# Opgaven algemene relativiteitstheorie - Prof. Pierre van Baal

*Verwijzingen naar Foster en Nightingale worden aangegeven met FN*

**1**) Algemene connecties, symmetrie en lokaal inetriaalstelsels

In zijn algemeenheid definieert een connectie op een Riemannsche ruimte hoe vectoren van punt tot punt parallel getransporteerd worden. Laat $P$ een punt zijn met coordinaten $x^a$ en $Q$ een naburig punt met coordinaten $x^a + \delta x^a$. Als $\lambda^a$ een vector is in $P$ worden de componenten van de parallel naar $Q$ verplaatste vector gegeven door $\lambda^a - \Gamma^a_{bc}(P)\lambda^b \delta x^c$. Parallel transport langs een curve $x^a(u)$ definieert een covariante afgeleide volgens

$$\frac{D\lambda^a(u)}{Du} = \frac{d\lambda^a(u)}{du} + \Gamma^a_{bc}(x(u))\lambda^b(u)\frac{dx^c(u)}{du}.$$

Essentieel voor het equivalentie principe is het bestaan van een locaal inertiaal stelsel waarin (voor een willekeurige euclidische ruimte $\eta_{ab} = \delta_{ab}$)

- $g_{ab} = \eta_{ab}$, waarbij $\eta_{ab} \equiv \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$.
- parallelverplaatsing triviaal is.

In deze opgave zullen we nagaan dat gegeven $\Gamma^a_{bc}$ er altijd zo'n locaal inertiaal stelsel te vinden is mits $\Gamma^a_{bc} = \Gamma^a_{cb}$.

a) Als we $\Gamma^a_{bc}$ definiëren in termen van de metriek $g_{ab}$ is de symmetrie evident. Dit is een speciale connectie, het zogeheten Christoffel symbool. Beschouw een coordinaten-transformatie $x^a \to x'^a(x) \equiv x^{a'}$ en leidt het transformatiegedrag van de algemene connectie $\Gamma^a_{bc}$ af uit de eis dat de covariante afgeleide als een vector transformeert. Laat zien dat als $\Gamma^a_{bc} \neq \Gamma^a_{cb}$, een locaal inertiaal stelsel niet kan bestaan.

b) Laat nu m.b.v. de in onderdeel a) gevonden transformatie eigenschap zien dat voor een symmetrische connectie er in ieder punt een transformatie naar een stelsel $x^{a'}$ mogelijk is, zodanig dat in dit punt $\Gamma^{a'}_{b'c'} = 0$.
*Hint*: kies voor het gemak coordinaten $x^a$ waarin het punt overeenkomt met $x = 0$ en beschouw de transformatie $x^a \to x^a + \frac{1}{2}A^a_{bc}x^b x^c$, met $A^a_{bc}$ constant.

**2**) Van equivalentie principe naar meetkunde

Uitgaande van het equivalentie principe, ofwel het bestaan van locale inertiaal stelsels, kunnen we alternatieve afleidingen geven voor parallel transport, covariante afgeleiden en geodetenvergelijkingen. Laat $x^{a'}$ telkens het locale inertiaal stelsel zijn. (*Hint*: gebruik opgave 1b)

a) Leid uit de eis dat in het inertiaal stelsel parallel transport gegeven wordt door $d\lambda^{a'}/ds = 0$ de vergelijking voor parallel transport in het oorspronkelijke stelsel af.

b) Vind de vergelijking (FN.2.53) voor de covariante afgeleide in het oorspronkelijke stelsel. Bedenk dat in het inertiaalstelsel geldt dat $\lambda^{a'}_{;b'} = \lambda^{a'}_{,b'}$.

c) Leid de geodetenvergelijking af uit

$$\frac{d^2 x^{a'}}{ds^2} = 0.$$

**3)** Torsie als het antisymmetrische deel van een connectie

We gaan uit van de algemene definitie van parallel transport, zoals gedefineerd in opg. 1.

a) We eisen van een covariante afgeleide dat deze de lengte van en de hoek tussen twee vectoren invariant laat. Laat zien dat uit de eis dat (zie ook par. FN.2.2 en FN.2.3.)

$$\frac{d(\lambda^a \mu_a)}{du} = \frac{D(\lambda^a \mu_a)}{Du} = \frac{D\lambda^a}{Du}\mu_a + \lambda^a \frac{D\mu_a}{Du},$$

voor willekeurige vectoren $\lambda^a(u)$ en $\mu_a(u)$ gedefinieerd langs een curve $x^a(u)$, volgt

$$\frac{D\mu_a(u)}{Du} = \frac{d\mu_a(u)}{du} - \Gamma^b_{ac}(x(u))\mu_b(u)\,\frac{dx^c(u)}{du},$$

*zonder* gebruik te maken van $\Gamma^b_{ac} = \Gamma^b_{ca}$.

b) $T^a_{bc} \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^a_{bc} - \Gamma^a_{cb})$ heet de torsie tensor. Laat met de in opg. 1a gevonden transformatie voor een algemene connectie zien dat de torsie tensor transformeert als een tensor van type (1,2). Het blijkt dat een algemene connectie geschreven kan worden als $\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc}) + T^a_{bc}$. Hoe volgt hieruit dat de torsie tensor van type (1,2) is?

