

Fysica van Elementaire Deeltjes

3e jaars college

Najaar 2004

Prof. Pierre van Baal, Instituut-Lorentz
Universiteit Leiden

Stof: Deel I, §19.3-5 uit deel II en de Appendix van het boek
“Particles and Nuclei: An Introduction to the Physical Concepts”,
door B. Povh, K. Rith, C. Scholz en F. Zetsche (4th Edition)

Aanvullende teksten en extra opgaven

*verwijzingen naar vergelijkingen in
deze aanvulling: “Eq.(x.yy)” – het boek: “EqPN.(x.yy)”.*
Paginanummers tussen [] verwijzen naar de 3rd Edition.

1e College

Behandelde stof: pg. 1 t/m 13 en 339[335] t/m 345[341] (§1.1-5, §2.1, §A.1).

Extra opmerking over behouden grootheden: Stel we hebben N klassieke deeltjes met massas $m_{(i)}$ die met elkaar interacties hebben, waarbij de potentiële energie alleen van de afstand tussen de twee deeltjes afhangt, $V(\vec{r}_{(1)}, \dots, \vec{r}_{(N)}) = \sum_{i>j} V(|\vec{r}_{(i)} - \vec{r}_{(j)}|)$. Zo'n potentiaal is overduidelijk invariant onder translaties en rotaties.

We gaan uit van het principe van minimale actie, dat zegt dat de beweging van de deeltjes wordt beschreven door die banen $\vec{r}_{(i)}(t)$ waarvoor de totale actie S ,

$$S = \int_{t_b}^{t_e} dt L, \quad L = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_{(i)} \dot{\vec{r}}_{(i)}^2 \right) - V(\vec{r}_{(1)}(t), \dots, \vec{r}_{(N)}(t)), \quad (1.1)$$

maximaal is (t_b en t_e zijn de begin- en eindtijd, L is de Lagrangiaan).

Ter *herinnering*, om hieruit de bewegingsvergelijkingen af te leiden, kijken we naar een *willekeurige* verandering $\delta \vec{r}_{(i)}(t)$ en eisen dat S tot in eerste order niet verandert:

$$\delta S = \int_{t_b}^{t_e} dt \sum_i \left(m_{(i)} \dot{\vec{r}}_{(i)}(t) \cdot \delta \dot{\vec{r}}_{(i)}(t) - \delta \vec{r}_{(i)}(t) \cdot (\vec{\nabla}_{(i)} V)(\vec{r}_{(1)}(t), \dots, \vec{r}_{(N)}(t)) \right) = 0, \quad (1.2)$$

waar $\nabla_{(i)}^k V = \partial V / \partial r_{(i)}^k$.

We voeren nu een partiële integratie uit (aannemende dat $\delta \vec{r}(t_b) = \delta \vec{r}(t_e) = \vec{0}$), zodat

$$\delta S = \int_{t_b}^{t_e} dt \sum_i \left(-m_{(i)} \ddot{\vec{r}}_{(i)}(t) - (\vec{\nabla}_{(i)} V)(\vec{r}_{(1)}(t), \dots, \vec{r}_{(N)}(t)) \right) \cdot \delta \vec{r}_{(i)}(t). \quad (1.3)$$

Dit moet nu gelijk aan nul zijn voor *iedere* variatie $\delta \vec{r}_{(i)}(t)$. Kies bijv. $\vec{r}_{(j)}(t) = \vec{0}$ voor $j \neq i$ en $\vec{r}_{(i)}(t)$ bijna overal $\vec{0}$ behalve rond een vaste t (je kunt dit ook makkelijk beargumenteren als je de integraal door een som benadert), hieruit volgt dan de welbekende bewegingsvergelijking:

$$\frac{\delta S}{\delta \vec{r}_{(i)}(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\delta S}{\delta \dot{\vec{r}}_{(i)}(t)} = 0, \quad \text{of} \quad m_{(i)} \ddot{\vec{r}}_{(i)}(t) = -(\vec{\nabla}_{(i)} V)(\vec{r}_{(1)}(t), \dots, \vec{r}_{(N)}(t)) \quad (1.4)$$

