch onder verwisseling van impulsen en polarisaties. De creatie- en annihilatie-operatoren werken als volgt op de foton-toestanden

$$a^\dagger(\vec{k}, \alpha)\, |\vec{k}_1, \alpha_1; \cdots; \vec{k}_n, \alpha_n\rangle = \sqrt{n+1}\, |\vec{k}, \alpha; \vec{k}_1, \alpha_1; \cdots; \vec{k}_n, \alpha_n\rangle$$

$$a(\vec{k}, \alpha)\, |\vec{k}_1, \alpha_1; \cdots; \vec{k}_n, \alpha_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha} \delta_{\alpha\alpha_i}\, \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}_i)$$

$$\times |\vec{k}_1, \alpha_1; \cdots; \vec{k}_{i-1}, \alpha_{i-1}; \vec{k}_{i+1}, \alpha_{i+1}; \cdots; \vec{k}_n, \alpha_n\rangle \tag{5.79}$$

Vervolgens definiëren wij weer de getal-dichtheid-operator

$$\hat{N}(\vec{k}, \alpha) = a^\dagger(\vec{k}, \alpha)\, a(\vec{k}, \alpha) \tag{5.80}$$

met de getal-operator

$$\hat{N} = \sum_{\alpha} \int d^3\vec{k}\, \hat{N}(\vec{k}, \alpha) \tag{5.81}$$

De eerste werkt op de veel-fotonen-toestand als volgt

$$\hat{N}(\vec{k}, \alpha)\, |\vec{k}_1, \alpha_1; \cdots; \vec{k}_n, \alpha_n\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha} \delta_{\alpha\alpha_i}\, \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}_i)\, |\vec{k}_1, \alpha_1; \cdots; \vec{k}_n, \alpha_n\rangle \tag{5.82}$$

De normalisatie wordt

$$\langle\vec{k}_1, \alpha_1; \cdots; \vec{k}_m, \alpha_m | \vec{k}_1, \alpha_1; \cdots; \vec{k}_n, \alpha_n\rangle = \frac{\delta_{mn}}{n!}$$

$$\sum_{P(k_1', \alpha_1' \cdots k_n', \alpha_n')} \delta_{\alpha_1 \alpha_1'}\, \delta^{(3)}(\vec{k}_1 - \vec{k}_1') \cdots \delta_{\alpha_n \alpha_n'}\, \delta^{(3)}(\vec{k}_n - \vec{k}_n') \tag{5.83}$$

De meest algemene foton-toestand kan geschreven worden

$$|\Phi\rangle = f_0\, |0\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \sum_{\alpha_i = R,L} \int d^3\vec{k}_i\, f_n(\vec{k}_1, \alpha_1, \cdots \vec{k}_n, \alpha_n)\, |\vec{k}_1, \alpha_1; \cdots; \vec{k}_n, \alpha_n\rangle \tag{5.84}$$

met $f_n(\vec{k}_1, \alpha_1, \cdots \vec{k}_n, \alpha_n)$ symmetrisch onder verwisseling van impulsen en polarisaties. Verder is f_n een complexe functie en $|\Phi\rangle$ wordt genormeerd op 1.

$$1 = \langle\Phi||\Phi\rangle = |f_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \sum_{\alpha_i=R,L} \int d^3\vec{k}_i \, |f_n(\vec{k}_1, \alpha_1, \cdots \vec{k}_n, \alpha_n)|^2 \tag{5.85}$$

Na normale ordening kunnen wij $: \hat{P}^\mu :$ en $: \hat{\vec{W}} :$ (heliciteitsoperator) weer in creatie- en annihilatie-operatoren uitdrukken

$$: \hat{P}^\mu := \hbar \sum_{\alpha=R,L} \int d^3\vec{k} \, k^\mu \, \hat{N}(\vec{k}, \alpha)$$

$$: \hat{\vec{W}} := \hbar \sum_{\alpha=R,L} \int d^3\vec{k} \, s_\alpha \, \hat{\vec{k}} \, \hat{N}(\vec{k}, \alpha) \qquad s_R = 1 \quad s_L = -1 \tag{5.86}$$

Deze werken op de veel-foton-toestand als volgt

$$: \hat{P}^\mu : \, |\vec{k}_1, \alpha_1; \cdots; \vec{k}_n, \alpha_n\rangle = \hbar \Big\{ \sum_{i=1}^{n} k_i^\mu \Big\} |\vec{k}_1, \alpha_1; \cdots; \vec{k}_n, \alpha_n\rangle$$

$$: \hat{\vec{W}} : \, |\vec{k}_1, \alpha_1; \cdots; \vec{k}_n, \alpha_n\rangle = \hbar \Big\{ \sum_{i=1}^{n} s_{\alpha_i} \, \hat{\vec{k}}_i \Big\} |\vec{k}_1, \alpha_1; \cdots; \vec{k}_n, \alpha_n\rangle \tag{5.87}$$

Omdat de stralingsijk Lorentz-co-variantie breekt kunnen wij geen representatie van de impuls-moment-operator $: \hat{J}^{\mu\nu} :$ vinden. Dit kan echter wel als een Lorentz-covariante ijk gekozen wordt. Het elektromagnetische veld ziet er dan uit als

$$\hat{A}_\mu(x) = \sum_{\alpha=0}^{3} \int d^3\vec{k} \, c \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \left[\hat{a}(\vec{k}, \alpha) \, \epsilon_\mu^\alpha(\vec{k}) \, e^{-i\,kx} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}, \alpha) \, \epsilon_\mu^{*\alpha}(\vec{k}) \, e^{i\,kx}\right] \tag{5.88}$$

waarbij de polarisatie α naast de fysische $\alpha = 1, 2$ $(\alpha = R, L)$ ook de on-fysische waarden $\alpha = 0, 3$ aanneemt. De creatie- en annihilatie-operatoren voldoen aan de commutatie-relaties

$$[\hat{a}(\vec{k}, \alpha), \hat{a}^\dagger(\vec{k}', \alpha')] = -g^{\alpha\alpha'} \, \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}')$$

$$[\hat{a}^\dagger(\vec{k}, \alpha), \hat{a}^\dagger(\vec{k}', \alpha')] = 0$$

$$[\hat{a}(\vec{k}, \alpha), \hat{a}(\vec{k}', \alpha')] = 0 \tag{5.89}$$

Wij kunnen nu dezelfde procedure volgen voor de veel-deeltjes-toestanden als in het geval van de stralingsijk. Echter de toestand

$$|\vec{k}_1, \alpha_1; \vec{k}_2, \alpha_2; \cdots; \vec{k}_n, \alpha_n\rangle \notin \mathrm{H} \tag{5.90}$$

vanwege het feit dat α_i on-fysische waarden kan aannemen. In het bijzonder hebben de toestanden met $\alpha_i = 0$ een negatieve norm hetgeen onaanvaardbaar is. Bewijs

$$|\Phi\rangle = \int d^3\vec{k}\, f_1(\vec{k},0)\, |\vec{k},0\rangle = \int d^3\vec{k}\, f_1(\vec{k},0)\, \hat{a}^\dagger(\vec{k},0)\, |0\rangle \tag{5.91}$$

Hieruit volgt

$$\langle\Phi|\Phi\rangle = -\int d^3\vec{k}\, |f_1(\vec{k},0)|^2 < 0$$

$$\text{omdat}\quad [\hat{a}(\vec{k},0), \hat{a}^\dagger(\vec{k}',0)] = -\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}') \tag{5.92}$$

Echter er zijn nog andere problemen

1 De canonieke impuls

$$\hat{\Pi}^\sigma = \frac{1}{c}\, \hat{F}^{\sigma 0} \tag{5.93}$$

kunnen wij niet voor de canonieke kwantisatie gebruiken omdat $\Pi^0 = 0$

2 Uit $\hat{A}_\mu(\vec{x},t)$ (5.89) volgt

$$[\dot{\hat{A}}_\mu(\vec{x},t), \hat{A}_\nu(\vec{x}',t)] = i\,\hbar\, c^2\, g_{\mu\nu}\, \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') \tag{5.94}$$

Echter nu is aan de Lorentz-ijk-conditie $\partial^\nu \hat{A}_\nu = 0$ niet meer voldaan.

Om nu een Hilbert-ruimte te verkrijgen die alleen maar fysische toestanden bevat hebben Gupta en Bleuler de Lorentz-ijk-conditie op kwantum-niveau gewijzigd. De procedure verloopt als volgt. Eerst splits $\hat{A}_\mu$ in

$$\hat{A}_\mu(x) = \hat{A}^{(+)}_\mu(x) + \hat{A}^{(-)}_\mu(x)$$

$$\hat{A}^{(+)}_\mu(x) = \sum_{\alpha=0}^{3} \int d^3\vec{k}\, c\, \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\, \hat{a}(\vec{k},\alpha)\, \epsilon^\alpha_\mu(\vec{k})\, e^{-i\,kx}$$

$$\hat{A}^{(-)}_\mu(x) = \sum_{\alpha=0}^{3} \int d^3\vec{k}\, c\, \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\, \hat{a}^\dagger(\vec{k},\alpha)\, \epsilon^{*\alpha}_\mu(\vec{k})\, e^{i\,kx} \tag{5.95}$$

Vervolgens legt men de eis op dat

$$\partial^\mu\, \hat{A}^{(+)}_\mu(x)\, |\Phi_{phys}\rangle = 0 \tag{5.96}$$

voor elke fysische toestand Φ_{phys}. Het vacuüm voldoet hier automatisch aan. Bovenstaande eis impliceert

$$\sum_{\alpha=0}^{3} k^\mu\, \epsilon^{(\alpha)}_\mu(\vec{k})\, \hat{a}(\vec{k},\alpha)\, |\Phi_{phys}\rangle = 0 \tag{5.97}$$

Met behulp van

$$k^\mu \, \epsilon_\mu^{(\alpha)}(\vec{k}) = 0 \quad \text{voor} \quad \alpha = 1,2 \quad \text{of} \quad \alpha = R, L$$

$$\text{en} \quad k^\mu \, \epsilon_\mu^{(0)}(\vec{k}) = -k^\mu \, \epsilon_\mu^{(3)}(\vec{k}) \tag{5.98}$$

volgt uit (5.98) de conditie

$$\Big(\hat{a}(\vec{k},0) - \hat{a}(\vec{k},3)\Big) \, |\Phi_{phys}\rangle = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\langle\Phi_{phys}|\hat{a}^\dagger(\vec{k},0) \, \hat{a}(\vec{k},0)|\Phi_{phys}\rangle = \langle\Phi_{phys}|\hat{a}^\dagger(\vec{k},3) \, \hat{a}(\vec{k},3)|\Phi_{phys}\rangle \tag{5.99}$$

Men kan nu de impuls-operator als volgt schrijven

$$: \hat{P}^\nu := -\hbar \int d^3\vec{k} \, k^\nu \, g^{\lambda\sigma} \, \hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda) \, \hat{a}(\vec{k},\sigma) \tag{5.100}$$

met als verwachtings-waarde

$$\langle\Phi_{phys}| : \hat{P}^\nu : |\Phi_{phys}\rangle = \hbar \sum_{\alpha=R,L} \int d^3\vec{k} \, k^\nu \, \langle\Phi_{phys}|\hat{a}^\dagger(\vec{k},\alpha) \, \hat{a}(\vec{k},\alpha)|\Phi_{phys}\rangle \tag{5.101}$$

Dus in de verwachtings-waarde doen alleen de fysische polarisaties mee. Op kwantum-niveau zijn $: \hat{P}^\mu :$ en $: \hat{J}^{\mu\nu} :$ weer representaties van de Poincaré-algebra

$$[: \hat{P}^\mu :, \hat{A}^\nu] = -i \, \hbar \, \partial^\mu \, \hat{A}^\nu = -\underline{p}^\mu \, \hat{A}^\nu$$

$$[: \hat{J}^{\mu\nu} :, \hat{A}^\lambda] = -i \, \hbar \, \Big(x^\mu \, \partial^\nu - x^\nu \, \partial^\mu + I^{\mu\nu}\Big) \, \hat{A}^\lambda = -\underline{M}^{\mu\nu} \, \hat{A}^\lambda \tag{5.102}$$

Opmerking: De Hilbert-ruimte van veel-deeltjes-toestanden wordt ook wel Fock-ruimte genoemd omdat de eerste slechts symmetrische (geheeltallige spin deeltjes t.w. bosonen) of anti-symmetrische (halftallige spin deeltjes t.w. fermionen) toestanden mag bevatten.