c) Laat $\vec{OP} \equiv \delta_1 x^a$ en $\vec{OQ} \equiv \delta_2 x^a$ twee (raak-)vectoren zijn die gevormd worden door infinitesimale coordinaatverschillen met een punt $O$ op een gekromde ruimte. We passen nu parallel transport toe op de vector $\vec{OP}$, langs de verbingingslijn tussen $O$ en $Q$ (die voor de infinitesimale verplaatsing samenvalt met de raakvector $\vec{OQ}$). Dit geeft een vector $\vec{OP}'$ in het punt $Q$, met als eindpunt $P'$. Vergelijkbaar passen we parallel transport toe op de vector $\vec{OQ}$, langs de verbingingslijn tussen $O$ en $P$. Dit geeft een vector $\vec{OQ}'$ in het punt $P$, met als eindpunt $Q'$. Teken dit "parallelogram". Laat zien dat, tot in tweede orde in $\delta_1 x^a$ en $\delta_2 x^a$, $P' = Q'$ dan en slechts dan als de connectie symmetrisch is, $\Gamma^a_{bc} = \Gamma^a_{cb}$ (dus $T^a_{bc} = 0$, dit heet torsie vrij).

**4)** Fysische toepassing equivalentieprincipe

We geven nu een alternatieve afleiding van $g_{00} = 1+2V/c^2$ in een zwak zwaartekrachtsveld gebruikmakende van het equivalentieprincipe. Laat een lichtbron met constante hoeksnelheid $\omega$ rond een waarnemer draaien. Wat is de golflengte verandering voor deze waarnemer? Schrijf deze golflengte verandering nu in termen van de centrifugaal potentiaal $V_c = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2$. Beredeneer vervolgens dat uit het equivalentieprincipe volgt dat $g_{00} = 1 + 2V/c^2$ in een gravitatieveld.

**5)** Geodeten, connecties, kromming

Om meer vertrouwd te raken met gekromde ruimten en geodeten beschouwen we de 2-dimensionale bol en kegel ingebed in $\mathbf{R}^3$ met $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

bol: $x = a\sin\theta\cos\phi,\ y = a\sin\theta\sin\phi,\ z = a\cos\theta$

kegel: $x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi,\ z = r$.

De volgende vragen slaan steeds op beide gevallen (*Hint*: zie example FN.2.2.1 en problem FN.2.3).

a) Wat is de metrische tensor?

b) Bereken de Christoffel symbolen $\Gamma^a_{bc}$.

c) Bereken de *krommingstensor*

$$R^a_{bcd} \equiv \partial_c \Gamma^a_{bd} - \partial_d \Gamma^a_{bc} + \Gamma^e_{bd}\Gamma^a_{ec} - \Gamma^e_{bc}\Gamma^a_{ed}.$$

Bereken ook $R_{bd} \equiv R^a_{bad}$ en $R \equiv R^a_a$. Interpreteer de resultaten.

d) Wat zijn de geodetenvergelijkingen? Bepaal de algemene oplossingen.
*Hint voor de bol*: laat zien dat het impulsmoment behouden is, en gebruik dit om de geodeten te bepalen.
*Hint voor de kegel*: Als de kegel is opengeknipt, wat zijn dan de geodeten. Hoe komt dit overeen met wat U voor de kromming vond?

**6**) Holonomie op de bol
In deze opgave zullen we nagaan hoe de oriëntatie van een vector verandert, als deze parallel wordt getransporteerd langs een *gesloten* kromme in een gekromde ruimte. Zie ook example FN.3.3.1.

a) Wat zijn de vergelijkingen voor parallel transport op de bol? (Neem voor het gemak een bol met straal $r = 1$.)

b) Neem als beginvector $\vec{\lambda}(0) = \vec{e}_\theta$, *i.e.* de eenheidsvector in de $\theta$-richting. Hoe verandert $\vec{\lambda}(0)$ als deze getransporteerd wordt langs de curve met coördinaten $(\theta(t), \phi(t)) = (\pi/2, t)$ met $0 \leq t \leq 2\pi$?

c) Zelfde vraag voor de curve $\gamma$ opgebouwd uit 4 stukken,

$$\gamma = \gamma_4 \circ \gamma_3 \circ \gamma_2 \circ \gamma_1,$$

waarbij $\xi \circ \gamma$ staat voor de curve, waarbij we eerst langs $\gamma$ en vervolgens langs $\xi$ bewegen. De verschillende stukken worden gegeven door

$$\begin{array}{rclll} \gamma_1(t) & = & (\pi/2, t) & \text{voor} & 0 \leq t \leq t_1, \\ \gamma_2(t) & = & (\pi/2 - t, t_1) & \text{voor} & 0 \leq t \leq t_2, \\ \gamma_3(t) & = & (\pi/2 - t_2, t_1 - t) & \text{voor} & 0 \leq t \leq t_1, \\ \gamma_4(t) & = & (\pi/2 - t_2 + t, 0) & \text{voor} & 0 \leq t \leq t_2, \end{array}$$

met $0 \leq t_1 \leq 2\pi$, $0 \leq t_2 \leq \pi/2$.