Natuurlijk kun je hiermee rechtstreeks controleren dat de impuls behouden is. We kunnen echter *slim* gebruiken maken van de symmetrie en het variatie principe. We hadden verondersteld dat de potential invariant is onder translaties. M.a.w. als $\delta \vec{r}_{(i)}(t) = \delta \vec{a}(t)$ voor alle i , dan geldt dat de potentiaal niet verandert. Het is belangrijk op te merken dat aangezien de potentiaal niet expliciet van de tijd afhangt $\delta \vec{a}(t)$ *niet* tijdsafhankelijk hoeft te zijn. Omdat $\delta S = 0$ moet gelden voor iedere willekeurige variatie, en in het bijzonder voor deze, vinden we

$$\delta S = \int_{t_b}^{t_e} dt \sum_i \left(-m_{(i)} \ddot{\vec{r}}_{(i)}(t) \right) \cdot \delta \vec{a}(t) = - \int_{t_b}^{t_e} dt \dot{\vec{P}}(t) \cdot \delta \vec{a}(t) = 0 \quad (1.5)$$

voor *willekeurige* $\delta \vec{a}(t)$, zodat we weer concluderen dat $\dot{\vec{P}}(t) = 0$, waarin uiteraard $\vec{P}(t) = \sum_i m_{(i)} \dot{\vec{r}}_{(i)}(t)$ de totale impuls is.

Extra opgave: Bewijs nu zelf eenvoudig hoe het behoud van impulsmoment volgt uit invariantie onder rotaties. Laat daartoe eerst zien dat een rotatie over een hoek $|\vec{\omega}|$ om een as met richting $\vec{\omega}$ aanleiding geeft tot $\delta \vec{r}_{(i)} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{(i)}$.

2e College

Behandelde stof: pg. 14 t/m 33 (§2.2-4, §3.1-2).

Om verwarring te voorkomen: bij fig. 3.2 en 3.3 worden de werkelijke massas gebruikt en *niet* wat men met de fit in EqPN.(3.6) zou vinden. Verder blijkt dat het massaverschil tussen $^{101}_{44}\text{Ru}$ en $^{101}_{45}\text{Rh}$ kleiner is dan $2m_e$ en dus *niet voldoende* om het β^+ verval plaats te laten vinden. Verval kan uiteraard wel via Electron Capture (*EC*), dus door vangst van een electron uit de *K* schil. Zie ook de isotopen tabel van het “Handbook of Chemistry and Physics”.

De berekening van de Gamov factor: We bepalen hier de integraal die voorkomt in de berekening van G , EqPN.(3.15) in het boek. Het “klassieke omkeerpunt” wordt gevonden door r_1 op te lossen uit $V_c(r_1) = E$. Dus $2(Z-2)\alpha\hbar c/r_1 = \frac{1}{2}mv^2$ (relativistische correctie is hier veelal niet nodig). Dit gebruikende volgt (met $y^2 \equiv r/r_1$)

$$G = \frac{1}{\hbar} \int_R^{r_1} dr \sqrt{2m(V_c(r) - E)} = \frac{2}{\hbar} \sqrt{m(Z-2)\alpha\hbar c} \int_R^{r_1} dr \sqrt{r^{-1} - r_1^{-1}} = \frac{2r_1 mv}{\hbar} \int_\epsilon^1 dy \sqrt{1 - y^2}. \quad (2.6)$$

waarbij $\epsilon \equiv \sqrt{R/r_1}$ (ga na). Indien $r_1 \gg R$ vinden we in goede benadering, met $\int_0^1 \sqrt{1 - y^2} dy = \pi/4$ en $\beta \equiv v/c$, dat $G = r_1 mv \pi / 2\hbar = 2\pi(Z-2)\alpha/\beta$. Dit is het resultaat dat in het boek wordt gegeven, geldig als r_1 groot is, ofwel als E klein is (zie fig. 3.5 van het boek). Merk tenslotte op dat we deze berekening alleen kunnen gebruiken als E positief is, dus als het verval energetisch is toegestaan, zie EqPN.(3.1) met $A' = 4$ en $Z' = 2$, en vooral problem 3.5 uit het boek.

Opgaven: Maak problems 2.1, 3.1-5.

3e College

Behandelde stof: pg. 34 t/m 47 en pg. 53 t/m 55 (§3.3 [§3.4 overslaan], §4.1-2, §5.1).

Extra opmerking over spontane kernsplijting: Het boek geeft de verandering van de Coulomb en oppervlakte energie bij de deformatie van een kern in een ellips. Het is belangrijk dat daarbij het volume van de kern behouden blijft. Als $a = R(1 + \epsilon)$ de halve lange as is, moet je dan dus voor de halve korte as $b = R/\sqrt{1 + \epsilon} = R(1 - \epsilon/2 + 3\epsilon^2/8 + \mathcal{O}(\epsilon^3))$ nemen. De tweede orde term mag hier *niet* verwaarloosd worden.