6 Representaties van continue en discrete transformaties in de Hilbert-ruimte van veel-deeltjes-toestanden

6.1 Representaties van de Poincaré-groep

In het voorafgaande hoofdstuk hebben wij gezien dat de impuls-operator $:\hat{P}^\mu:$ en de impulsmomentoperator $:\hat{J}^{\mu\nu}:$ de Noetherladingen zijn van de Poincaré-groep. Deze operatoren commuteren met het kwantum-veld $\hat{\varphi}_r(x)$ als volgt

$$
\begin{aligned}
&[:\hat{P}^\mu:, \hat{\varphi}_r(x)] = -\underline{p}^\mu\,\hat{\varphi}_r(x) \\
&[:\hat{J}^{\mu\nu}:, \hat{\varphi}_r(x)] = -\underline{M}^{\mu\nu}\,\hat{\varphi}_r(x) \\
&\text{met}\quad \underline{p}^\mu = i\,\hbar\,\partial^\mu \qquad \underline{M}^{\mu\nu} = i\,\hbar\left(x^\mu\,\partial^\nu - x^\nu\,\partial^\mu + s^{\mu\nu}\right)
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

In het vervolg nemen wij aan dat alle operatoren normaal geordend zijn en wordt $:\cdots:$ weggelaten. Hieruit volgt dat $:\hat{P}^\mu:$ en $-:\hat{J}^{\mu\nu}:$ representaties van de Poincaré-algebra zijn. Bewijs: gebruik de Jacobi-identiteit

$$
\begin{aligned}
&[[\hat{P}^\mu, \hat{J}^{\rho\sigma}], \hat{\varphi}_r(x)] = [[\hat{P}^\mu, [\hat{J}^{\rho\sigma}, \hat{\varphi}_r(x)]] - [\hat{J}^{\rho\sigma}, [\hat{P}^\mu, \hat{\varphi}_r(x)]] \\
&= -\hbar^2\,\partial^\mu\left\{\left(x^\rho\,\partial^\sigma - x^\sigma\,\partial^\rho + s^{\rho\sigma}\right)\hat{\varphi}_r(x)\right\} \\
&+\hbar^2\left(x^\rho\,\partial^\sigma - x^\sigma\,\partial^\rho + s^{\rho\sigma}\right)\partial^\mu\,\hat{\varphi}_r(x) \\
&= -i\,\hbar\,[g^{\mu\rho}\,\hat{P}^\sigma - g^{\mu\sigma}\,\hat{P}^\rho, \hat{\varphi}_r(x)] \\
&\Rightarrow\quad [\hat{P}^\mu, -\hat{J}^{\rho\sigma}] = i\,\hbar\left(g^{\mu\rho}\,\hat{P}^\sigma - g^{\mu\sigma}\,\hat{P}^\rho\right)
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

Op analoge wijze kan men laten zien

$$
\begin{aligned}
&[-\hat{J}^{\mu\nu}, -\hat{J}^{\rho\sigma}] = i\,\hbar\left(g^{\rho\nu}\,(-\hat{J}^{\mu\sigma}) - g^{\nu\sigma}\,(-\hat{J}^{\mu\rho}) - g^{\mu\rho}\,(-\hat{J}^{\nu\sigma}) + g^{\mu\sigma}\,(-\hat{J}^{\nu\rho})\right) \\
&[\hat{P}^\mu, \hat{P}^\nu] = 0
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

Merk op dat $\hat{P}^\mu$ en $-\hat{J}^{\mu\nu}$ hermitische operatoren zijn Een element van de homogene Lorentzgroep $L_+^\uparrow = SO(3,1)$ wordt gegeven door

$$
\hat{U}(\Lambda) = \exp\left(-i\,\frac{\omega^{\alpha\beta}}{\hbar}\,\hat{J}_{\alpha\beta}\right) \qquad \Lambda(\omega) = \exp\left(\omega^{\alpha\beta}\,I_{\alpha\beta}\right)
\tag{6.4}
$$

$\hat{U}(\Lambda)$ is een unitaire operator omdat $\hat{J}_{\alpha\beta}$ hermitisch is.

$$
\hat{U}^\dagger(\Lambda) = \hat{U}^{-1}(\Lambda) = \exp\left(i\,\frac{\omega^{\alpha\beta}}{\hbar}\,\hat{J}_{\alpha\beta}\right)
\tag{6.5}
$$

Het kwantum-veld transformeert onder $SO(3,1)$ als

$$\hat{U}(\Lambda)\,\hat{\varphi}_r(x)\,\hat{U}(\Lambda)^\dagger = S(\Lambda)_{rs}\,\hat{\varphi}_s(\Lambda^{-1}\,x) = \hat{\varphi}'_r(x) \quad \text{met} \quad S(\Lambda) = \exp\Big(-\omega^{\alpha\beta}\,s_{\alpha\beta}\Big) \tag{6.6}$$

Bewijs: neem $\omega^{\alpha\beta}$ infinitesimaal en ontwikkel $\hat{U}(\Lambda)$ tot op eerste orde in ω

$$\left(1 - i\,\frac{\omega^{\alpha\beta}}{\hbar}\,\hat{J}_{\alpha\beta}\right)\,\hat{\varphi}_r(x)\,\left(1 + i\,\frac{\omega^{\alpha\beta}}{\hbar}\,\hat{J}_{\alpha\beta}\right) = \hat{\varphi}_r(x) - i\,\frac{\omega^{\alpha\beta}}{\hbar}\,[\hat{J}_{\alpha\beta}, \hat{\varphi}_r(x)]$$

$$= \Big\{\delta_{rs} - \omega^{\alpha\beta}\Big((x_\alpha\,\partial_\beta - x_\beta\,\partial_\alpha)\,\delta_{rs} + (s_{\alpha\beta})_{rs}\Big)\Big\}\,\hat{\varphi}_s(x)$$

$$= \left(1 + \frac{i\omega^{\alpha\beta}}{\hbar}\,M_{\alpha\beta}\right)_{rs}\,\hat{\varphi}_s(x) = \hat{\varphi}'_r(x) \tag{6.7}$$

$\hat{\varphi}'_r(x)$ hebben wij al een keer afgeleid zie (4.25). Een element van de translatie-groep T_4 wordt gegeven door

$$\hat{U}(a) = \exp\left(-i\frac{a^\mu}{\hbar}\,\hat{P}_\mu\right) \qquad x'^{\,\mu} = x^\mu + a^\mu \tag{6.8}$$

$\hat{U}(a)$ is unitair omdat $\hat{P}_\mu$ hermitisch is

$$\hat{U}^\dagger(a) = \hat{U}^{-1}(a) = \exp\left(i\frac{a^\mu}{\hbar}\,\hat{P}_\mu\right) \tag{6.9}$$

Het kwantum-veld transformeert onder translaties als

$$\hat{U}(a)\,\hat{\varphi}_r(x)\,\hat{U}^\dagger(a) = \hat{\varphi}_r(x-a) \tag{6.10}$$

Bewijs: neem a^μ infinitesimaal tot op orde a

$$\left(1 - i\frac{a^\mu}{\hbar}\,\hat{P}_\mu\right)\,\hat{\varphi}_r(x)\,\left(1 + i\frac{a^\mu}{\hbar}\,\hat{P}_\mu\right) = \hat{\varphi}_r(x) - i\frac{a^\mu}{\hbar}\,[\hat{P}_\mu, \hat{\varphi}_r(x)]$$

$$= (1 - a^\mu\,\partial_\mu)\;\hat{\varphi}_r(x) = \hat{\varphi}_r(x-a) = \hat{\varphi}'_r(x) \tag{6.11}$$

Voor $\hat{\varphi}'_r$ zie (4.27).

De meest algemene Poincaré-transformatie ziet eruit als

$$\hat{U}(\Lambda, a) = \exp\left(-i\,\frac{\omega^{\alpha\beta}}{\hbar}\,\hat{J}_{\alpha\beta}\right)\,\exp\left(-i\frac{a^\mu}{\hbar}\,\hat{P}_\mu\right)$$

$$\text{met} \quad \hat{U}(\Lambda, a)\,\hat{\varphi}_r(x)\,\hat{U}^\dagger(\Lambda, a) = \Big(S(\Lambda)\Big)_{rs}\,\hat{\varphi}_s(\Lambda^{-1}\,x - a) = \hat{\varphi}'_r(x) \tag{6.12}$$

Men kan de bovenstaande transformatie ook schrijven als

$$\hat{U}(\Lambda^{-1}, -a)\,\hat{\varphi}_r(x)\,\hat{U}^\dagger(\Lambda^{-1}, -a) = \Big(S(\Lambda^{-1})\Big)_{rs}\,\hat{\varphi}_s(\Lambda\,x + a)$$

$$= \Big(S(\Lambda^{-1})\Big)_{rs}\,\hat{\varphi}_s(x')$$

$$\text{met} \quad \hat{U}(\Lambda^{-1}, -a) = \exp\left(i\frac{a^\mu}{\hbar}\,\hat{P}_\mu\right)\,\exp\left(i\,\frac{\omega^{\alpha\beta}}{\hbar}\,\hat{J}_{\alpha\beta}\right) \tag{6.13}$$

Het wekt enigszins verbazing dat voor kwantum-velden de Lorentz-boosts geschreven kunnen worden via een unitaire representatie terwijl dit voor het klassieke veld een reële representatie moest zijn (zie (4.18)). Dit komt omdat de Poincaré-groep en de Lorentzgroep niet compacte groepen zijn. Dit kan men o.a. ook zien aan de toestanden in de Fock-ruimte, gegeven door $|\vec{p}, s\rangle$, die oneindig dimensionaal zijn omdat $\vec{p}$ elke waarde kan aannemen. Wij zullen nu bestuderen hoe de bovenstaande unitaire operatoren op spin half toestanden werken. Neem een één-deeltjes-toestand. en bereken de eigenwaarde van de translatie-operator

$$\hat{P}_\mu \, |\vec{p}, s\rangle = p_\mu \, |\vec{p}, s\rangle \quad \rightarrow \quad \hat{U}(x) \, |\vec{p}, s\rangle = \exp\left(-i \, \frac{x^\mu \, \hat{P}_\mu}{\hbar}\right) \, |\vec{p}, s\rangle = e^{-i\, x p} \, |\vec{p}, s\rangle \tag{6.14}$$

De heliciteitsoperator werkt als volgt

$$\hat{W} \, |\vec{p}, s\rangle = \hbar \, s \, |\vec{p}| \, |\vec{p}, s\rangle \quad \rightarrow \quad \hat{U}(\phi) \, |\vec{p}, s\rangle = \exp\left(i \, \frac{\phi \, \hat{W}}{\hbar}\right) \, |\vec{p}, s\rangle = e^{i\, s \, |\vec{p}| \, \phi} \, |\vec{p}, s\rangle$$

$$s = \pm \frac{1}{2} \tag{6.15}$$

6.2 Representaties van discrete symmetrie-transformaties: pariteit, ladingsconjugatie en tijds-omkeer

Deze representaties leien wij met behulp van de stelling van Wigner af.