d) Laat zien dat voor dit geval de hoek $\Delta\varphi$ waarover $\vec{\lambda}(0)$ gedraaid is, gelijk is aan

$$\Delta\varphi = \tfrac{1}{2} \int_A R,$$

met $A$ het oppervlak ingesloten door de curve $\gamma$.

e) Wat verwacht U voor de hoek waarover $\vec{\lambda}(0)$ gedraaid is, wanneer deze langs een *willekeurige* gesloten curve wordt getransporteerd?

f) Ga na dat de norm van $\vec{\lambda}(t)$ constant is.

g) Hoe verandert een *willekeurige* beginvector $\lambda^\mu(0)$, wanneer deze getransporteerd wordt langs een cirkel in het $\theta = \pi/2$ vlak in een ruimte met Schwarzschild metriek? Wat is het essentiële verschil met het voorbeeld van de bol?

h) Ga na dat ook nu de norm van $\lambda^\mu(t)$ behouden is.

**7)** Geodetische deviatie

a) Bestudeer paragraaf FN.3.4 en maak exercise FN.3.4.1.

b) De banen van twee deeltjes in het zwaartekrachtsveld van een massief object met massa $M$ worden gegeven door $\vec{x}(t)$ en $\vec{x}(t) + \vec{\xi}(t)$. Bereken $d^2\vec{\xi}/dt^2$ tot op eerste orde in $\vec{\xi}$, gebruikmakende van de *klassieke Newtonse* vergelijking. Beschouw nu de klassieke limiet $v \ll c$ voor verg. (FN.3.35) en laat zien dat

$$R^i_{0j0} = \frac{GM}{c^2|\vec{x}|^5}(3x^i x_j + \delta^i_j |\vec{x}|^2).$$

Dit is een aanwijzing dat de ruimte in de buurt van de aarde inderdaad gekromd is.

**8)** Variatieprincipes

In deze opgave zullen we Einstein's vergelijking uit het variatieprincipe afleiden. Het variatieprincipe komt neer op het vinden van de extrema van een zg. actiefunctionaal, bijv.

$$S[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(x(t), \dot{x}(t)),$$

waarbij $L(x(t), \dot{x}(t))$ de *Lagrangiaan* wordt genoemd. Zoals we in paragraaf FN.2.1 al hebben gezien wordt de eerste orde variatie van $S$ onder de verstoring $x(t) \to x(t) + \delta x(t)$, met $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$, gegeven door

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right\} \delta x(t).$$

Dus het variatieprincipe $\delta S = 0$ leidt tot de Euler-Lagrange bewegingsvergelijkingen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}.$$

Deze geven precies de geodetenvergelijkingen als we $L = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$ kiezen. In de oplossingen $x(t)$ van de geodetenvergelijking heet $t$ een *affiene* parameter.

a) Maak exercise FN.2.1.1. Verklaar de naam affiene parameter. Voor materiedeeltjes kunnen we de padlengte $s$ als affiene parameter nemen, voor fotonen is dit niet mogelijk. Neem nu een willekeurig geparametriseerde baan van een foton $x^\mu(u)$. Wat zou een voor de hand liggende keuze van affiene parameter voor de baan van een foton zijn?

b) Maak exercise FN.2.1.2. Laat zien dat $L = (|g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu|)^{\frac{1}{2}}$ ook de geodetenvergelijking geeft. Dus een geodeet is die verbinging tussen twee punten waarvoor de lengte een extremum is. Er kunnen meerdere extrema zijn (geef een voorbeeld voor de bol). Voor een ruimte met een positief definiete metriek is er altijd een kortste geodeet (wederom niet altijd uniek, geef weer een voorbeeld voor de bol).

Nu we hebben gezien hoe de geodetenvergelijking uit een variatie principe kan worden afgeleid, willen we hetzelfde doen voor de Einsteinvergelijkingen. De geodeten worden geparametriseerd door één parameter, de Einsteinvergelijkingen beschrijven *velden* en wordt dus geparametriseerd door de $x^\mu$. We moeten het variatieprincipe dus enigszins aanpassen. We schrijven nu de volgende actiefunctionaal:

$$S[g^{\mu\nu}] = \int d^4x\, \mathcal{L}[g^{\mu\nu}(x^\alpha), g^{\mu\nu}(x^\alpha)_{,\rho}, g^{\mu\nu}(x^\alpha)_{,\rho,\sigma}] \quad \text{met} \quad \mathcal{L} = \sqrt{-\det g_{\mu\nu}}\, R. \tag{1}$$

Acties voor (relativistische) *veldentheorieën* zoals gravitatie zijn altijd integralen over de hele tijdruimte. De actie kan altijd worden omgeschreven tot $S = \int dt\, L$ door coördinaten te kiezen en te definiëren $L = \int d^3x\, \mathcal{L}$. $L$ heet de *Lagrangiaan*, $\mathcal{L}$ is dus een *Lagrange-dichtheid*.

c) Laat zien dat $d^4x\sqrt{-\det g_{\mu\nu}}$ invariant is onder coördinaattransformaties.