Toch is dit niet de handigste manier. De oppervlaktespanning is nog wel eenvoudig uit te rekenen voor een willekeurige ellips, maar de Coulomb energie wordt al een stuk lastiger. En wat als de deformatie niet die van een ellips is? Het is in zo'n geval leuk terug te gaan naar de bron, N. Bohr en J.A. Wheeler: “The Mechanism of Nuclear Fission”, Physical Review 56 (1939) 426. Op www.lorentz.leidenuniv.nl/vanbaal/FED.html vindt je een link naar de eerste paar paginas (p. 430 en 431 zijn relevant voor de berekening). Bohr en Wheeler gaan uit van de meest algemene axiaal symmetrische deformatie in bolcoördinaten,

$$r(\theta, \phi) = R(1 + \alpha(\theta)) = R(1 + \sum_{\ell} \alpha_{\ell} P_{\ell}(\cos \theta)), \quad (3.7)$$

waarin P_ℓ de Legendre polynomen zijn, bekend van zowel de Maxwell- als de Quantumtheorie.

Laten we eerst de Coulomb energie berekenen aangenomen dat de kern zich gedraagt als een incompressibele vloeistof met een homogene ladingsverdeling. In het algemeen wordt die gegeven door

$$E_C = \frac{1}{2} \int \frac{\rho(\vec{x})\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x d^3x'. \quad (3.8)$$

We zullen de ladingsverdeling $\rho(\vec{x})$ constant veronderstellen. Omdat het hier gaat om een bijdrage aan de bindingsenergie zou je er vanaf moeten trekken de zelfenergie van ieder proton. In het boek wordt dit gedaan door de lading van ieder proton zelf over de hele kern te verspreiden, dus ρ te vervangen door ρ/Z . Ieder proton draagt dus aan zelfenergie een fractie $1/Z^2$ van de Coulomb energie, en samen dus een fractie $1/Z$. Of anders uitgedrukt, de Coulomb bindingsenergie is gelijk aan $Z(Z-1)$ maal de Coulomb zelfenergie van een enkel proton. Echt overtuigend is dit niet, en je ziet ook dat in het boek de Coulomb term in de fit gewoon evenredig met Z^2 wordt gekozen. We zullen hier dan ook verder geen correctie voor die zelfenergie meenemen.

Een eenvoudige manier om de dubbele integraal in afwezigheid van deformatie te berekenen is door gebruik te maken van de sferische symmetrie en het feit dat

$$E_C = \int_{|\vec{x}'| < |\vec{x}|} \frac{\rho(\vec{x})\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x d^3x', \quad (3.9)$$

Dat is juist zo handig, omdat de integraal over $\vec{x}'$ precies de Coulomb potentiaal geeft van de lading ingesloten binnen $|\vec{x}'| < |\vec{x}|$,

$$\Phi(\vec{x}) = \int_{|\vec{x}'| < |\vec{x}|} \frac{\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x' = \frac{\rho|\vec{x}|^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x}|}, \quad (3.10)$$

voor $\rho(\vec{x}) = \rho$. Met $r = |\vec{x}|$ vinden we dus

$$E_C = \int_0^R 4\pi\rho r^2 \frac{\rho r^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r} dr = \frac{4\pi R^5 \rho^2}{15\epsilon_0} = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (3.11)$$

We gaan nu berekenen hoe volume, oppervlak en Coulomb energie veranderen als we de bol deformeren, maar de ladingsdichtheid en dus het volume constant houden (de aanname van incompressibiliteit). Het volume wordt, gebruik makende van de axiale symmetrie, gegeven door $4\pi R^3/3 = \pi \int (x^2 + y^2) dz = -\pi \int_0^\pi r^2(\theta) \sin^2(\theta) d(r(\theta) \cos \theta)$, uitwerken geeft $-\pi \int_0^\pi \left(\frac{1}{3} \sin^2(\theta) \cos \theta d(r^3(\theta)) / d\theta - \sin^3(\theta) r^3(\theta) \right) d\theta$ en met partiële integratie vinden we dan $2\pi R^3 \int_0^\pi \frac{1}{3} (1 + \alpha(\theta))^3 \sin(\theta) d\theta$. We kunnen nu de orthogonaliteit van Legendre polynomen (zie Eq.(3.13)) gebruiken, $\int_0^\pi P_\ell(\cos \theta) P_k(\cos \theta) \sin \theta d\theta = 2\delta_{k\ell}/(2\ell+1)$ (met $P_0 \equiv 1$ volgt eveneens $\int_0^\pi P_\ell(\cos \theta) \sin \theta d\theta = 2\delta_{0\ell}$), zodat $4\pi R^3/3 = 4\pi R^3 (\frac{1}{3} + \alpha_0 + \sum_\ell \alpha_\ell^2/(2\ell+1) + \mathcal{O}(\alpha_\ell^3))$ en dus