Stelling van Wigner

Als A een symmetrie-transformatie is dan bestaat er een unitaire of een anti-unitaire operator $\hat{U}(A)$ zodat het volgende geldt:

$$\hat{U}(A) \, \hat{\varphi}_r(x) \, \hat{U}^{-1}(A) = \Big(S(A)\Big)_{rs} \, \hat{\varphi}_s(A^{-1} \, x) \tag{6.16}$$

waarbij $S(A)$ de representatie van A is voor het klassieke veld.

Deze stelling geldt zowel voor continue als discrete symmetrie-transformaties. Een voorbeeld hebben wij al hierboven gezien. In het geval van de Poincaré-groep is $\hat{U}(\Lambda, a)$ een unitaire operator. Het blijkt dat de pariteitstransformatie P en de ladingsconjugatie C door een unitaire operator kunnen worden voorgesteld. Echter de tijdsomkeertransformatie T wordt door een anti-unitaire operator voorgesteld. De laatste kan worden geschreven als $\hat{U} = \hat{U}_1 \, K$ waarbij $\hat{U}_1$ een unitaire operator is en K een anti-lineaire operator voorstelt. Merk op dat alleen $\hat{U}_1$ op de Hilbert-ruimte werkt terwijl K uitsluitend werkt op de complexe getallen. Vandaar dat wij het dakje op K weglaten. Als $|\Phi_i\rangle$ toestanden zijn in de Hilbert-ruimte H dan werkt een anti-lineaire operator als volgt

$$K \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, |\Phi_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* K \, |\Phi_i\rangle \quad \rightarrow \quad \hat{U} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, |\Phi_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* \hat{U} \, |\Phi_i\rangle \tag{6.17}$$

waarbij α_i een complex getal voorstelt. Verder geldt

$$\begin{aligned} K \, \alpha_i \, K^{-1} &= \alpha_i^* \quad \rightarrow \quad \hat{U} \, \alpha_i \, \hat{U}^{-1} = \alpha_i^* \\ K \, f(x) \, K^{-1} &= f^*(x) \quad \rightarrow \quad \hat{U} \, f(x) \, \hat{U}^{-1} = f^*(x) \end{aligned} \tag{6.18}$$

waarbij $f(x)$ een complexe functie is.

Pariteitstransformatie

A Het scalaire (complexe) veld.

De grootheden zijn:

$$\begin{aligned} A = P \qquad & S(P) = S_P = \pm 1 \\ S_P = 1 \quad (\text{scalair}) \quad & S_P = -1 \quad (\text{pseudo-scalair}) \end{aligned} \tag{6.19}$$

Onder pariteitsomkeer transformeert het (pseudo-) scalaire veld als

$$\begin{aligned} &\hat{U}(P) \, \phi(\vec{x}, t) \, \hat{U}^{-1}(P) = S_P \, \hat{\phi}(-\vec{x}, t) \quad \rightarrow \\ &\hat{U}(P) \, \hat{a}(\vec{p}) \, \hat{U}^{-1}(P) = S_P \, \hat{a}(-\vec{p}) \\ &\hat{U}(P) \, \hat{a}^\dagger(\vec{p}) \, \hat{U}^{-1}(P) = S_P \, \hat{a}^\dagger(-\vec{p}) \end{aligned} \tag{6.20}$$

$\hat{U}(P)$ is unitair en is te schrijven als

$$\hat{U}(P) = \exp\Big(i \, \hat{\mathcal{P}}\Big) \quad \text{met} \quad \hat{\mathcal{P}}^\dagger = \hat{\mathcal{P}} \tag{6.21}$$

Bepaling van $\hat{\mathcal{P}}$

$$\begin{aligned} &\exp\Big(i \, \hat{\mathcal{P}}\Big) \, \hat{a}(\vec{p}) \, \exp\Big(-i \, \hat{\mathcal{P}}\Big) = \hat{a}(\vec{p}) + i \, [\hat{\mathcal{P}}, \hat{a}(\vec{p})] + \frac{i^2}{2!} \, [\hat{\mathcal{P}}, [\hat{\mathcal{P}}, \hat{a}(\vec{p})]] \\ &+ \cdots \frac{i^n}{n!} \, [\hat{\mathcal{P}}, [\hat{\mathcal{P}}, [\hat{\mathcal{P}}, [\cdots [\hat{\mathcal{P}}, \hat{a}(\vec{p})]]] \cdots] + \cdots = S_P \, \hat{a}(-\vec{p}) \end{aligned} \tag{6.22}$$

Voor de oplossing proberen wij het volgende

$$[\hat{\mathcal{P}}, \hat{a}(\vec{p})] = \frac{\lambda}{2} \Big(\hat{a}(\vec{p}) - S_P \hat{a}(-\vec{p})\Big) \tag{6.23}$$

Bereken de volgende commutatoren

$$[\hat{\mathcal{P}},[\hat{\mathcal{P}},\hat{a}(\vec{p})]] = \frac{\lambda}{2}\,[\hat{\mathcal{P}},\hat{a}(\vec{p})] - S_P\,\frac{\lambda}{2}\,[\hat{\mathcal{P}},\hat{a}(-\vec{p})]$$

$$= \frac{\lambda^2}{2}\Big(\hat{a}(\vec{p}) - S_P\hat{a}(-\vec{p})\Big)$$

$$[\hat{\mathcal{P}},[\hat{\mathcal{P}},[\hat{\mathcal{P}},[\cdots[\hat{\mathcal{P}},\hat{a}(\vec{p})]]]\cdots] = \frac{\lambda^n}{2}\Big(\hat{a}(\vec{p}) - S_P\,\hat{a}(-\vec{p})\Big) \tag{6.24}$$

Uitdrukking (6.20) wordt

$$\hat{U}(P)\,\hat{a}(\vec{p})\,\hat{U}^{-1}(P) = \hat{a}(\vec{p}) + \frac{1}{2}\left(i\,\lambda + \frac{(i\,\lambda)^2}{2!} + \cdots + \frac{(i\,\lambda)^n}{n!}\right)$$

$$\times\Big(\hat{a}(\vec{p}) - S_P\,\hat{a}(-\vec{p})\Big) = \frac{1}{2}\,\Big(\hat{a}(\vec{p}) + S_P\,\hat{a}(-\vec{p})\Big)$$

$$+\frac{1}{2}\,e^{i\,\lambda}\,\Big(\hat{a}(\vec{p}) - S_P\,\hat{a}(-\vec{p})\Big) = S_P\,\hat{a}(\vec{p}) \tag{6.25}$$

Aan de bovenstaande gelijkheid is voldaan voor $\lambda = \pi$. De oplossing is

$$[\hat{\mathcal{P}},\hat{a}(\vec{p})] = \frac{\pi}{2}\,\Big(\hat{a}(\vec{p}) - S_P\,\hat{a}(-\vec{p})\Big) \quad \rightarrow$$

$$\hat{\mathcal{P}} = -\frac{\pi}{2}\,\int d^3\vec{p}\,\Big(\hat{a}^\dagger(\vec{p})\,\hat{a}(\vec{p}) - S_P\,\hat{a}^\dagger(\vec{p})\,\hat{a}(-\vec{p})\Big) \tag{6.26}$$

$\hat{\mathcal{P}}$ werkt op de (pseudo-) scalaire toestand als volgt

$$\hat{\mathcal{P}}\,|\vec{p}\rangle = -\frac{\pi}{2}\,\Big(|\vec{p}\rangle - S_P\,|-\vec{p}\rangle\Big)$$

$$\hat{\mathcal{P}}^2\,|\vec{p}\rangle = -2\,\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\,\Big(|\vec{p}\rangle - S_P\,|-\vec{p}\rangle\Big)$$

$$\hat{\mathcal{P}}^n\,|\vec{p}\rangle = -2^{n-1}\,\left(\frac{\pi}{2}\right)^n\,\Big(|\vec{p}\rangle - S_P\,|-\vec{p}\rangle\Big)$$

$$\rightarrow \hat{U}(P)\,|\vec{p}\rangle = \exp\Big(i\,\hat{\mathcal{P}}\Big)\,|\vec{p}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\,\hat{\mathcal{P}}^n|\vec{p}\rangle = |\vec{p}\rangle$$

$$+\frac{1}{2}\,\Big(e^{i\,\pi} - 1\Big)\,\Big(|\vec{p}\rangle - S_P\,|-\vec{p}\rangle\Big) = S_P|-\vec{p}\rangle \tag{6.27}$$

De pariteit van het scalaire deeltje is $+1$ en van het pseudo-scalaire deeltje is -1.

B <u>Dirac-veld</u>

De grootheden zijn

$$A = P \qquad S(P) = S_P = \gamma^0$$
$$\hat{U}(P)\,\hat{\psi}(\vec{x},t)\,\hat{U}^{-1}(P) = \gamma^0\,\hat{\psi}(-\vec{x},t) \tag{6.28}$$

Na invullen van het kwantum-veld krijgen wij de volgende vergelijking

$$\sum_s \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sqrt{\frac{mc^2}{E}} \Big(\hat{U}(P)\,\hat{b}(\vec{p},s)\,\hat{U}^{-1}(P)\,u(\vec{p},s)\,e^{-i\,(E\,t-\vec{p}\cdot\vec{x})/\hbar}$$
$$+\hat{U}(P)\,\hat{d}^\dagger(\vec{p},s)\,\hat{U}^{-1}(P)\,v(\vec{p},s)\,e^{i\,(E\,t-\vec{p}\cdot\vec{x})/\hbar}\Big)$$
$$= \sum_s \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sqrt{\frac{mc^2}{E}} \Big(\hat{b}(\vec{p},s)\,\gamma^0\,u(\vec{p},s)\,e^{-i\,(E\,t+\vec{p}\cdot\vec{x})/\hbar}$$
$$+\hat{d}^\dagger(\vec{p},s)\,\gamma^0\,v(\vec{p},s)\,e^{i\,(E\,t+\vec{p}\cdot\vec{x})/\hbar}\Big) \tag{6.29}$$

Vervang in de laatste uitdrukking $\vec{p} \to -\vec{p}$. Verder gebruik (4.36) zodat wij de volgende relaties krijgen

$$\hat{U}(P)\,\hat{b}(\vec{p},s)\,\hat{U}^{-1}(P) = \hat{b}(-\vec{p},s)$$
$$\to \quad \hat{U}(P)\,\hat{b}^\dagger(\vec{p},s)\,\hat{U}^{-1}(P) = \hat{b}^\dagger(-\vec{p},s)$$
$$\hat{U}(P)\,\hat{d}^\dagger(\vec{p},s)\,\hat{U}^{-1}(P) = -\hat{d}^\dagger(-\vec{p},s)$$
$$\to \quad \hat{U}(P)\,\hat{d}(\vec{p},s)\,\hat{U}^{-1}(P) = -\hat{d}(-\vec{p},s) \tag{6.30}$$