Omdat ook $R$ een scalar is onder coördinaattransformaties, is bovenstaande actie dus een invariant. Dit heeft tot gevolg dat de Euler-Lagrangevergelijkingen covariant zullen zijn. We fixeren nu weer de velden op de randen en eisen dat de actie stationair is onder variaties

d) Laat zien dat we zo de volgende Euler-Lagrangevergelijkingen krijgen (de derde term in de vergelijking komt voort uit het feit dat de actie tweede orde afgeleiden bevat)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\alpha\beta}} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial {g^{\alpha\beta}}_{,\mu}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial {g^{\alpha\beta}}_{,\mu,\nu}}\right) = 0.$$

Het uitschrijven van deze vergelijking is een enorm karwei. I.p.v. deze vergelijking op te lossen definiëren we een onafhankelijk hulpveld $H^\alpha_{\beta\gamma}(x^\mu) = H^\alpha_{\gamma\beta}(x^\mu)$ en gebruiken we de Lagrangedichtheid

$$\mathcal{L} = \sqrt{-\det g_{\mu\nu}}\, g^{\alpha\beta}(H^\lambda_{\alpha\beta,\lambda} - H^\lambda_{\alpha\lambda,\beta} + H^\kappa_{\alpha\beta}H^\lambda_{\kappa\lambda} - H^\kappa_{\alpha\lambda}H^\lambda_{\kappa\beta}). \tag{2}$$

e) Laat zien dat de Euler-Lagrangevergelijkingen gegeven worden door

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\alpha\beta}} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial {g^{\alpha\beta}}_{,\mu}}\right) \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial H^\alpha_{\beta\gamma}} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial H^\alpha_{\beta\gamma,\mu}}\right).$$

Mag dat zo maar? Het antwoord op deze vraag is natuurlijk: nee, tenzij we kunnen laten zien dat de acties gedefiniëerd door (1) en (2) equivalent zijn.

f) Laat met behulp van één van de in e) gevonden vergelijkingen zien dat $H^\alpha_{\beta\gamma} \equiv \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$.

g) Laat nu zien dat de andere in e) gevonden Euler-Lagrangevergelijking dan (en slechts dan!) precies Einstein's veldvergelijking geeft.

Het afleiden van de Einsteinvergelijkingen uit (1) wordt *eerste orde formalisme* genoemd, de afleiding uit (2) heet *tweede orde formalisme*.

**9)** Birkhoff's stelling

a) In deze opgave nemen we $G = c = 1$.
Bewijs dat sferische symmetrie impliceert dat het lijnelement in geschikt gekozen coördinaten geschreven kan worden als

$$ds^2 = A(r,t)dt^2 - B(t,r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2).$$

Aanwijzingen:

(i) Definitie van sferische symmetrie: er bestaan coördinaten $(t, \vec{x})$ waarop de rotatiegroep $SO(3)$ werkt door $(t, \vec{x}) \to (t, U\vec{x})$, $U \in SO(3)$ ($3 \times 3$ orthogonale matrix met $\det U = 1$), zodat $ds^2$ invariant is onder deze actie van $SO(3)$ en het 2-dimensionale oppervlak $\vec{x}^2, t$ constant, ruimteachtig is ($ds^2 < 0$). Schrijf alle rotatie invarianten op, te vormen uit $x^\mu$ en $dx^\mu$ en bewijs dat de meest algemene vorm voor $ds^2$ gegeven wordt door:

$$ds^2 = Adt^2 - Bdr^2 - 2Cdrdt - Dr^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

waar $(r, \theta, \phi)$ de bolcoördinaten van $\vec{x}$ zijn. Wat kunt U van $A, B, C$ en $D$ zeggen, in het bijzonder van het teken?

(ii) Laat zien dat we $D = 1$ kunnen kiezen.

(iii) We willen nu natuurlijk $C = 0$ kunnen kiezen. Dit is niet altijd globaal mogelijk zoals te zien is aan de metriek van een roterende schijf (hoeksnelheid $\omega$)

$$ds^2 = (1 - \omega^2 r^2)dt^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2 - dz^2 - 2\omega r^2 d\phi dt.$$

Laat zien dat door

$$dt' = f(x^\mu)(dt - \frac{\omega r^2}{1 - \omega^2 r^2} d\phi)$$

te kiezen, de metriek tijdsorthogonaal wordt. Laat zien dat voor geen enkele keuze van de functie $f$ aan integreerbaarheidsvoorwaarden voldaan kan worden (*i.e.* dat $dt'$ geen gesloten differentiaal is). Dus $t'$ is niet globaal te definiëren. Hoe is langs een curve $x^\mu(q)$ de grootheid $t'(q)$ eenduidig te definiëren? Geef nu een zo eenvoudig mogelijk voorbeeld waaruit U ziet dat $t'$ niet globaal te definiëren is. Laat zien dat U wel $C = 0$ kunt kiezen door geschikte $t'(x)$ in te voeren, in het sferisch symmetrische geval.