$$\alpha_0 = - \sum_\ell \frac{\alpha_\ell^2}{2\ell+1}. \quad (3.12)$$

Vervolgens berekenen we het oppervlak, wederom gebruikmakende van de axiale symmetrie, $Opp = 2\pi \int_0^\pi |d\vec{x}/d\theta| \sqrt{x^2 + y^2} d\theta = 2\pi \int_0^\pi r(\theta) \sin \theta \sqrt{(dr(\theta)/d\theta)^2 + r^2(\theta)} d\theta$. Dit ontwikkelen tot in tweede orde in $\alpha(\theta)$ geeft $Opp = 2\pi R^2 \int_0^\pi (1 + 2\alpha(\theta) + \alpha^2(\theta) + \frac{1}{2}(d\alpha(\theta)/d\theta)^2) \sin \theta d\theta$.

Merk nu op dat $dP_\ell(\cos \theta)/d\theta \equiv P_\ell^1(\cos \theta)$ een geassocieerd Legendre polynoom is. Deze zijn onderling ook orthogonaal! Immers, de sferisch harmonische functions

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (3.13)$$

zijn per constructie orthonormaal. Hieruit volgt $\int_0^\pi P_k^m(\cos \theta) P_\ell^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \delta_{k\ell} N_m$ met $N_0 = 2/(2\ell+1)$ en $N_1 = 2\ell(\ell+1)/(2\ell+1)$, zodat tot in tweede orde

$$Opp = 2\pi R^2 \left(2 + 4\alpha_0 + \sum_\ell \frac{2+\ell(\ell+1)}{2\ell+1} \alpha_\ell^2 \right) = 4\pi R^2 \left(1 + \sum_\ell \frac{\ell(\ell+1)-2}{2(2\ell+1)} \alpha_\ell^2 \right). \quad (3.14)$$

Als laatste moeten we nu de Coulomb energie berekenen, waar Bohr en Wheeler al hun vernuft uit de kast halen, zo lijkt het althans! Omdat de ladingsdichtheid niet verandert, kunnen we de berekening van de verandering van deze energie beperken tot een bolschil. Om dit wat preciezer te maken kunnen we ρ tot de hele ruimte uitstrekken door het in de radiële richting een stapfunctie te maken. De verandering in ρ is dan dus een blokfunctie tussen R en $R\alpha(\theta)$ met een hoogte $\pm\rho$, waar het teken samenvalt met het teken van $\alpha(\theta)$. Omdat E_C kwadratisch is in ρ vinden we

$$E_C = \frac{1}{2} \int_{|\vec{x}|, |\vec{x}'| \leq R} d^3x d^3x' \frac{\rho^2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}'|} + \int_{|\vec{x}'| \leq R} d^3x d^3x' \frac{\rho \delta\rho(\vec{x})}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{1}{2} \int d^3x d^3x' \frac{\delta\rho(\vec{x}) \delta\rho(\vec{x}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (3.15)$$

De eerste term is uiteraard Eq.(3.11), voor de tweede term is de integraal over $\vec{x}'$ in feite beperkt tot de bolschil $|\vec{x}'| = R$, met $\delta\rho$ vervangen door $\rho(\alpha(\theta) + \frac{1}{2}\alpha^2(\theta))R^2$ (met een addertje onder het gras¹); idem voor beide integralen in de laatste term. Dus ($\hat{x} \equiv \vec{x}/|\vec{x}|$, $d\Omega \equiv \sin \theta d\theta d\phi$)

$$E_C = \frac{4\pi R^5 \rho^2}{15\epsilon_0} + \frac{2\pi R^5 \rho^2 \alpha_0}{3\epsilon_0} + \frac{1}{2} R^5 \rho^2 \int d\Omega d\Omega' \frac{\alpha(\theta)\alpha(\theta')}{4\pi\epsilon_0 |\hat{x} - \hat{x}'|}. \quad (3.16)$$

De laatste integraal kan worden uitgewerkt door gebruik te maken van een bekend resultaat:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{\min^\ell(|\vec{x}|, |\vec{x}'|)}{\max^{\ell+1}(|\vec{x}|, |\vec{x}'|)} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) Y_{\ell m}(\theta', \phi'). \quad (3.17)$$

Je kunt eenvoudig nagaan dat zolang $|\vec{x}| \neq |\vec{x}'|$ de Laplaciaan in zowel $\vec{x}$ als $\vec{x}'$, werkende op linker- en rechterkant, nul geeft. Het kost echter wat meer moeite om te laten zien dat de

