Afleiding formule (3.17) uit Particles and Nuclei (P&N).

In de college aantekeningen geeft prof. van Baal een afleiding van (3.17) voor een rotatie symmetrische vervorming van de initieel bolvormige kern, waarbij de vervorming ontwikkeld wordt in Legendre polynomen, ofwel:

$$R = R\left(1+\alpha(\theta)\right), \text{ met } \alpha(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta)\,. \tag{1}$$

Het uiteindelijk resultaat voor de oppervlakte energie is

$$E_s = a_s A^{2/3}\left(1+\frac{2}{5}\alpha_2+\ldots.\right). \tag{2}$$

In P&N wordt gesteld dat dit resultaat ook verkregen wordt door de kern te vervormen tot een ellipsoïde met assen:

$$a = R(1+\varepsilon) \text{ en } b = R\left(1-\frac{\varepsilon}{2}+\frac{3}{8}\varepsilon^2\right). \tag{3}$$

De kwadratische term ontbreekt in het boek, maar moet zoals door prof van Baal aangegeven in z'n college worden meegenomen.

In deze notitie geef ik een uitwerking van deze afleiding. Ik volg hierbij twee wegen:

- uitgaande van de bekende formule voor het oppervlak van een ellipsoïde,
- uitgaande van een integraal over het oppervlak, analoog als gedaan in de aantekeningen van prof van Baal.

1. Via oppervlak van een ellipsoïde.

Het volume en oppervlak van een ellipsoïde met assen a en b volgens (3), waarbij de omwentelingsas langs a ligt, wordt gegeven door:

$$V = \frac{4\pi}{3} a b^2 \tag{4}$$

$$O = 2\pi b^2 + 2\pi\frac{a b}{\nu}\arcsin(\nu)\,, \tag{5}$$

met $\nu = \sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}$ (6)

de excentriciteit van de ellips.

Met a en b volgens (3) wordt het volume van de initieel bolvormige kern tot in tweede orde van ε behouden, zoals blijkt uit invullen in a en b in (4).

Om het oppervlak tot in tweede orde van ε benaderen gebruiken we de volgende benaderingen:

$$b^2 = \frac{R^2}{1+\varepsilon} \approx R^2\left(1-\varepsilon+\varepsilon^2\right) \tag{7}$$

$$a b = R^2(1+\varepsilon)\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{3}{8}\varepsilon^2+\ldots.\right) \approx R^2\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{1}{8}\varepsilon^2+\ldots.\right). \tag{8}$$

$$\arcsin(\nu) \approx \left(\nu+\frac{1}{6}\nu^3+\frac{3}{40}\nu^5\right) \tag{9}$$

en

$$\nu^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{1}{(1+\varepsilon)^3} \approx 3\varepsilon(1-2\varepsilon) \tag{10}$$

Opmerking:
Omdat ν^2 van orde ε is, moeten we in (9) de reeksontwikkeling tot en met de ν^5-term meenemen, want na deling door ν in (5) levert deze term nog een bijdrage van orde ε^2 .
Met dank aan prof. van Baal die mij op deze term wees.

Invullen van (7) t/m (10) in (5) geeft:

$$\begin{aligned} O &\approx 2\pi R^2\left(1-\varepsilon+\varepsilon^2\right)+2\pi R^2\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{1}{8}\varepsilon^2\right)\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{13}{40}\varepsilon^2\right) \\ &\approx 4\pi R^2\left(1+\frac{2}{5}\varepsilon^2\right) \end{aligned} \tag{11}$$

Hierbij is gebruik gemaakt van de volgende benadering:

$$\frac{\arcsin\nu}{\nu} \approx 1+\frac{1}{6}\nu^2+\frac{3}{40}\nu^4 \approx 1+\frac{1}{2}\varepsilon-\varepsilon^2+\frac{3}{40}9\varepsilon^2(1-2\varepsilon)^2 \approx 1+\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{13}{40}\varepsilon^2 .$$

Met

$A = \frac{4\pi}{3}\rho R^3$, de massa van de kern, met ρ een gemiddelde dichtheid van de kern

en

$E_s = \sigma O$, de oppervlakte energie tgv de oppervlakte spanning σ , volgt

$$E_s = a_s A^{2/3}\left(1+\frac{2}{5}\varepsilon^2+\ldots\right), \tag{12}$$

dit is (3.17) uit P&N.