b) Schrijf de Einsteinvergelijkingen voor het vacuum in termen van $A(r, t)$ en $B(r, t)$ en laat zien dat $A(r, t) = f(t)(1 - 2m/r)$ en $B(r, t) = (1 - 2m/r)^{-1}$, waarin $m$ een integratieconstante is (de <u>centrale</u> massa). $f(t)$ is een willekeurige functie. Laat zien dat $f(t) > 0$. Bewijs tenslotte dat U $ds^2$ in de Schwarzschild gedaante kunt brengen. Aanwijzing: reken van de Ricci-tensor eerst de 01 component uit.

c) Formuleer nu zelf een stelling over de metriek voor sferische massaverdelingen. (Goed geformuleerd is dit de stelling van Birkhoff!).

d) Laat zien dat een gevolg is dat in de holte van een sferische massaverdeling de geometrie noodzakelijk die van de vlakke Minkowski metriek is, en dus in geschikte coördinaten $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$.

e) Wat is voor de Newtonse gravitatietheorie en voor de Maxwell theorie het analogon van de stelling van Birkhoff (beschouw zowel een <u>centrale</u> verdeling, als een holte <u>binnen</u> een sferische verdeling).

**10)** Singulariteiten

In opgave **9** hebben we (m.b.v. Birkhoff's theorema) laten zien dat de unieke, spherisch symmetrische oplossing van de Einstein vergelijkingen in het vacuüm, de Schwarzschild oplossing is. Op eenzelfde manier kunnen we een generalisatie van Birkhoff's theorema gebruiken, om te bewijzen dat de unieke, spherisch symmetrische oplossing van de Einstein vergelijkingen gekoppeld aan electromagnetisme, de *Reissner-Nordström* metriek is

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

waarbij $q$ evenredig is met de totale lading $Q$.

a) Toon aan dat zowel in de Schwarzschild als in de Reissner-Nordström metriek alleen $r = 0$ een echte singulariteit is. (Een echte singulariteit is een singulariteit in $R_{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ of combinaties daarvan, die niet door geschikt gekozen coördinaten transformaties te verwijderen zijn. Daar skalairen (zoals $R$, $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ e.d.) onafhankelijk zijn van de coördinatenkeuze, kan voor $r = 0$ op een vrij eenvoudige wijze bewezen worden dat het hier een echte singulariteit betreft.)

b) De Reissner-Nordström metriek voor $q^2 < m^2$ heeft, in tegenstelling tot de Schwarzschild metriek, 2 coördinaten singulariteiten. Welke?

c) Laat zien dat als een waarnemer de grootste van de twee ($r_+$) overschreden heeft, hij altijd binnen een eindige tijd de kleinste ($r_-$) bereikt zal hebben, hoeveel moeite en energie hij ook spendeert. (Beredeneer dit op grond van het gedrag van $ds^2$ in dit gebied. Kunt U met $ds^2$ een (ruime) absolute bovengrens afleiden voor de eigentijd om van $r_+$ naar $r_-$ te reizen?)

d) Kunt U uit de metriek aflezen, of de waarnemer, zo gauw hij $r_-$ heeft overschreden, noodzakelijkerwijs op de singulariteit zal vallen?

**11)** Gravitatiestraling

We zullen in deze opgave de hoeveelheid energie uitrekenen die een roterend lichaam uitstraalt in de vorm van gravitatiestraling. De metriek wordt weer gegeven door $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, en indices worden omhoog en omlaag gebracht met behulp van $\eta_{\mu\nu}$. Voorts nemen we aan dat de ijkcondities $h^\alpha_\alpha = 0$ en $h^\alpha_{\beta,\alpha} = 0$ gelden (zie §FN.5.1 en p.167). In het algemeen kunnen de Christoffelsymbolen en de krommingstensor geschreven worden als een som $\Gamma = \Gamma^{(1)} + \Gamma^{(2)} + \cdots$, waarbij $\Gamma^{(i)}$ de bijdrage van orde $i$ in de $h_{\mu\nu}$ is.

a) Laat zien dat

$$\Gamma^{(2)\mu}_{\nu\sigma} = -\tfrac{1}{2}h^{\mu\beta}(h_{\sigma\beta,\nu} + h_{\nu\beta,\sigma} - h_{\nu\sigma,\beta}).$$

b) Laat zien dat

$$R^{(2)}_{\mu\nu} = Q_{\mu,\nu} + S^\alpha_{\mu\nu,\alpha} + \frac{1}{4}h_{\alpha\beta,\mu}h^{\alpha\beta}{}_{,\nu} - \tfrac{1}{2}h^\alpha_\nu \Box^2 h_{\alpha\mu},$$

waar $Q$ en $S$ zekere tensoren zijn die niet expliciet uitgerekend hoeven te worden.

c) Neem nu in de rest van de opgave aan dat $h_{\mu\nu}$ een vlakke golf oplossing van de Einstein vergelijkingen is, en dat $h_{\mu\nu}$ in de TT-ijk gebracht is (zie §FN.5.2). Er geldt $G^{(1)}_{\mu\nu}(h) = 0$, maar als we ook tweede orde termen in $G_{\mu\nu}$ meenemen, dan geldt niet langer $G(h) = 0$ en is $h$ *geen* exacte oplossing van de Einstein vergelijkingen meer.