¹In eerste instantie zou je geneigd zijn de integraal over $\vec{x}'$ in de tweede term van Eq.(3.15) te vervangen door $\delta\rho(\vec{x})\tilde{\Phi}(\vec{x}) = \delta\rho(\vec{x})\rho R^3/3\epsilon_0|\vec{x}|$. Er resteert dan de integraal over $\vec{x}$, $\int \tilde{\Phi}(\vec{x})\delta\rho(\vec{x})r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = R\tilde{\Phi}(R)\rho \int_R^{R+R\alpha(\theta)} r dr d\Omega = R^3\tilde{\Phi}(R)\rho \int (\alpha(\theta) + \frac{1}{2}\alpha^2(\theta)) d\Omega = 2\pi R^5 \rho^2 \alpha_0/3\epsilon_0$ (ga na). De adder zit hem in het feit dat de gebruikte uitdrukking voor $\tilde{\Phi}(\vec{x})$ alleen geldig is als $|\vec{x}| \geq R$, ofwel $\alpha(\theta) \geq 0$. Desalniettemin is het resultaat ook geldig voor $\alpha(\theta) < 0$, maar dat kost iets meer werk. Het dreigt toch nog fout te gaan als je Eq.(3.10), $\tilde{\Phi}(\vec{x}) = \Phi(\vec{x})$, denkt te kunnen gebruiken voor $|\vec{x}| < R$. Echter, we moeten in Eq.(3.15) ook over $|\vec{x}'| > |\vec{x}|$ integreren. Het makkelijkste is Eq.(3.17) te gebruiken, waar bij integratie over θ' en ϕ' alleen de term met $\ell = m = 0$ meedoet. Voor $|\vec{x}| < R$ vinden we dan $\tilde{\Phi}(\vec{x}) = (2\epsilon_0)^{-1}\rho(R^2 - \frac{1}{3}|\vec{x}|^2)$ zodat voor $\alpha(\theta) < 0$ (en derhalve $\delta\rho(\vec{x}) = -\rho$) integratie over r bij vaste θ en ϕ aan de tweede term in Eq.(3.15) bijdraagt: $-R\tilde{\Phi}(R)\rho \int_R^{R+R\alpha(\theta)} r dr = R^3\tilde{\Phi}(R)\rho [(1+\alpha(\theta))^3 - 1]/2 - [(1+\alpha(\theta))^5 - 1]/10 = R^3\tilde{\Phi}(R)\rho [\alpha(\theta) + \frac{1}{2}\alpha^2(\theta) + \mathcal{O}(\alpha^3(\theta))]$, en opmerkelijk genoeg is het zo dus toch allemaal nog goed gekomen!

Laplaciaan werkende op de rechterkant precies $-4\pi\delta_3(\vec{x} - \vec{x}')$ geeft, waarmee het bewijs te voltooien is. Vaak wordt deze formule in twee stappen afgeleid,

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\min^{\ell}(|\vec{x}|, |\vec{x}'|) P_{\ell}(\hat{x} \cdot \hat{x}')}{\max^{\ell+1}(|\vec{x}|, |\vec{x}'|)}, \quad P_{\ell}(\hat{x} \cdot \hat{x}') = \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) Y_{\ell m}(\theta', \phi'). \quad (3.18)$$

De eerste uitdrukking is bekend van de multipool ontwikkeling, zie bijv. §3.4.1 (i.h.b. verg.(3.94)) van “Introduction to Electrodynamics” van D.J. Griffiths (Prentice Hall, derde druk, 1999). De tweede staat bekend onder de naam “addition theorem”. Zie bijv. §3.6 van “Classical Electrodynamics”, J.D. Jackson (Wiley, 1975).

Gebruik nu Eq.(3.17) met $|\vec{x}| = |\vec{x}'| = 1$, zodat de laatste dubbel-integraal in E_C eenvoudig is te bepalen. Tot op tweede orde vinden we (ga na)

$$E_C = \frac{4\pi R^5 \rho^2}{15\epsilon_0} \left(1 - 5 \sum_{\ell} \frac{\ell-1}{(2\ell+1)^2} \alpha_{\ell}^2 \right). \quad (3.19)$$

Met $R = r_0 A^{\frac{1}{3}}$ en $\rho = 3Ze/(4\pi R^3)$ geeft $E_C + Opp \times O$, waarbij O de oppervlaktespanning is, precies het resultaat van Bohr en Wheeler (zij gebruiken cgs eenheden, waarbij effectief $4\pi\epsilon_0 = 1$). In de notatie van het boek hebben we $a_c = 3\alpha\hbar c/5r_0$ en $a_s = 4\pi O r_0^2$.