Waarbij gebruik gemaakt is van de unitariteit van $\hat{U}(P)$. Uit het bovenstaande kan men concluderen dat $\hat{b}(\vec{p},s)$ op dezelfde manier transformeert als $\hat{a}(\vec{p})$ voor het scalaire veld en dat $\hat{d}(\vec{p},s)$ transformeert op dezelfde wijze als voor het pseudo-scalaire veld. Hieruit volgt

fermionen

$$\hat{\mathcal{P}}_f = -\frac{\pi}{2} \sum_s \int d^3\vec{p}\,\Big(\hat{b}^\dagger(\vec{p},s)\,\hat{b}(\vec{p},s) - \hat{b}^\dagger(\vec{p},s)\,\hat{b}(-\vec{p},s)\Big)$$

anti-fermionen

$$\hat{\mathcal{P}}_{\bar{f}} = -\frac{\pi}{2} \sum_s \int d^3\vec{p}\,\Big(\hat{d}^\dagger(\vec{p},s)\,\hat{d}(\vec{p},s) + \hat{d}^\dagger(\vec{p},s)\,\hat{d}(-\vec{p},s)\Big) \tag{6.31}$$

aangezien

$$[\hat{\mathcal{P}}_f, \hat{\mathcal{P}}_{\bar{f}}] = 0 \tag{6.32}$$

kunnen wij schrijven

$$\hat{\mathcal{P}} = \hat{\mathcal{P}}_f + \hat{\mathcal{P}}_{\bar{f}} \to \hat{U}(P) = \exp\left(i\,\hat{\mathcal{P}}\right) = \exp\left(i\,\hat{\mathcal{P}}_f\right)\,\exp\left(i\,\hat{\mathcal{P}}_{\bar{f}}\right) \tag{6.33}$$

Op de één-deeltjes-toestand werkt de pariteitsoperator als

$$\hat{U}(P)\,|\vec{p}, s\rangle_f = |-\vec{p}, s\rangle_f \qquad \hat{U}(P)\,|\vec{q}, t\rangle_{\bar{f}} = -|-\vec{q}, t\rangle_{\bar{f}} \tag{6.34}$$

De pariteit van het fermion is $+1$ en van het anti-fermion -1.

C <u>Elektromagnetische veld</u>

De grootheden zijn

$$A = P \qquad S(P) = S_P = S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{U}(P)\,\hat{A}_\mu(\vec{x}, t)\,\hat{U}^{-1}(P) = S\,\hat{A}_\mu(-\vec{x}, t) \tag{6.35}$$

Laten wij ons beperken tot de stralingsijk zodat er slechts twee fysische polarisaties zijn. Uit het bovenstaande volgt na invullen van het kwantum-veld

$$\begin{aligned} &\hat{U}(P)\,\hat{a}(\vec{k}, 1)\,\hat{U}^{-1}(P) = \hat{a}(-\vec{k}, 1) \\ &\to \quad \hat{U}(P)\,\hat{a}^\dagger(\vec{k}, 1)\,\hat{U}^{-1}(P) = \hat{a}^\dagger(-\vec{k}, 1) \\ &\hat{U}(P)\,\hat{a}(\vec{k}, 2)\,\hat{U}^{-1}(P) = -\hat{a}(-\vec{k}, 2) \\ &\to \quad \hat{U}(P)\,\hat{a}^\dagger(\vec{k}, 2)\,\hat{U}^{-1}(P) = -\hat{a}^\dagger(-\vec{k}, 2) \end{aligned} \tag{6.36}$$

Deze relaties volgen uit (3.117). Voor de circulaire polarisaties krijgt men de relaties

$$\begin{aligned} &\hat{U}(P)\,\hat{a}(\vec{k}, R)\,\hat{U}^{-1}(P) = -\hat{a}(-\vec{k}, L) \\ &\to \quad \hat{U}(P)\,\hat{a}^\dagger(\vec{k}, R)\,\hat{U}^{-1}(P) = -\hat{a}^\dagger(-\vec{k}, L) \\ &\hat{U}(P)\,\hat{a}(\vec{k}, L)\,\hat{U}^{-1}(P) = -\hat{a}(-\vec{k}, R) \\ &\to \quad \hat{U}(P)\,\hat{a}^\dagger(\vec{k}, L)\,\hat{U}^{-1}(P) = -\hat{a}^\dagger(-\vec{k}, R) \end{aligned} \tag{6.37}$$

Uit het bovenstaande volgt dat $\hat{a}(\vec{k},1)$ dezelfde transformatie-eigenschappen heeft als $\hat{a}(\vec{p})$ voor het scalaire veld. Daarentegen transformeert $\hat{a}(\vec{k},2)$ hetzelfde als $\hat{a}(\vec{p})$ voor het pseudo-scalaire veld. Hieruit kunnen wij onmiddellijk de pariteitsoperator opschrijven

lineaire polarisaties

$$\hat{\mathcal{P}} = -\frac{\pi}{2}\int d^3\vec{k}\,\Big(\hat{a}^\dagger(\vec{k},1)\,\hat{a}(\vec{k},1) - \hat{a}^\dagger(\vec{k},1)\,\hat{a}(-\vec{k},1)$$

$$+\hat{a}^\dagger(\vec{k},2)\,\hat{a}(\vec{k},2) + \hat{a}^\dagger(\vec{k},2)\,\hat{a}(-\vec{k},2)\Big)$$

circulaire polarisaties

$$\hat{\mathcal{P}} = -\frac{\pi}{2}\int d^3\vec{k}\,\Big(\hat{a}^\dagger(\vec{k},R)\,\hat{a}(\vec{k},R) + \hat{a}^\dagger(\vec{k},L)\,\hat{a}(\vec{k},L)$$

$$+\hat{a}^\dagger(\vec{k},R)\,\hat{a}(-\vec{k},L) + \hat{a}^\dagger(\vec{k},L)\,\hat{a}(-\vec{k},R)\Big) \tag{6.38}$$

$\hat{\mathcal{P}}$ werkt op rechtshandig gepolariseerde fotonen als volgt

$$\hat{\mathcal{P}}\,|\vec{k},R\rangle = -\frac{\pi}{2}\Big(|\vec{k},R\rangle + |-\vec{k},L\rangle\Big)$$

$$\hat{\mathcal{P}}^2\,|\vec{k},R\rangle = -2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\Big(|\vec{k},R\rangle + |-\vec{k},L\rangle\Big)$$

$$\hat{\mathcal{P}}^n\,|\vec{k},R\rangle = -2^{n-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^n\Big(|\vec{k},R\rangle + |-\vec{k},L\rangle\Big) \tag{6.39}$$

waaruit volgt

$$\hat{U}(P)\,|\vec{k},R\rangle = \exp\Big(i\,\hat{\mathcal{P}}\Big)\,|\vec{k},R\rangle = |\vec{k},R\rangle$$

$$+\frac{1}{2}\,(e^{i\,\pi}-1\Big)\Big(|\vec{k},R\rangle + |-\vec{k},L\rangle\Big) = -|-\vec{k},L\rangle$$

$$\text{idem}\quad \hat{U}(P)\,|\vec{k},L\rangle = -|-\vec{k},R\rangle \tag{6.40}$$

De pariteit van het foton is -1.

Ladingsconjugatie

A Het scalaire (complexe) veld.

De grootheden zijn:

$$A = C \qquad S(C) = S_C = 1 \tag{6.41}$$

$$\hat{U}(C)\,\hat{\phi}(x)\,\hat{U}^{-1}(C) = \hat{\phi}^\dagger(x)$$

$$\hat{U}(C)\,\hat{\phi}^\dagger(x)\,\hat{U}^{-1}(C) = \hat{\phi}(x) \tag{6.42}$$

Uit (5.26) volgt

$$\hat{U}(C)\,\phi_1(x)\,\hat{U}^{-1}(C) = \hat{\phi}_1(x)$$

$$\hat{U}(C)\,\phi_2(x)\,\hat{U}^{-1}(C) = -\hat{\phi}_2(x) \tag{6.43}$$

omdat $\phi_i(x)$ hermitische velden zijn. Deze hebben reële eigenwaarden die of $+1$ of -1 kunnen zijn. Wij zullen deze velden respectievelijk type 1 of type 2 velden noemen. De creatie- en annihilatie-operatoren transformeren onder ladingsconjugatie als volgt

$$\hat{U}(C)\,\hat{a}_\pm(\vec{p})\,\hat{U}^{-1}(C) = \hat{a}_\mp(\vec{p})$$

$$\hat{U}(C)\,\hat{a}^\dagger_\pm(\vec{p})\,\hat{U}^{-1}(C) = \hat{a}^\dagger_\mp(\vec{p}) \tag{6.44}$$

hetgeen voor de reéle velden van type 1 en 2 impliceert

$$\hat{U}(C)\,\hat{a}_1(\vec{p})\,\hat{U}^{-1}(C) = \hat{a}_1(\vec{p})$$

$$\hat{U}(C)\,\hat{a}^\dagger_1(\vec{p})\,\hat{U}^{-1}(C) = \hat{a}^\dagger_1(\vec{p})$$

$$\hat{U}(C)\,\hat{a}_2(\vec{p})\,\hat{U}^{-1}(C) = -\hat{a}_2(\vec{p})$$

$$\hat{U}(C)\,\hat{a}^\dagger_2(\vec{p})\,\hat{U}^{-1}(C) = -\hat{a}^\dagger_2(\vec{p}) \tag{6.45}$$

$\hat{U}(C)$ is unitair en is te schrijven als

$$\hat{U}(C) = \exp\left(i\,\hat{\mathcal{C}}\right) \quad \text{met} \quad \hat{\mathcal{C}}^\dagger = \hat{\mathcal{C}} \tag{6.46}$$

Bepaling van $\hat{\mathcal{C}}$

$$\exp\left(i\,\hat{\mathcal{C}}\right)\hat{a}_j(\vec{p})\,\exp\left(-\,i\,\hat{\mathcal{C}}\right) = \hat{a}_j(\vec{p}) + i\,[\hat{\mathcal{C}},\hat{a}_j(\vec{p})] + \frac{i^2}{2!}\,[\hat{\mathcal{C}},[\hat{\mathcal{C}},\hat{a}_j(\vec{p})]]$$

$$+\cdots\frac{i^n}{n!}\,[\hat{\mathcal{C}},[\hat{\mathcal{C}},[\hat{\mathcal{C}},[\cdots[\hat{\mathcal{C}},\hat{a}_j(\vec{p})]]]\cdots] + \cdots = (-1)^{j-1}\hat{a}_j(\vec{p})$$

$$j = 1,2 \tag{6.47}$$

Voor de oplossing proberen wij het volgende

$$\hat{\mathcal{C}} = \pi\int d^3\vec{p}\,\hat{a}^\dagger_2(\vec{p})\,\hat{a}_2(\vec{p}) \tag{6.48}$$

Bereken de volgende commutatoren

$$[\hat{\mathcal{C}}, \hat{a}_1(\vec{p})] = 0 \quad \rightarrow \quad \exp\Big(i\,\hat{\mathcal{C}}\Big)\,\hat{a}_1(\vec{p})\,exp\Big(-i\,\hat{\mathcal{C}}\Big) = \hat{a}_1(\vec{p})$$

$$[\hat{\mathcal{C}}, [\hat{\mathcal{C}}, [\hat{\mathcal{C}}, [\cdots[\hat{\mathcal{C}}, \hat{a}_2(\vec{p})]]]\cdots] = (-\pi)^n\,\hat{a}_2(\vec{p}) \tag{6.49}$$