We zouden dit kunnen oplossen door een tweede orde term $\triangle h$ aan $h$ toe te voegen zodat $\triangle G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$, met

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{\kappa} G^{(2)}_{\mu\nu}.$$

Naïef is de interpretatie van $T_{\mu\nu}$ die van de energie-impuls tensor van de gravitatiestraling. Dit geeft echter problemen, omdat men niet op willekeurig kleine schaal de energiedichtheid van gravitatiegolven beschrijven kan, en alleen het gemiddelde over een zeker gebied een fysisch zinvolle grootheid is. We zullen vanaf nu veronderstellen dat met $T_{\mu\nu}$ het gemiddelde van $T_{\mu\nu}$ over een zeker gebied bedoeld wordt. Door dit middelen geven de totale afgeleides in $T_{\mu\nu}$ een veel kleinere bijdrage dan de overige termen en kunnen in de rest van opgave gelijk aan nul gesteld worden. Toon nu aan dat

$$T_{\mu\nu} = \frac{c^4}{32\pi G} h_{\alpha\beta,\mu} h^{\alpha\beta}{}_{,\nu}$$

d) Bovenstaand resultaat is afgeleid in de TT-ijk. We kunnen nu niet zonder meer verg. FN.5.41 gebruiken, omdat de $h^{ij}$ die daar gegeven wordt nog niet in de TT-ijk gebracht is. Definieer

$$I^{ij} = \int \rho x^i x^j dV$$

We willen $I^{ij}$ projekteren op de komponent die zich wel in de TT-ijk bevindt. Hiertoe projekteren we $I^{ij}$ eerst op zijn spoorloze komponent, $Q^{ij}$ (dus $Q^i_i = 0$). $Q$ heet ook wel het quadrupoolmoment van de massaverdeling. Geef een uitdrukking voor $Q^{ij}$.

e) Gegeven een drievector $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$, definieer dan

$$P^a_b(\vec{x}) = \delta^a_b + \frac{x^a x_b}{r^2},$$

waarbij $r^2 = |\vec{x}|^2 = -x_i x^i$. Laat zien dat $P$ een projektie is, d.w.z. $P^2 = P$. Wat stelt deze projektie voor?

f) Beargumenteer dat $Q^{ij}_{TT}$ de spoorloze transversale komponent van $Q^{ij}$ is, als de gravitatiestraling in de $\vec{x}$-richting uitgezonden wordt, met

$$Q^{ij}_{TT} = P^i_a(\vec{x}) Q^{ab} P^j_b(\vec{x}) - \tfrac{1}{2} P_{ab}(\vec{x}) Q^{ab} P^{ij}(\vec{x})$$

g) Beschouw nu een in de oorsprong geplaatste bron van gravitatiestraling. Laat zien dat de hoeveelheid uitgestraalde energie per tijdseenheid door een bolschil $S$ om de oorsprong gegeven wordt door

$$\frac{dE}{dt} = \frac{G}{8\pi c^5} \int_S d\Omega\, \dddot{Q}_{TT\,ij}\, \dddot{Q}^{ij}_{TT}$$

h) Laat zien dat voor een bolschil $S$ met straal $R$

$$\int_S d\Omega\, x^a x^b = -\eta^{ab} \frac{4}{3} \pi R^2$$

$$\int_S d\Omega\, x^a x^b x^c x^d = \frac{4}{15} \pi R^4 (\eta^{ab}\eta^{cd} + \eta^{ac}\eta^{bd} + \eta^{ad}\eta^{bc})$$

i) Laat met behulp van onderdelen g) en h) zien dat

$$\frac{dE}{dt} = \frac{G}{5c^5}\dddot{Q}_{ij}\dddot{Q}^{ij}$$

j) Laat zien hoe hieruit verg. FN.5.44 volgt, door een deeltje dat in het $xy$-vlak om de $z$-as draait te beschouwen.

**12)** Test van algemene relativiteitstheorie met een dubbelpulsar.
Bestudeer het bijgevoegde artikel van J.M. Weisberg et al, uit Scientific American, Oktober 1981, p.66.
Van de dubbelpulsar PSR1913+16 (een gravitationeel gebonden systeem van twee neutronensterren met een massa van ieder ongeveer 1.4 maal de massa van de zon $M_\odot$), heeft men door timing van de pulsar signalen van een van de neutronensterren nauwkeurig de baan kunnen bepalen. Uit periodiciteit van de Dopplerverschuiving van de pulsarfrequentie volgt dat de omloopsperiode ($P = 27906.980895 \pm 0.000002$ s) niet helemaal constant is (zie de figuur op pag. 73 uit: J.M. Weisberg et al, Scientific American, Oktober 1981, 66); men vindt $\dot{P} = -(2.427 \pm 0.026) \times 10^{-12}$.