Tot slot nog even dit: Voor Bohr en Wheeler was dat naar hun eigen zeggen een “straight-forward calculation”! Je ziet hier hoe nuttig het is allerlei eigenschappen over Legendre (en in het algemeen orthogonale) polynomen als een stuk bagage mee te dragen. Vandaar deze iets uit de hand gelopen uitweiding.

Extra opgave: Waarom valt α_1 volledig weg uit zowel de verandering in de oppervlaktespanning als in de Coulomb energie? (Hint: beredeneer dat α_1 niet zozeer een vormverandering geeft, maar een verplaatsing van het zwaartepunt.) Controleer dat voor de ellips $\alpha_2 = \epsilon$ en laat zien dat het gegeven resultaat in het boek klopt met de formule van Bohr en Wheeler.

Extra opmerkingen over kinematica: De Rutherford verstrooiing is een voorbeeld van elastische verstrooiing. Daarbij verwaarlozen we vaak de terugstoot van de kern, wat niet geheel consistent is met behoud van energie en impuls. Dit wordt eenvoudig opgevangen door de uitgaande energie te corrigeren, zie §5.1 in het boek. Voordat we deze Rutherford verstrooiing verder uitwerken, is het nuttig eerst nog een opmerking te maken over de kinematica bij inelastische verstrooiing. De vraag die we ons stellen is, hoeveel energie is er beschikbaar is na een botsing van twee deeltjes, om daaruit nieuwe deeltjes te maken. Denk hierbij aan de botsing van een deeltje en een antideeltje, waaruit andere (vaak meerdere) paren van deeltjes gevormd kunnen worden. Behouden grootheden spelen een belangrijke rol om te bepalen wat geproduceerd kan worden. Bijv. annihilatie in één foton is niet toegestaan, omdat hierbij niet tegelijk energie en impuls behouden kan worden. Evenzeer speelt behoud van lading (en andere, later in te voeren, quantumgetallen) een rol. De beschikbare energie $\sqrt{s}$ om nieuwe deeltjes mee te maken is de totale energie in het zwaartepunt. Immers, als het zwaartepunt beweegt gaat een deel van de energie in de bewegingsenergie zitten. Er geldt

$$s \equiv c^2(p_a + p_b)^2 = (E_a + E_b)^2 - c^2(\vec{p}_a + \vec{p}_b)^2. \quad (3.20)$$

Dit is invariant onder Lorentz transformatie, en kan dus in ieder stelsel worden bepaald. In het zwaartepunt is $\vec{p}_a + \vec{p}_b = \vec{0}$ en dus $\sqrt{s} = E_a + E_b$, inderdaad dus de beschikbare energie. Zo vinden we voor “fixed target” botsingen, waarbij $p_b = (m_b c, \vec{0})$ en $p_a = (E_a/c, \vec{p}_a)$, dat $s = 2E_a m_b c^2 + m_b^2 c^4 + m_a^2 c^4$. Voor grote botsingsenergie, $E_a \gg m_a c^2$, volgt dus in goede benadering $\sqrt{s} = \sqrt{2E_a m_b c^2}$ (zie Appendix A). Lang niet alle energie van de projectielen kan hier dus gebruikt worden voor het maken van nieuwe deeltjes. Een ander voorbeeld zijn elektronen en protonen die in botsing worden gebracht. Als wederom E_e en E_p veel groter zijn dan $m_{e,p} c^2$, mogen we de grootte van de impuls gelijk stellen aan E/c . Aangezien ze in tegengestelde richtingen bewegen volgt dus dat $s = (E_p + E_e)^2 - (E_p - E_e)^2 = 4E_e E_p$, zodat $\sqrt{s} = 2\sqrt{E_p E_e}$.

Opgaven: Maak problems 4.2 en 5.2.

4e College

Behandelde stof: pg. 48 t/m 52 en pg. 56 t/m 71 (§4.3-4, §5.2-5).

Extra opmerkingen over de werkzame doorsnede: In het boek wordt voor de klassieke berekening van de Rutherford verstrooiings formule (de werkzame doorsnede bij verstrooiing aan een Coulomb veld), alsmede voor de afleiding van Fermi’s “Golden rule”, verwezen naar andere leerboeken. Omdat het essentieel is voor een goed begrip, bespreken we het hier in enig detail (zie ook de boeken van Griffiths, “Introduction to Quantum Mechanics” (GQM), §11.1.1, of “Introduction to Elementary Particles” (GEP), §6.1 en §6.2).