Uitdrukking (6.20) wordt

$$\hat{U}(C)\,\hat{a}_2(\vec{p})\,\hat{U}^{-1}(C) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\,\pi)^n}{n!}\,\hat{a}_2(\vec{p}) = e^{-i\,\pi}\,\hat{a}_2(\vec{p})$$
$$= -\hat{a}_2(\vec{p}) \tag{6.50}$$

$$\hat{N}_2(\vec{p}) = \hat{a}_2^\dagger(\vec{p})\,\hat{a}_2(\vec{p}) = \frac{1}{2}\Big(\hat{a}_-^\dagger(\vec{p})\,\hat{a}_-(\vec{p}) + \hat{a}_+^\dagger(\vec{p})\,\hat{a}_+(\vec{p}) - \hat{a}_-^\dagger(\vec{p})\,\hat{a}_+(\vec{p})$$
$$-\hat{a}_+^\dagger(\vec{p})\,\hat{a}_-(\vec{p})\Big)$$
$$\Rightarrow \quad \hat{\mathcal{C}} = \frac{\pi}{2}\int d^3\vec{p}\,\Big(\hat{a}_-^\dagger(\vec{p})\,\hat{a}_-(\vec{p}) + \hat{a}_+^\dagger(\vec{p})\,\hat{a}_+(\vec{p}) - \hat{a}_-^\dagger(\vec{p})\,\hat{a}_+(\vec{p})$$
$$-\hat{a}_+^\dagger(\vec{p})\,\hat{a}_-(\vec{p})\Big) \tag{6.51}$$

$\hat{\mathcal{C}}$ werkt op de positief geladen scalaire één-deeltjes-toestand als volgt

$$\hat{\mathcal{C}}\,|\vec{p}\rangle_+ = \frac{\pi}{2}\Big(|\vec{p}\rangle_+ - |\vec{p}\rangle_-\Big)$$
$$\hat{\mathcal{C}}^2\,|\vec{p}\rangle_+ = 2\,\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\,\Big(\vec{p}\rangle_+ - |\vec{p}\rangle_-\Big)$$
$$\hat{\mathcal{C}}^n\,|\vec{p}\rangle_+ = 2^{n-1}\,\left(\frac{\pi}{2}\right)^n\,\Big(|\vec{p}\rangle_+ - |\vec{p}\rangle_-\Big)$$
$$\rightarrow \hat{U}(C)\,|\vec{p}\rangle_+ = \exp\Big(i\,\hat{\mathcal{C}}\Big)\,|\vec{p}\rangle_+ = |\vec{p}\rangle_+ + \frac{1}{2}\Big(e^{i\,\pi} - 1\Big)\Big(|\vec{p}\rangle_+ - |\vec{p}\rangle_-\Big)$$
$$= |\vec{p}\rangle_-$$
$$\text{idem} \quad \hat{U}(C)\,|\vec{p}\rangle_- = |\vec{p}\rangle_+ \tag{6.52}$$

De ladingsconjugatie-operator transformeert deeltjes in anti-deeltjes. Deeltjes en anti-deeltjes hebben tegengestelde lading.

B Dirac-veld

De grootheden zijn

$$A = C \qquad S(C) = S_C = i\,\gamma^2\,\gamma^0$$

$$\hat{U}(C)\,\hat{\psi}(x)\,\hat{U}^{-1}(C) = S_C\,\bar{\hat{\psi}}^T(x) = S_C\,\gamma^0\,\hat{\psi}^*(x)$$

$$\hat{U}(C)\,\bar{\hat{\psi}}(x)\,\hat{U}^{-1}(C) = -\hat{\psi}^T(x)\,S_C^{-1} \tag{6.53}$$

Na invullen van het kwantum-veld krijgen wij de volgende vergelijking

$$\sum_s \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\sqrt{\frac{mc^2}{E}}\Big(\hat{U}(C)\,\hat{b}(\vec{p},s)\,\hat{U}^{-1}(C)\,u(\vec{p},s)\,e^{-i\,px/\hbar}$$
$$+\hat{U}(C)\,\hat{d}^\dagger(\vec{p},s)\,\hat{U}^{-1}(C)\,v(\vec{p},s)\,e^{i\,px/\hbar}\Big)$$
$$= \sum_s \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\sqrt{\frac{mc^2}{E}}\Big(\hat{d}(\vec{p},s)\,S_C\,\bar{v}^T(\vec{p},s)\,e^{-i\,px/\hbar}$$
$$+\hat{b}^\dagger(\vec{p},s)\,S_C\,\bar{u}^T(\vec{p},s)\,e^{i\,px/\hbar}\Big) \tag{6.54}$$

Gebruik (4.55) zodat wij de volgende relaties krijgen

$$\hat{U}(C)\,\hat{b}(\vec{p},s)\,\hat{U}^{-1}(C) = (-1)^{s-1/2}\,\hat{d}(\vec{p},s) = e^{i\,\alpha(\vec{p},s)}\,\hat{d}(\vec{p},s)$$
$$\rightarrow \quad \hat{U}(C)\,\hat{b}^\dagger(\vec{p},s)\,\hat{U}^{-1}(C) = (-1)^{s-1/2}\,\hat{d}^\dagger(\vec{p},s) = e^{i\,\alpha(\vec{p},s)}\,\hat{d}^\dagger(\vec{p},s)$$
$$\hat{U}(C)\,\hat{d}^\dagger(\vec{p},s)\,\hat{U}^{-1}(C) = (-1)^{s-1/2}\,\hat{b}^\dagger(\vec{p},s) = e^{i\,\alpha(\vec{p},s)}\,\hat{b}^\dagger(\vec{p},s)$$
$$\rightarrow \quad \hat{U}(C)\,\hat{d}(\vec{p},s)\,\hat{U}^{-1}(C) = (-1)^{s-1/2}\,\hat{b}(\vec{p},s) = e^{i\,\alpha(\vec{p},s)}\,\hat{b}(\vec{p},s) \tag{6.55}$$

De fase-factor is zo gekozen dat

$$\alpha(\vec{p},s) = \pi\left(s - \frac{1}{2}\right) \tag{6.56}$$

Waarbij gebruik gemaakt is van de unitariteit van $\hat{U}(C)$. De laatste wordt opgesplitst in de volgende twee operatoren

$$\hat{U}(C) = \hat{U}''(C)\,\hat{U}'(C)$$
$$\text{met} \quad \hat{U}''^{\dagger}(C) = U''^{-1}(C) \qquad \hat{U}'^{\dagger}(C) = U'^{-1}(C) \tag{6.57}$$

$\hat{U}'(C)$ is zodanig gekozen dat

$$\hat{U}'(C)\,\hat{b}(\vec{p},s)\,U'^{-1}(C) = e^{i\,\alpha(\vec{p},s)}\,\hat{b}(\vec{p},s)$$
$$\hat{U}'(C)\,\hat{d}^\dagger(\vec{p},s)\,U'^{-1}(C) = e^{i\,\alpha(\vec{p},s)}\,\hat{d}^\dagger(\vec{p},s) \tag{6.58}$$

en $\hat{U}''(C)$ transformeert de creatie-en annihilatie-operatoren op de volgende manier

$$\hat{U}''(C)\,\hat{b}(\vec{p},s)\,U''^{-1}(C) = \hat{d}(\vec{p},s)$$

$$\hat{U}''(C)\,\hat{d}^\dagger(\vec{p},s)\,U''^{-1}(C) = \hat{b}^\dagger(\vec{p},s) \tag{6.59}$$

Uit het bovenstaande kan men concluderen dat $\hat{b}(\vec{p},s)$ en $\hat{d}(\vec{p},s)$ op dezelfde wijze transformeren als respectievelijk $\hat{a}_-(\vec{p})$ en $\hat{a}_+(\vec{p})$ voor het complexe scalaire veld. De operator $\hat{U}'(C)$ ziet eruit als

$$\hat{U}'(C) = \exp\left(i\,\hat{\mathcal{C}}'\right) \quad \text{met}$$

$$\hat{\mathcal{C}}' = -\sum_s \int d^3\vec{p}\,\alpha(\vec{p},s)\left[\hat{N}_-(\vec{p},s) - \hat{N}_+(\vec{p},s)\right] \tag{6.60}$$

en $\hat{U}''(C)$ wordt gegeven door

$$\hat{U}''(C) = \exp\left(i\,\hat{\mathcal{C}}''\right) \quad \text{met}$$

$$\hat{\mathcal{C}}'' = \frac{\pi}{2}\sum_s \int d^3\vec{p}\Big(\hat{b}^\dagger(\vec{p},s)\,\hat{b}(\vec{p},s) + \hat{d}^\dagger(\vec{p},s)\,\hat{d}(\vec{p},s) - \hat{b}^\dagger(\vec{p},s)\,\hat{d}(\vec{p},s)$$

$$-\hat{d}^\dagger(\vec{p},s)\,\hat{b}(\vec{p},s)\Big) \tag{6.61}$$

$\hat{U}(C)$ werkt dan op de één-deeltjes-toestand als volgt

$$\hat{U}(C)\,|\vec{p},s\rangle_f = (-1)^{s-1/2}\,|\vec{p},s\rangle_{\bar{f}} \qquad \hat{U}(C)\,|\vec{q},t\rangle_{\bar{f}} = (-1)^{s-1/2}\,|\vec{q},t\rangle_f \tag{6.62}$$

Laten wij nu de ladingsconjugatie-eigenschappen van positronium bepalen. De amplitude van positronium (gebonden elektron-positron toestand) wordt gegeven door $\mathcal{F}(\vec{p},s;\vec{q},t)$ met $e^- = |\vec{p},s\rangle$ en $e^+ = |\vec{q},t\rangle$. De positronium-toestand wordt gegeven door

$$|\Psi_{e^+e^-}\rangle = \sum_{s,t}\int d^3\vec{p}\int d^3\vec{q}\,\mathcal{F}(\vec{p},s;\vec{q},t)\,\hat{b}^\dagger(\vec{p},s)\,\hat{d}^\dagger(\vec{q},t)\,|0\rangle \tag{6.63}$$

Onder ladingsconjugatie transformeert de toestand als (merk op dat $(-1)^{2s-1} = 1$ voor $s = \pm 1/2$)

$$\hat{U}(C)\,|\Psi_{e^+e^-}\rangle = \sum_{s,t}\int d^3\vec{p}\int d^3\vec{q}\,\mathcal{F}(\vec{p},s;\vec{q},t)\,\hat{U}(C)\,\hat{b}^\dagger(\vec{p},s)\,\hat{U}^{-1}(C)$$

$$\hat{U}(C)\,\hat{d}^\dagger(\vec{q},t)\,U^{-1}(C)\,|0\rangle = \sum_{s,t}\int d^3\vec{p}\int d^3\vec{q}\,\mathcal{F}(\vec{p},s;\vec{q},t)\,\hat{d}^\dagger(\vec{p},s)$$

$$\hat{b}^\dagger(\vec{q},t)\,|0\rangle = -\sum_{s,t}\int d^3\vec{p}\int d^3\vec{q}\,\mathcal{F}(\vec{p},s;\vec{q},t)\,\hat{b}^\dagger(\vec{q},t)\,\hat{d}^\dagger(\vec{p},s)\,|0\rangle$$

$$= -\sum_{s,t}\int d^3\vec{p}\int d^3\vec{q}\,\mathcal{F}(\vec{q},t;\vec{p},s)\,\hat{b}^\dagger(\vec{p},s)\,\hat{d}^\dagger(\vec{q},t)\,|0\rangle \tag{6.64}$$