Bovendien is uit het frequentieprofiel van de pulsar af te leiden wat de hoek van het periastron (de hoek van de kortste nadering van de twee sterren) met de gezichtslijn is. Hiermee is een periastron verschuiving van $\dot{\omega} = 4.22659 \pm 0.00004$ graden per jaar gevonden. Uit het profiel is ook de hoge eccentriciteit $e = 0.6171313 \pm 0.0000010$ af te leiden alsmede andere baanparameters en de gravitationele roodverschuiving. Door combinatie van deze gegevens heeft men de massa's kunnen bepalen, aangenomen dat $\dot{\omega}$ volledig door de kromming van ruimte-tijd veroorzaakt wordt:

$$\begin{aligned} M_{\rm pulsar} &= (1.442 \pm 0.003) M_\odot, \\ M_{\rm begeleider} &= (1.386 \pm 0.003) M_\odot. \end{aligned}$$

Voor meer achtergrondinformatie zie J.H. Taylor e.a., Nature **227**(1979)437, of de meer recente referentie J.H. Taylor en J.M. Weisberg, Astrophysical Journal **345**(1989)434.

a) Bewijs dat in de Newtonse limiet de Keplerbanen voor twee sterren (waar $M_1$ en $M_2$ van vergelijkbare grootte zijn) nog steeds worden gegeven door verg. FN.4.41 en FN.4.42 (met $r$ de onderlinge afstand, ofwel de relatieve coordinaten) indien we $M = M_1 + M_2$ nemen. Ga na dat de totale energie $W$ gegeven is door

$$W = -\frac{\mu G M}{2a},$$

met $\mu$ de gereduceerde massa $\mu^{-1} = M_1^{-1} + M_2^{-1}$ en $a$ de halve lange as van de baan is (dus $a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) = h^2/[(1-e^2)GM]$, zie §FN.4.5). Beredeneer tenslotte dat in de zwakke veld benadering verg. FN.4.25 ook geldig is voor de dubbelster (bedenk dat $2GMu^3/c^2 = 2GM_1u^3/c^2 + 2GM_2u^3/c^2$). Op grond waarvan verwacht U dat er ditmaal hogere orde correcties zullen zijn? Gebruik tenslotte de formule voor de perihelionprecessie FN.4.45 ($\omega \equiv 3\varepsilon\alpha\pi$) en de wet van Kepler ($a^3(2\pi/P)^2 = GM$) om af te leiden dat

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \frac{6\pi}{1-e^2}\left(\frac{2\pi G M}{c^3 P}\right)^{2/3} P^{-1} \\ &= 2.11 \cdot \left(\frac{M_1 + M_2}{M_\odot}\right)^{2/3} \text{ graden per jaar} \end{aligned}$$

Gegeven is dat $2GM_\odot/c^2 = 2.95$ km. Aangezien een typische neutronenster ca. 1.4 zonmassa's is, en de compactheid van de neutronensterren getijde effecten verwaarloosbaar klein maakt, is het voor de hand liggend alle periastron verschuiving aan het relativistisch effect toe te kennen. Controleer nu met deze formule, aan de hand van de eerder gegeven waarden van de massa's $M_1, M_2$ en de periode $P$, de gegeven waarde van $\dot{\omega}$.

b) Laat zien dat

$$\frac{dW}{dt} = \frac{M_1 M_2 G}{3aP}\dot{P},$$

zodat de waarnemingen impliceren dat het dubbelster systeem energie verliest. We zullen nu laten zien dat dit verklaard kan worden door gravitatiestraling. Neem eerst aan dat de eccentriciteit verwaarloosd kan worden. Bewijs in dat geval (zie verg. FN.5.44)

$$\frac{dW_{grav}}{dt}(e=0) = \frac{32\mu^2 M^3}{5a^5}\frac{G^4}{c^5},$$

en onder de aanname dat het energieverlies alleen door gravitatiestraling plaatsvindt, dat

$$\begin{aligned}
\dot{P}(e=0) &= -2\pi\frac{96}{5}\left(\frac{2\pi G M_\odot}{Pc^3}\right)^{5/3}\frac{M_1}{M_\odot}\frac{M_2}{M_\odot}\left(\frac{M_1+M_2}{M_\odot}\right)^{-1/3} \\
&= -1.43\times 10^{-13}\frac{M_1}{M_\odot}\frac{M_2}{M_\odot}\left(\frac{M_1+M_2}{M_\odot}\right)^{-1/3}
\end{aligned}$$

Merk op dat dit een factor 10 te klein is.

c) Voor een eccentrische baan hangt verg. FN.5.44 af van de tijd, via $I(t) = \mu r^2(t) = \mu/u^2(t)$ en $\omega(t) = \dot{\phi}(t) = hr^{-2}(t) = hu^2(t)$. We proberen nu het uitgestraalde vermogen te benaderen door de resulterend uitdrukking te middelen over een baanperiode. Laat zien dat

$$\begin{aligned}
\dot{W}(\text{gem}) &= -\frac{32h^6}{5}\frac{G}{c^5}\mu^2\langle u^8\rangle \\
&= -\frac{32h^5}{5}\frac{G}{c^5}\frac{\mu^2}{P}\int_0^{2\pi} u^6(\phi)\,d\phi \\
&= \dot{W}(e=0)\times(1+\frac{15}{2}e^2+\frac{45}{8}e^4+\frac{5}{16}e^6)(1-e^2)^{-7/2},
\end{aligned}$$

dus

$$\dot{P}(\text{gem}) = 25.1\times\dot{P}(e=0)$$

Dit is nu twee en een half maal te groot maar laat duidelijk zien dat de eccentriciteit een belangrijke invloed heeft, maar dat onze aanname kennelijk niet correct is. Vol goede moed beginnen we derhalve met de algemeen geldige formule van opgave 11.