We beginnen met een harde bol met straal R , waarop we deeltjes met een verwaarloosbare afmeting afschieten, die elastisch botsen met de bol. Of de bol al dan niet geraakt wordt, hangt af van de botsingsparameter, b . Dit is de afstand van het centrum van de bol tot de baan van het deeltje (preciezer: de kortste afstand tot het centrum in afwezigheid van de bol). Indien $b < R$, dan wordt de bol geraakt op een hoogte $b = R \sin \alpha$, waarbij α de hoek met de normaal van de bol op het raakpunt is (see fig. 11.2 in GQM). Aangezien de hoek van inval (t.o.v. de normaal) gelijk is aan hoek van terugkaatsing, volgt dus dat het deeltje onder een hoek $\theta = \pi - 2\alpha = \pi - 2 \arcsin(b/R)$ verder gaat. Bij klassieke verstrooiing, geldig zolang de botsingsparameter veel groter is dan de De Broglie golflengte van het deeltje, bepaalt de relatie tussen b en θ rechtstreeks de werkzame doorsnede. Voor de bol, en i.h.a. voor een sferisch symmetrische potentiaal, is de verstrooiing onafhankelijk van ϕ , de azimuthale hoek (als deeltjes spin hebben is dat niet zo, maar als men de som neemt over de spin toestanden van het uitgaande deeltjes en middelt over de spin van de ingaande deeltje, dan valt de ϕ afhankelijkheid er weer uit).

Een interval $(b, b + db)$ definieert een oppervlakte element $b db d\phi$ (zie fig. 11.3 in GQM). Deeltjes binnen dit oppervlak worden allemaal onder een richting (θ, ϕ) afgebogen met een ruimtehoek $d\Omega \equiv \sin \theta d\theta d\phi$, en de differentiële werkzame doorsnede is niets anders als dit oppervlak per eenheid van ruimtehoek,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{b}{\sin \theta} \frac{db}{d\theta} \right|. \quad (4.21)$$

Je kunt nu zelf eenvoudig nagaan dat dit voor een harde bol precies gelijk is aan $R^2/4$,

onafhankelijk van de verstrooiingshoek. Dit is gelijk aan het oppervlak πR^2 van de bol, als *gezien* door het deeltje, per eenheid van ruimtehoek. De totale werkzame doorsnede is dus precies dat oppervlak en het laat zien dat het begrip werkzame doorsnede op deze wijze zinvol is gedefinieerd.

In het algemeen zijn de atomen, of kernen, in een trefplaatje geen harde bollen, maar hebben ze een zekere uitgestrektheid, en is de grens niet altijd eenduidig aan te geven. De werkzame doorsnede is dan een effectief oppervlak. Soms, zoals bij geladen deeltjes, is de dracht van de interactie oneindig groot (de dracht is eindig als de kracht exponentieel afvalt). De totale werkzame doorsnede kan dan zelfs oneindig zijn, typisch omdat deze divergeert voor $\theta \rightarrow 0$. Bedenk dat je meestal daar geen metingen doet, omdat je anders ook alle deeltjes die niet verstrooid zijn waarneemt. Voor een versneller als bij LEP, waar electronen en positronen in tegengestelde richtingen in een bundelpijp rondlopen en op elkaar worden geschoten, is meten bij $\theta = 0$ (en π) niet mogelijk; de bundelpijp zit immers in de weg. Wel is het vaak belangrijk ook dicht bij deze bundelpijp metingen te doen (met de bij dit soort experimenten vaak gebruikelijk “forward detectors”).

Voor de Rutherford verstrooiing (bij niet al te hoge energie, zodat we quantum effecten kunnen verwaarlozen), moeten we dus eenvoudig de relatie tussen b en θ voor de beweging van een geladen deeltje (met lading z) in een centrale Coulomb potentiaal (met lading Z) berekenen. Merk op dat dit precies hetzelfde is als voor de beweging van deeltje in een gravitatieveld, i.h.b. als de twee ladingen tegengesteld zijn. We gebruiken dat het impulsmoment, $\vec{L} \equiv m\vec{x} \times \vec{v}$, behouden is en dat de impuls verandert als $\Delta\vec{p} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \vec{F}_C(\vec{x}(t))$ (immers $\frac{d}{dt}\vec{p}(t) = \vec{F}_C(\vec{x}(t))$). Kies het verstrooiings centrum in de oorsprong. Voor $t \rightarrow -\infty$ geldt $\vec{v} = (v, 0, 0)$ en $\vec{x} = (vt, b, 0)$ en dus $\vec{L} = -mbv(0, 0, 1)$. Na de verstrooiing, voor $t \rightarrow \infty$, is alleen de richting (maar niet de grootte) van de snelheid veranderd, $\vec{v} = (v \cos \theta, v \sin \theta, 0)$. Gebruiken we bolcoördinaten, $(r(t), \theta(t), \phi(t))$, met $\theta(-\infty) = \pi$ en $\theta(\infty) = \theta$ als randvoorwaarden ($\phi(t) = \phi$ is constant), dan volgt uit behoud van impulsmoment dat $L_z = -mbv = mr^2(t)\dot{\theta}(t)$. Langs de baan van het deeltje wordt de Coulomb kracht dus gegeven door