In het geval dat de amplitude symmetrisch is

$$\mathcal{F}(\vec{p}, s; \vec{q}, t) = \mathcal{F}(\vec{q}, t; \vec{p}, s) \tag{6.65}$$

wordt de eigenwaarde van $|\Psi_{e^+e^-}\rangle$ gelijk aan -1. Is daarentegen de amplitude anti-symmetrisch

$$\mathcal{F}(\vec{p}, s; \vec{q}, t) = -\mathcal{F}(\vec{q}, t; \vec{p}, s) \tag{6.66}$$

dan is de eigenwaarde van $|\Psi_{e^+e^-}\rangle$ gelijk aan 1. De kwantum-getallen van de amplitude worden aangeduid met ${}^{2S+1}L_J$ (S is de spin en L is het baanimpulsmoment). Verder geldt als $\mathcal{F}$ symmetrisch is onder verwisseling van s en t dan $S = 1$. Als $\mathcal{F}$ anti-symmetrisch is onder verwisseling van s en t dan geldt $S = 0$. Dit betekent dat voor $L = 0$ geldt dat $J = 1$ voor de symmetrische toestand en $J = 0$ voor de anti-symmetrische toestand ($J = L + S$). Onder ladingsconjugatie transformeren de twee toestanden als

$$\begin{aligned} &{}^3S_1 \quad \text{ortho-positronium} \quad \hat{U}(C)\,|\Psi_{e^+e^-}\rangle = -|\Psi_{e^+e^-}\rangle \\ &{}^1S_0 \quad \text{para-positronium} \quad \hat{U}(C)\,|\Psi_{e^+e^-}\rangle = |\Psi_{e^+e^-}\rangle \end{aligned} \tag{6.67}$$

Het eerste is een triplet en het tweede is een singlet-toestand. Voor algemene L heeft men

$$\mathcal{F}(\vec{p}, s; \vec{q}, t) = (-1)^l\,\mathcal{F}(\vec{q}, t; \vec{p}, s) \tag{6.68}$$

en geldt

$$\hat{U}(C)\,|\Psi_{e^+e^-}\rangle = (-1)^{l+s}\,|\Psi_{e^+e^-}\rangle \tag{6.69}$$

Evenzo geldt voor de pariteitsomkeer

$$\hat{U}(P)\,|\Psi_{e^+e^-}\rangle = (-1)^{l+1}\,|\Psi_{e^+e^-}\rangle \tag{6.70}$$

C <u>Elektromagnetische veld</u>

De grootheden zijn

$$\begin{aligned} &A = C \qquad S(C) = S_C = -1 \\ &\hat{U}(C)\,\hat{A}_\mu(x)\,U^{-1}(C) = -\hat{A}_\mu(x) \end{aligned} \tag{6.71}$$

Na invullen van het kwantum-veld krijgt men de volgende relaties tussen de creatie- en annihilatie-operatoren

$$\begin{aligned} &\hat{U}(C)\,\hat{a}(\vec{k}, \alpha)\,U^{-1}(C) = -\hat{a}(\vec{k}, \alpha) \\ &\hat{U}(C)\,\hat{a}^\dagger(\vec{k}, \alpha)\,U^{-1}(C) = -\hat{a}^\dagger(\vec{k}, \alpha) \end{aligned} \tag{6.72}$$

$\hat{a}(\vec{k},\alpha)$ transformeert zich op dezelfde manier als $\hat{a}_2(\vec{p})$ in het geval van het scalaire veld van type 2. Dus wij kunnen weer schrijven

$$\hat{U}(C) = \exp\left(i\,\hat{\mathcal{C}}\right) \quad \text{met} \quad \hat{\mathcal{C}} = \pi \sum_\alpha \int d^3\vec{k}\,\hat{N}(\vec{k},\alpha) = \pi\,\hat{N} \tag{6.73}$$

Een één-foton-toestand transformeert onder ladingsconjugatie als

$$\hat{U}(C)\,|\vec{k},\alpha\rangle = \exp\left(i\,\hat{\mathcal{C}}\right)|\vec{k},\alpha\rangle = \exp\left(i\,\pi\,\hat{N}\right)|\vec{k},\alpha\rangle = -|\vec{k},\alpha\rangle \tag{6.74}$$

Het foton is een eigen-toestand van de ladingsconjugatie-operator met eigenwaarde -1. De eigenwaarde van de multi-foton-toestand $|\vec{k}_1,\alpha_1;\cdots;\vec{k}_n,\alpha_n\rangle$ is $(-1)^n$. We moeten nu nog laten zien dat de transformatie zoals in (4.56) is vermeld correct is. Dit laatste volgt uit de transformatie-eigenschap van de elektromagnetische stroom $\hat{J}^\mu(x)$. Om de correct normaal geordende ladingsoperator $:\hat{Q}:$ te krijgen moet de stroom als volgt gedefinieerd worden

$$\hat{J}^\mu(x) =: \bar{\hat{\psi}}(x)\,\gamma^\mu\,\hat{\psi}(x) =: \bar{\hat{\psi}}_\alpha(x)\left(\gamma^\mu\right)_{\alpha\beta}\hat{\psi}_\beta(x) : \tag{6.75}$$

Onder ladingsconjugatie transformeert de stroom als (zie (6.53))

$$\begin{aligned}
&\hat{U}(C)\,\hat{J}^\mu(x)\,\hat{U}^{-1}(C) = \\
&\hat{U}(C)\ :\bar{\hat{\psi}}_\alpha(x)\,\hat{U}^{-1}(C)\left(\gamma^\mu\right)_{\alpha\beta}\hat{U}(C)\,\hat{\psi}_\beta(x) :\ \hat{U}^{-1}(C) \\
&= -:\hat{\psi}_\lambda(x)\left(S_C^{-1}\right)_{\lambda\alpha}\left(\gamma^\mu\right)_{\alpha\beta}\left(S_C\,\gamma^0\right)_{\beta\sigma}\hat{\psi}^*_\sigma(x) : \\
&= -:\hat{\psi}_\lambda(x)\left(S_C^{-1}\,\gamma^\mu\,S_C\,\gamma^0\right)_{\lambda\sigma}\hat{\psi}^*_\sigma(x) : \\
&=: \hat{\psi}_\lambda(x)\left(\gamma^{T,\mu}\,\gamma^{T,0}\right)_{\lambda\sigma}\hat{\psi}^*_\sigma(x) :=: \hat{\psi}_\lambda(x)\left(\gamma^0\,\gamma^\mu\right)_{\sigma\lambda}\hat{\psi}^*_\sigma(x) :
\end{aligned} \tag{6.76}$$

Voor het Dirac-veld anti-commuteren de creatie- en annihilatie-operatoren zodat binnen het normaal geordende product men kan scrijven

$$:\hat{\psi}_\lambda(x)\,\hat{\psi}^*_\sigma(x) := -:\hat{\psi}^*_\sigma(x)\,\hat{\psi}_\lambda(x) : \tag{6.77}$$

Dus geldt

$$\begin{aligned}
&\hat{U}(C)\,\hat{J}^\mu(x)\hat{U}^{-1}(C) = -:\hat{\psi}^*_\sigma(x)\left(\gamma^0\,\gamma^\mu\right)_{\sigma\lambda}\hat{\psi}_\lambda(x) := \\
&-:\bar{\hat{\psi}}_\sigma(x)\left(\gamma^\mu\right)_{\sigma\lambda}\hat{\psi}_\lambda(x) := -\hat{J}^\mu(x)
\end{aligned} \tag{6.78}$$

Wij zien nu dat de interactie-Lagrange-dichtheid.

$$\mathcal{L}_{int} = -:\hat{J}^\mu(x)\,\hat{A}_\mu(x) : \tag{6.79}$$

invariant is onder ladingsconjugatie. Dit is een eigenschap van de elektromagnetische wisselwerkingen.

Tijds-omkeer

A Het scalaire (complexe) veld.

De grootheden zijn:

$$A = T \qquad S(T) = S_T$$

$$S_T = 1 \quad \text{scalair veld} \quad S_T = -1 \quad \text{pseudo-scalair veld} \tag{6.80}$$

Onder tijds-omkeer transformeert het scalaire veld

$$\hat{U}(T)\,\hat{\phi}(\vec{x},t)\,\hat{U}^{-1}(T) = S_T\,\hat{\phi}(\vec{x},-t)$$

$$\rightarrow \quad \hat{U}(T)\,\hat{\Pi}(\vec{x},t)\,\hat{U}^{-1}(T) = -S_T\,\hat{\Pi}(\vec{x},-t)$$

$$\text{want} \quad \hat{\Pi}(\vec{x},t) = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial\,\hat{\phi}(\vec{x},t)}{\partial\,t} \tag{6.81}$$

Dit betekent dat de commutator als volgt transformeert

$$\hat{U}(T)\,[\hat{\phi}(\vec{x},t),\hat{\Pi}(\vec{x}',t)]\,\hat{U}^{-1}(T)$$

$$= [\hat{U}(T)\,\hat{\phi}(\vec{x},t)\,\hat{U}^{-1}(T),\hat{U}(T)\,\hat{\Pi}(\vec{x}',t)\,\hat{U}^{-1}(T)]$$

$$= -[\hat{\phi}(\vec{x},-t),\hat{\Pi}(\vec{x}',-t)] = -i\,\hbar\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') \tag{6.82}$$

Hieruit volgt

$$\hat{U}(T)\,i\,\hbar\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')\,\hat{U}^{-1}(T) = -i\,\hbar\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') \tag{6.83}$$

Dus is $\hat{U}(T)$ een anti-unitaire operator. Deze kan herschreven worden als

$$\hat{U}(T) = \hat{U}_1(T)\,K \quad \text{met} \quad \hat{U}_1^{\dagger}(T) = \hat{U}_1^{-1}(T) \tag{6.84}$$

waarbij $\hat{U}_1$ unitair en K anti-lineair is. Merk op dat K alleen werkt op complexe getallen en complexe functies terwijl $\hat{U}_1(T)$ alleen op operatoren en toestanden werkt. Na substitutie van het kwantum-veld (5.3) in (6.81)

$$\int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\,\frac{\hbar c}{\sqrt{2E}}\Big[\hat{U}(T)\,\hat{a}(\vec{p})\,e^{-i\,(Et-\vec{p}\cdot\vec{x})/\hbar}\,\hat{U}^{-1}(T)$$

$$+\hat{U}(T)\,\hat{a}^{\dagger}(\vec{p})\,e^{i\,(Et-\vec{p}\cdot\vec{x})/\hbar}\,\hat{U}^{-1}(T)\Big]$$

$$= S_T\int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\,\frac{\hbar c}{\sqrt{2E}}\Big[\hat{a}(\vec{p})\,e^{i\,(Et+\vec{p}\cdot\vec{x})/\hbar} + \hat{a}^{\dagger}(\vec{p})\,e^{-i\,(Et+\vec{p}\cdot\vec{x})/\hbar}\Big] \tag{6.85}$$

transformeren de creatie- en annihilatie-operatoren als volgt

$$\hat{U}(T)\,\hat{a}(\vec{p})\,e^{-i\,px/\hbar}\,\hat{U}^{-1}(P) = \hat{U}_1(T)\,K\,\hat{a}(\vec{p})\,e^{-i\,px/\hbar}\,K^{-1}\,\hat{U}_1^{-1}(T)$$
$$= \hat{U}_1(T)\,\hat{a}(\vec{p})\,K\,e^{-i\,px/\hbar}\,K^{-1}\,\hat{U}_1^{-1}(T) = \hat{U}_1(T)\,\hat{a}(\vec{p})\,\hat{U}_1^{-1}(T)\,e^{i\,px/\hbar} \tag{6.86}$$