d) Bewijs dat $Q_{ij} = \frac{\mu r^2}{2}J_{ij}(\phi)$ (zie opgave 11 voor de definitie van $Q$), waar $J$ de volgende matrix is:

$$\begin{pmatrix} \cos(2\phi)+\frac{1}{3} & \sin(2\phi) & 0 \\ \sin(2\phi) & -\cos(2\phi)+\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Laat zien dat met $h = r^2\dot{\phi}, u = r^{-1}$, volgt dat

$$\dddot{Q} = \mu h^3(u^2(u'u'' - uu''')J - 2u^3(u'' + u)J')$$

gebruik makende van $d/dt = hu^2 d/d\phi$ en $J''' = -4J'$.

e) Gebruik nu dat $\mathrm{Tr}(J^2) = 8/3$, $\mathrm{Tr}(JJ') = 0$ en $\mathrm{Tr}((J')^2) = 8$ om te laten zien dat

$$\begin{aligned} \left\langle \mathrm{Tr}\left(\dddot{Q}^2\right)\right\rangle &= \frac{1}{P}\int_0^P dt\,\mathrm{Tr}\left(\dddot{Q}^2\right) \\ &= \frac{2\pi\mu^2 h^5}{P}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi\,\left(32u^4(u+u'')^2 + \frac{8}{3}u^2(u'u'' - uu''')^2\right), \end{aligned}$$

zodat

$$\dot{P}(e) = f(e)\dot{P}(e=0),$$

met de correctiefactor

$$f(e) = \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4\right)(1-e^2)^{-7/2}$$

waarbij $f(e = 0.617155) = 11.86$ precies de gewenste waarde heeft.

f) Ga na dat de curve door de datapunten in de figuur inderdaad gegeven wordt door de voorspelde waarde van $\dot{P}$. (Het nulpunt in deze figuur ligt op 1974.9 jaar.)

**13)** Cosmologische Constante

De Einstein vergelijkingen met een cosmologische constante $\Lambda$ (zie verg. FN.6.21) luiden:

$$R^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}Rg^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}$$

a) Laat zien dat

$$R^{\mu\nu} = \Lambda g^{\mu\nu} + \kappa(T^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}T^\lambda_\lambda g^{\mu\nu})$$

b) Vind de algemene statische, sferisch symmetrische oplossing buiten een statische en sferische massaverdeling voor $\Lambda \neq 0$, gebruik makende van

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

c) Laat zien dat voor cirkelbanen rond de centrale massa de omlooptijd gegeven wordt door

$$\triangle t = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM(r)}},$$

met $M(r) = M - c^2\Lambda r^3/3G$. Kennelijk manifesteert $\Lambda$ zich als een homogene (achtergrond) dichtheid $\rho_0 = c^2\Lambda/4\pi G$. Een ruwe grens voor $\rho_0$ volgt uit het succes van de Newtonse theorie om planeetbanen te voorspellen. Als we bijvoorbeeld op grond hiervan een massa defect van één aardmassa ($\sim 6 \times 10^{24}$ kg) binnen de straal van de Saturnus baan ($\sim 1.4 \times 10^{12}$ m) uitsluiten volgt $|\rho_0| < 5 \times 10^{-13}$ kg m$^{-3}$ of $|\Lambda| < 10^{-38}$ m$^{-2}$. Door op de schaal van en cluster van melkwegstelsels te kijken schat men $|\Lambda| < 10^{-53}$ m$^{-2}$.

In de quantumtheorie heeft in principe het vacuum ook een energiedichtheid. Beredeneer dat Lorentz invariantie impliceert dat $T^{\mu\nu}_{vac} = c^2\rho_{vac}g^{\mu\nu}$ waar $\rho_{vac}$ een constante is. Deze energiedichtheid is dus niet van een echte cosmologische constante te onderscheiden. Kennelijk is er een gigantische fine-tuning die garandeert dat de effectieve cosmologische constante $\Lambda_{eff} = \Lambda + 8\pi G\rho_{vac}/c^2 \simeq 0$. Dit staat bekend als het cosmologische constante probleem.

d) Beschouw een heelal zonder materie maar met een cosmologische constante $\Lambda$. Vind de vergelijking voor de schaalfactor van de Robertson-Walker metriek en los deze op voor willekeurige $k$ en $\Lambda$ (indien ze bestaan). De oplossing met $k = 0$ staat bekend als het De Sitter model.

e) Vind de coördinaten transformatie die de De Sitter metriek in de vorm van onderdeel b) brengt.

f) Maak de gevonden metriek Euclidisch door de tijd imaginair te kiezen en laat zien dat het een vierdimensionale bol is met een straal evenredig met $\Lambda^{-1/2}$. Dit impliceert dat de De Sitter ruimte maximaal symmetrisch is.