2 Afleiding via een integraal over het oppervlak van de ellipsoïde.

Hiertoe oriënteren we de lange (a)-as van de ellipsoïde langs de z-as.
Het oppervlak wordt nu gegeven door:

$$O = \int_0^\pi 2\pi r\sin\theta\left|\frac{ds}{d\theta}\right|d\theta , \tag{13}$$

zie ook onderaan blz 3 van de college aantekeningen van prof. van Baal.
Voor $r = r(\theta)$ gebruiken we de formule voor de ellipsoïde:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1 , \tag{14}$$

$$r^2 = x^2+y^2+z^2 = b^2+z^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right) = b^2+r^2\cos^2\theta\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right), \tag{15}$$

ofwel:

$$r = \frac{b}{\sqrt{1 - \nu^2 \cos^2\theta}}, \tag{16}$$

en

$$\frac{d\,r}{d\,\theta} = -\frac{b\nu^2 \sin\theta \cos\theta}{\left(1 - \nu^2\cos^2\theta\right)^{3/2}}, \tag{17}$$

met ν als voorheen gedefinieerd in (6).
Invullen van (16) en (17) in (13) geeft:

$$O = 2\pi b^2 \int_0^\pi \left\{ \frac{\sin\theta}{1 - \nu^2\cos^2\theta} \sqrt{1 + \frac{\nu^4 \sin^2\theta \cos^2\theta}{\left(1 - \nu^2\cos^2\theta\right)^2}} \right\} d\theta, \tag{18}$$

ν^4 van de orde ε^2 , zodat we (18) kunnen benaderen door:

$$O \approx 2\pi b^2 \int_0^\pi \left[\frac{\sin\theta}{1 - \nu^2\cos^2\theta} \left\{ 1 + \frac{\nu^4 \sin^2\theta \cos^2\theta}{2\left(1 - \nu^2\cos^2\theta\right)^2} \right\} \right] d\theta, \tag{19}$$

NB dit is in essentie dezelfde benadering als voor de benadering met Legendre polynomen in de college aantekeningen van prof. van Baal.

Met $y = \cos\theta$ kan (19) geschreven worden als:

$$O \approx -2\pi b^2 \int_1^{-1} \left\{ \frac{1}{1 - \nu^2 y^2} + \frac{\nu^4\left(y^2 - y^4\right)}{2\left(1 - \nu^2 y^2\right)^3} \right\} dy, \tag{20}$$

Met

$$\nu^4\left(y^2 - y^4\right) = -\left(1 - \nu^2 y^2\right)^2 + \left(2 - \nu^2\right)\left(1 - \nu^2 y^2\right) - \left(1 - \nu^2\right), \tag{21}$$

en

$$x = \nu y$$

kunnen we (20) schrijven als (- teken verwerkt in omkeren van de integratiegrenzen):

$$O \approx \frac{\pi b^2}{\nu} \int_{-\nu}^{\nu} \left\{ \frac{1}{\left(1 - x^2\right)} + \frac{2 - \nu^2}{\left(1 - x^2\right)^2} - \frac{1 - \nu^2}{\left(1 - x^2\right)^3} \right\} dx, \tag{22}$$

(22) is op te lossen met de volgende primitieven:

$$\int \frac{dx}{\left(1 - x^2\right)^n} = \frac{x}{(2n-2)\left(1 - x^2\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{\left(1 - x^2\right)^{n-1}}, \tag{23}$$

$$\int \frac{dx}{\left(1 - x^2\right)} = \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right\} dx = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x} \right). \tag{24}$$

Na toepassen van (23) en (24) in (22) en invullen van de integratiegrenzen vinden we:

$$O \approx \pi b^2 \left[\ln\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)\left\{\frac{1}{\nu}+\frac{2-\nu^2}{2\nu}-\frac{3\left(1-\nu^2\right)}{4\nu}\right\}+\frac{2-\nu^2}{1-\nu^2}-\frac{1}{2\left(1-\nu^2\right)}-\frac{3}{4}\right], \tag{25}$$

(25) moeten we nu tot orde ε^2 benaderen.
Nieuw is de benadering voor de ln-term:

$$\ln\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right) \approx 2\nu\left(1+\frac{1}{3}\nu^2+\frac{1}{5}\nu^4\right). \tag{26}$$

NB ook hier moeten we de ν^5-term meenemen, omdat deze een bijdrage levert van orde ε^2 .

Uitwerken geeft:

$$O \approx \pi b^2 \left\{\left(1+\frac{1}{3}\nu^2+\frac{1}{5}\nu^4\right)\left(\frac{13-\nu^2}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\nu^2+\frac{1}{2}\nu^4\right)\right\} \approx 4\pi b^2\left(1+\frac{1}{3}\nu^2+\frac{4}{15}\nu^4\right). \tag{27}$$

Met (7) en (10) als benadering voor b^2 en ν^2 vinden we:

$$O \approx 4\pi R^2\left(1-\varepsilon+\varepsilon^2\right)\left(1+\varepsilon(1-2\varepsilon)+\frac{36}{15}\varepsilon^2(1-2\varepsilon)^2\right) \approx 4\pi R^2\left(1+\frac{2}{5}\varepsilon^2\right), \tag{28}$$

en dit is gelijk aan (11).

In bovenstaande afleidingen was essentieel dat nauwkeurig gecontroleerd werd dat termen die verwaarloosd werden geen bijdrage van orde ε^2 leverden.

Gerrit Verboom
20-10-2003