Vervang in (6.84) $\vec{p}$ door $-\vec{p}$ dan

$$\hat{U}_1(T)\,\hat{a}(\vec{p})\,\hat{U}_1^{-1}(T) = S_T\,\hat{a}(-\vec{p})$$
$$\hat{U}_1(T)\,\hat{a}^\dagger(\vec{p})\,\hat{U}_1^{-1}(T) = S_T\,\hat{a}^\dagger(-\vec{p}) \tag{6.87}$$

Wij zien dat $\hat{U}_1(T)$ en $\hat{U}(P)$ de creatie- en annihilatie-operatoren op precies dezelfde wijze transformeren vandaar dat wij kunnen schrijven

$$\hat{U}_1(T) = \exp\Big(i\,\mathcal{T}\Big) \quad \text{met}$$
$$\mathcal{T} = -\frac{\pi}{2}\int d^3\vec{p}\,\Big(\hat{a}^\dagger(\vec{p})\,\hat{a}(\vec{p}) - S_T\,\hat{a}^\dagger(\vec{p})\,\hat{a}(-\vec{p})\Big) \tag{6.88}$$

De operatoren $\hat{U}_1(T)$ en $\hat{U}(T)$ werken op de één-deeltjes-toestand als volgt

$$\hat{U}_1(T)\,|\vec{p}\rangle \;=\; S_T\,|-\vec{p}\rangle \quad\rightarrow\quad \hat{U}(T)\,|\vec{p}\rangle = S_T\,\langle -\vec{p}| \tag{6.89}$$

Wij bestuderen nu de tijdsomkeeroperator voor complexe velden. Deze transformeren als

$$\hat{U}(T)\,\hat{\phi}(\vec{x},t)\,\hat{U}^{-1}(T) = S_T\,\hat{\phi}(\vec{x},-t)$$
$$\rightarrow \quad \hat{U}(T)\,\hat{\phi}^\dagger(\vec{x},t)\,\hat{U}^{-1}(T) = -S_T\,\hat{\phi}^\dagger(\vec{x},-t) \tag{6.90}$$

De reële velden (5.26) $\hat{\phi}_i(\vec{x},t)$ $(i=1,2)$ transformeren als

$$\hat{U}(T)\,\hat{\phi}_1(\vec{x},t)\,\hat{U}^{-1}(T) = S_T\,\hat{\phi}_1(\vec{x},-t)$$
$$\hat{U}(T)\,\hat{\phi}_2(\vec{x},t)\,\hat{U}^{-1}(T) = -S_T\,\hat{\phi}_2(\vec{x},-t) \tag{6.91}$$

Dit heeft als gevolg dat

$$\hat{U}_1(T)\,\hat{a}_i(\vec{p})\,\hat{U}_1^{-1}(T) = -S_T\,(-1)^i\,\hat{a}_i(-\vec{p})$$
$$\hat{U}_1(T)\,\hat{a}_i^\dagger(\vec{p})\,\hat{U}_1^{-1}(T) = -S_T\,(-1)^i\,\hat{a}_i^\dagger(-\vec{p}) \tag{6.92}$$

waaruit volgt

$$\hat{U}_1(T)\,\hat{a}_\pm(\vec{p})\,\hat{U}_1^{-1}(T) = S_T\,\hat{a}_\pm(-\vec{p})$$
$$\hat{U}_1(T)\,\hat{a}_\pm^\dagger(\vec{p})\,\hat{U}_1^{-1}(T) = S_T\,\hat{a}_\pm^\dagger(-\vec{p}) \tag{6.93}$$

Het blijkt dat $\hat{a}_\pm(\vec{p})$ hetzelfde transformeren als voor het reële (pseudo-) scalaire veld. Hieruit volgt

$$\mathcal{T} = -\frac{\pi}{2}\int d^3\vec{p}\,\Big(\hat{a}_+^\dagger(\vec{p})\,\hat{a}_+(\vec{p}) - S_T\,\hat{a}_+^\dagger(\vec{p})\,\hat{a}_+(-\vec{p}) + \hat{a}_-^\dagger(\vec{p})\,\hat{a}_-(\vec{p})$$

$$-S_T\,\hat{a}_-^\dagger(\vec{p})\,\hat{a}_-(-\vec{p})\Big) \tag{6.94}$$

B <u>Dirac-veld</u>

De grootheden zijn

$$A = T \qquad S(T) = S_T = i\,\gamma^1\gamma^3 = -\Sigma_2$$

$$\hat{U}(T)\,\hat{\psi}(\vec{x},t)\,\hat{U}^{-1}(T) = S_T\,\hat{\psi}(\vec{x},-t)$$

$$\hat{U}(T)\,\bar{\hat{\psi}}(\vec{x},t)\,\hat{U}^{-1}(T) = \bar{\hat{\psi}}(\vec{x},-t)\,S_T^{-1} \tag{6.95}$$

Na invullen van het kwantum-veld krijgen wij voor de linkerkant van (6.95)

$$\hat{U}(T)\,\hat{\psi}(\vec{x},t)\,\hat{U}^{-1}(T)$$

$$= \sum_s \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\sqrt{\frac{mc^2}{E}}\,\Big(\hat{U}_1(T)\,\hat{b}(\vec{p},s)\,\hat{U}_1^{-1}(T)\,u^*(\vec{p},s)\,e^{i\,px/\hbar}$$

$$+\hat{U}_1(T)\,\hat{d}^\dagger(\vec{p},s)\,\hat{U}_1^{-1}(T)\,v*(\vec{p},s)\,e^{-i\,px/\hbar}\Big) \tag{6.96}$$

en voor de rechterkant

$$S_T\,\hat{\psi}(\vec{x},-t) = \sum_s \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\sqrt{\frac{mc^2}{E}}\,\Big(\hat{b}(\vec{p},s)\,S_T\,u(\vec{p},s)\,e^{i\,(E\,t+\vec{p}\cdot\vec{x})/\hbar}$$

$$+\hat{d}^\dagger(\vec{p},s)\,S_T\,v(\vec{p},s)\,e^{-i\,(E\,t+\vec{p}\cdot\vec{x})/\hbar}\Big) \tag{6.97}$$

Vervang in de laatste uitdrukking $\vec{p}\to-\vec{p}$ en $s\to-s$

$$S_T\,\hat{\psi}(\vec{x},-t)$$

$$= \sum_s \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\sqrt{\frac{mc^2}{E}}\,\Big(\hat{b}(-\vec{p},-s)\,S_T\,u(-\vec{p},-s)\,e^{i\,px/\hbar}$$

$$+\hat{d}^\dagger(-\vec{p},-s)\,S_T\,v(-\vec{p},-s)\,e^{-i\,px/\hbar}\Big) \tag{6.98}$$

Vervolgen gebruik de relaties tussen de spinoren in (4.42)

$$S_T\,\hat{\psi}(\vec{x},-t)$$

$$= i \sum_s (-1)^{s-1/2} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \sqrt{\frac{mc^2}{E}} \Big(\hat{b}(-\vec{p},-s)\, u^*(\vec{p},s)\, e^{i\,px/\hbar}$$

$$-\hat{d}^\dagger(-\vec{p},-s)\, v^*(\vec{p},s)\, e^{-i\,px/\hbar}\Big) \tag{6.99}$$

zodat wij de volgende relaties krijgen

$$\hat{U}_1(T)\,\hat{b}(\vec{p},s)\,\hat{U}_1^{-1}(T) = i\,(-1)^{s-1/2}\,\hat{b}(-\vec{p},-s)$$

$$= e^{i\,\alpha_+(\vec{p},s)}\,\hat{b}(-\vec{p},-s)$$

$$\rightarrow \quad \hat{U}_1(T)\,\hat{b}^\dagger(\vec{p},s)\,\hat{U}_1^{-1}(T) = -i\,(-1)^{s-1/2}\,\hat{b}^\dagger(-\vec{p},-s)$$

$$= e^{-i\,\alpha_+(\vec{p},s)}\,\hat{b}^\dagger(-\vec{p},-s)$$

$$\hat{U}_1(T)\,\hat{d}^\dagger(\vec{p},s)\,\hat{U}_1^{-1}(T) = -i\,(-1)^{s-1/2}\,\hat{d}^\dagger(-\vec{p},-s)$$

$$= e^{i\,\alpha_-(\vec{p},s)}\,\hat{d}^\dagger(-\vec{p},-s)$$

$$\rightarrow \quad \hat{U}_1(T)\,\hat{d}(\vec{p},s)\,\hat{U}_1^{-1}(T) = i\,(-1)^{s-1/2}\,\hat{d}(-\vec{p},-s)$$

$$= e^{-i\,\alpha_-(\vec{p},s)}\,\hat{d}(-\vec{p},-s) \tag{6.100}$$

De fase-factoren zijn zo gekozen dat

$$\alpha_+(\vec{p},s) = -\alpha_+(\vec{p},s) = \frac{\pi}{2}\,(-1)^{s-1/2} \equiv \alpha(\vec{p},s) \tag{6.101}$$

Schrijf nu

$$\hat{U}_1(T) = \hat{U}_1''(T)\,\hat{U}_1'(T)$$

$$\text{met} \quad \hat{U}_1''^\dagger(T) = U_1''^{-1}(T) \qquad \hat{U}_1'^\dagger(T) = U_1'^{-1}(T) \tag{6.102}$$

$\hat{U}_1'(T)$ is zodanig gekozen dat

$$\hat{U}_1'(T)\,\hat{b}(\vec{p},s)\,U_1'^{-1}(T) = e^{i\,\alpha(\vec{p},s)}\,\hat{b}(\vec{p},s)$$

$$\hat{U}_1'(T)\,\hat{d}^\dagger(\vec{p},s)\,U_1'^{-1}(T) = e^{-i\,\alpha(\vec{p},s)}\,\hat{d}^\dagger(\vec{p},s) \tag{6.103}$$

en $\hat{U}_1''(T)$ transformeert de creatie-en annihilatie-operatoren op de volgende manier

$$\hat{U}_1''(T)\,\hat{b}(\vec{p},s)\,U_1''^{-1}(T) = \hat{b}(-\vec{p},-s)$$

$$\hat{U}_1''(T)\,\hat{d}^\dagger(\vec{p},s)\,U_1''^{-1}(T) = \hat{d}^\dagger(-\vec{p},-s) \tag{6.104}$$

De operator $\hat{U}_1'(T)$ ziet eruit als

$$\hat{U}_1'(T) = \exp\left(i\,\hat{\mathcal{T}}'\right) \quad \text{met}$$

$$\hat{\mathcal{T}}' = -\sum_s \int d^3\vec{p}\,\alpha(\vec{p},s)\left[\hat{N}_-(\vec{p},s) + \hat{N}_-(\vec{p},s)\right] \tag{6.105}$$

en $\hat{U}_1''(T)$ wordt gegeven door

$$\hat{U}_1''(T) = \exp\left(i\,\hat{\mathcal{T}}''\right) \quad \text{met}$$

$$\hat{\mathcal{T}}'' = -\frac{\pi}{2}\sum_s \int d^3\vec{p}\left[\hat{b}^\dagger(\vec{p},s)\,\hat{b}(\vec{p},s) - \hat{b}^\dagger(\vec{p},s)\,\hat{b}(-\vec{p},-s)\right.$$

$$\left. +\hat{d}^\dagger(\vec{p},s)\,\hat{d}(\vec{p},s) - \hat{d}^\dagger(\vec{p},s)\,\hat{d}(-\vec{p},-s)\right] \tag{6.106}$$

$\hat{U}_1(T)$ werkt dan op de één-deeltjes-toestand als volgt

$$\hat{U}_1(T)\,|\vec{p},s\rangle_f = -i(-1)^{s-1/2}\,|-\vec{p},-s\rangle_f$$

$$\hat{U}_1(T)\,|\vec{p},s\rangle_{\bar{f}} = -i(-1)^{s-1/2}\,|-\vec{p},-s\rangle_{\bar{f}} \tag{6.107}$$

Hieruit volgt dat de tijdsomkeeroperator op de één-deeltjes-toestand het volgende resultaat geeft

$$\hat{U}(T)\,|\vec{p},s\rangle_f = i(-1)^{s-1/2}\;{}_f\langle -\vec{p},-s|$$

$$\hat{U}(T)\,|\vec{p},s\rangle_{\bar{f}} = i(-1)^{s-1/2}\;{}_{\bar{f}}\langle -\vec{p},-s| \tag{6.108}$$

Transformatie-eigenschap van de stroom : $\hat{J}^\mu(\vec{x},t) :=: \bar{\hat{\psi}}(\vec{x},t)\,\gamma^\mu\,\hat{\psi}(\vec{x},t) :$ onder tijds-omkeer

$$\hat{U}(T)\ :\bar{\hat{\psi}}(\vec{x},t)\,\gamma^\mu\,\hat{\psi}(\vec{x},t):\ \hat{U}^{-1}(T)$$

$$= \hat{U}(T)\ :\bar{\hat{\psi}}(\vec{x},t)\,\hat{U}(T)\,\hat{U}^{-1}(T)\,\gamma^\mu\,\hat{U}(T)\,\hat{U}^{-1}(T)\,\hat{\psi}(\vec{x},t):$$

$$=: \bar{\hat{\psi}}(\vec{x},-t)\,S_T^{-1}\left(\gamma^\mu\right)^*S_T\,\hat{\psi}(\vec{x},-t):$$

$$= (-1)^{1+g_{\mu 0}}\ :\bar{\hat{\psi}}(\vec{x},-t)\,\gamma^\mu\,\hat{\psi}(\vec{x},-t): \tag{6.109}$$

Hierbij is gebruik gemaakt van (4.40). Dit geeft de relatie

$$S_T^{-1}\left(\gamma^\mu\right)^*S_T = \left(\gamma^\mu\right)^\dagger = (-1)^{1+g_{\mu 0}}\,\gamma^\mu \tag{6.110}$$

Het resultaat is

$$\hat{U}(T)\ :\hat{J}^{\mu}(\vec{x},t):\ \hat{U}^{-1}(T) = (-1)^{1+g_{\mu 0}}\ :\hat{J}^{\mu}(\vec{x},-t) :=: \hat{J}_{\mu}(\vec{x},-t): \tag{6.111}$$

C Elektromagnetisch veld

Als wij eisen dat de interactie-lagrangedichtheid in (6.79) tijdsomkeerinvariant is dan volgt uit (6.109)

$$\hat{U}(T)\,\hat{A}_{\mu}(\vec{x},t)\,\hat{U}^{-1}(T) = (-1)^{1+g_{\mu 0}}\,\hat{A}_{\mu}(\vec{x},-t) = \hat{A}^{\mu}(\vec{x},-t) \tag{6.112}$$

Dit is de tijdsomkeertransformatie voor het elektromagnetische veld. Uit het bovenstaande volgt

$$\hat{U}(T)\,\vec{\hat{A}}(\vec{x},t)\,\hat{U}^{-1}(T) = -\vec{\hat{A}}(\vec{x},-t) \tag{6.113}$$

In het geval van de stralingsijk, waar wij allen met de fysische polarisaties te maken hebben, impliceert de transformatie het volgende

$$\begin{aligned}&\hat{U}(T)\,\vec{\hat{A}}(\vec{x},t)\,\hat{U}^{-1}(T)\\ &= \sum_{\alpha=1,2}\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}}\,c\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\,\Big[\hat{U}_1(T)\,\hat{a}(\vec{k},\alpha)\,\hat{U}_1^{-1}(T)\,\vec{\epsilon}^{*(\alpha)}(\vec{k})\,e^{i\,kx}\\ &+\hat{U}_1(T)\,\hat{a}^{\dagger}(\vec{k},\alpha)\,\hat{U}_1^{-1}(T)\,\vec{\epsilon}^{(\alpha)}(\vec{k})\,e^{-i\,kx}\Big]\end{aligned} \tag{6.114}$$

$$\begin{aligned}-\vec{\hat{A}}(\vec{x},-t) &= -\sum_{\alpha=1,2}\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}}\,c\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\,\Big[\hat{a}(\vec{k},\alpha)\,\vec{\epsilon}^{(\alpha)}(\vec{k})\,e^{i\,(\omega t+\vec{k}\cdot\vec{x})}\\ &+\hat{a}^{\dagger}(\vec{k},\alpha)\,\vec{\epsilon}^{*(\alpha)}(\vec{k})\,e^{-i\,(\omega t+\vec{k}\cdot\vec{x})}\Big]\end{aligned} \tag{6.115}$$

Vervang $\vec{k}\to -\vec{k}$ dan wordt de laatste uitdrukking gelijk aan

$$\begin{aligned}-\vec{\hat{A}}(\vec{x},-t) &= -\sum_{\alpha=1,2}\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}}\,c\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\,\Big[\hat{a}(-\vec{k},\alpha)\,\vec{\epsilon}^{(\alpha)}(-\vec{k})\,e^{i\,kx}\\ &+\hat{a}^{\dagger}(-\vec{k},\alpha)\,\vec{\epsilon}^{*(\alpha)}(-\vec{k})\,e^{-i\,kx}\Big]\end{aligned} \tag{6.116}$$

Voor lineaire polarisaties zijn de polarisatie-vectoren reëel. Uit (3.117) volgt

$$\vec{\epsilon}^{(\alpha)}(-\vec{k}) = (-1)^{\alpha}\,\vec{\epsilon}^{(\alpha)}(\vec{k}) \qquad \alpha = 1,2 \tag{6.117}$$

Hieruit volgen de relaties tussen de creatie- en annihilatie-operatoren

$$\hat{U}_1(T)\,\hat{a}(\vec{k},\alpha)\,\hat{U}_1^{-1}(T) = (-1)^{\alpha-1}\,\hat{a}(-\vec{k},\alpha)$$

$$\hat{U}_1(T)\,\hat{a}^\dagger(\vec{k},\alpha)\,\hat{U}_1^{-1}(T) = (-1)^{\alpha-1}\,\hat{a}^\dagger(-\vec{k},\alpha) \tag{6.118}$$

Men kan deze relaties ook voor circulaire polarisaties afleiden. uit (3.121) volgt

$$\hat{U}_1(T)\,\hat{a}(\vec{k},R)\,\hat{U}_1^{-1}(T) = -\hat{a}(-\vec{k},L)$$

$$\hat{U}_1(T)\,\hat{a}^\dagger(\vec{k},R)\,\hat{U}_1^{-1}(T) = -\hat{a}^\dagger(-\vec{k},L)$$

$$\hat{U}_1(T)\,\hat{a}(\vec{k},L)\,\hat{U}_1^{-1}(T) = -\hat{a}(-\vec{k},R)$$

$$\hat{U}_1(T)\,\hat{a}^\dagger(\vec{k},L)\,\hat{U}_1^{-1}(T) = -\hat{a}^\dagger(-\vec{k},R) \tag{6.119}$$

Men ziet dat deze transformaties dezelfde zijn als die wij voor pariteits omkeer hebben afgeleid. $\hat{U}_1(T)$ wordt nu gegeven door

$$\hat{U}_1(T) = \exp\Big(i\,\mathcal{T}\Big) \quad \text{met}$$

$$\mathcal{T} = -\frac{\pi}{2}\int d^3\vec{k}\,\Big[\hat{a}^\dagger(\vec{k},R)\,\hat{a}(\vec{k},R) + \hat{a}^\dagger(\vec{k},R)\,\hat{a}(-\vec{k},L)$$

$$+\hat{a}^\dagger(\vec{k},L)\,\hat{a}(\vec{k},L) + \hat{a}^\dagger(\vec{k},L)\,\hat{a}(-\vec{k},R)\Big] \tag{6.120}$$

of in het geval van lineaire polarisaties

$$\mathcal{T} = -\frac{\pi}{2}\int d^3\vec{k}\,\Big[\hat{a}^\dagger(\vec{k},1)\,\hat{a}(\vec{k},1) - \hat{a}^\dagger(\vec{k},1)\,\hat{a}(-\vec{k},1) + \hat{a}^\dagger(\vec{k},2)\,\hat{a}(\vec{k},2)$$

$$+\hat{a}^\dagger(\vec{k},2)\,\hat{a}(-\vec{k},2)\Big] \tag{6.121}$$

$\hat{U}_1(T)$ werkt op de één-foton-toestand als

$$\hat{U}_1(T)\,|\vec{k},R\rangle = -|-\vec{k},L\rangle \qquad \hat{U}_1(T)\,|\vec{k},L\rangle = -|-\vec{k},R\rangle \tag{6.122}$$

Dit is hetzelfde als voor $\hat{U}(P)$ in (6.40). Het gevolgt is dat onder tijds-omkeer de één-foton-toestand getransformeerd wordt als

$$\hat{U}(T)\,|\vec{k},R\rangle = -\langle-\vec{k},L| \qquad \hat{U}(T)\,|\vec{k},L\rangle = -\langle-\vec{k},R| \tag{6.123}$$

Tenslotte geven wij nog de CPT-transformaties voor een één-deeltjestoestand

$$\hat{U}(T)\,\hat{U}(C)\,\hat{U}(P)\,|\vec{p}\rangle = \langle\vec{p}|$$

$$\hat{U}(T)\,\hat{U}(C)\,\hat{U}(P)\,|\vec{p},s\rangle_f = i\;{}_{\bar{f}}\langle\vec{p},-s|$$

$$\hat{U}(T)\,\hat{U}(C)\,\hat{U}(P)\,|\vec{p},s\rangle_{\bar{f}} = -i\;{}_f\langle\vec{p},-s|$$

$$\hat{U}(T)\,\hat{U}(C)\,\hat{U}(P)\,|\vec{k},\alpha\rangle = -\langle\vec{k},\alpha| \tag{6.124}$$

Merk op dat de polarisatie α niet van teken maar de spin wel van teken verandert onder CPT. Hieruit volgt dat de heliciteit niet veranderd. Verder geldt

$$\left(\hat{U}(T)\,\hat{U}(C)\,\hat{U}(P)\right)^2 |\vec{p}, s\rangle = |\vec{p}, s\rangle \tag{6.125}$$

voor willekeurig welke één-deeltjes-toestand.