$$\vec{F}_C = zZ\alpha\hbar c \vec{x}(t)/r^3(t) = -zZ\alpha\hbar c(\cos \theta(t), \sin \theta(t), 0)\dot{\theta}(t)/vb. \quad (4.22)$$

Integreren over t ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \vec{F}_C(t) = -zZ\alpha\hbar c \int_{\pi}^{\theta} d\theta' (\cos \theta', \sin \theta', 0)/vb = 2zZ\alpha\hbar c \cos(\frac{1}{2}\theta)(-\sin(\frac{1}{2}\theta), \cos(\frac{1}{2}\theta), 0)/vb \quad (4.23)$$

en gelijk stellen aan

$$\vec{p}(\infty) - \vec{p}(-\infty) = mv(\cos \theta - 1, \sin \theta, 0) = 2mv \sin(\frac{1}{2}\theta)(-\sin(\frac{1}{2}\theta), \cos(\frac{1}{2}\theta), 0), \quad (4.24)$$

geeft $zZ\alpha\hbar c/vb = \tan(\frac{1}{2}\theta)mv$ (ga na) en dus

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{b}{\sin \theta} \frac{db}{d\theta} \right| = \left(\frac{zZ\alpha\hbar c}{4E_{\text{kin}}} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\frac{1}{2}\theta)}. \quad (4.25)$$

Voor de quantummechanische berekening van de werkzame doorsnede wordt gebruik gemaakt van Fermi's Golden rule. We zullen hier laten zien hoe je deze regel,

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi_f | \mathcal{H}_{\text{int}} | \psi_i \rangle|^2 \frac{dn}{dE_f}, \quad (4.26)$$

af moet leiden uit de storingstheorie binnen de niet-relativistische quantummechanica (zie GQM §9.1 en §9.2 – Fermi’s Golden rule wordt daar uitgewerkt voor het geval van dipoolstraling, met de daarvoor relevante $\mathcal{H}_{\text{int}}$). In het boek wordt dit dan gebruikt om te laten zien dat het klassieke resultaat voor de Rutherford verstrooiing ook volgt uit Fermi’s Golden rule (zie hoofdstuk 11 van GQM voor een meer rechtstreekse aanpak via de zg. partiële golven analyse).

We gaan uit van de Hamiltonian $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{\text{int}}(t)$, waarbij (de relevante matrix elementen van) $\mathcal{H}_{\text{int}}(t)$ klein wordt verondersteld. Als volledig stelsel van basisfuncties kiezen we de eigenfuncties $|\psi_a\rangle$ van $\mathcal{H}_0$, met energie E_a , $\mathcal{H}_0|\psi_a\rangle = E_a|\psi_a\rangle$, zodat een willekeurige toestand geschreven kan worden als $|\psi(t)\rangle = \sum_a c_a(t)|\psi_a(t)\rangle = \sum_a c_a(t)e^{-iE_a t/\hbar}|\psi_a\rangle$. Indien het spectrum ook een continue deel heeft, moet men de som vervangen door de relevante integraal. In afwezigheid van interacties ($\mathcal{H}_{\text{int}} = 0$) hangt uiteraard $c_a(t)$ niet af van de tijd. Met de Schrödinger vergelijking vinden we nu de vergelijking voor $c_a(t)$ in termen van de matrixelementen van $\mathcal{H}_{\text{int}}$.

$$\dot{c}_a(t) = -\frac{i}{\hbar} \sum_b \langle \psi_a | \mathcal{H}_{\text{int}}(t) e^{-i(E_b - E_a)t/\hbar} | \psi_b \rangle c_b(t) = -\frac{i}{\hbar} \sum_b \langle \psi_a | \bar{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t) | \psi_b \rangle c_b(t), \quad (4.27)$$

waar we in de laatste gelijkheid $\bar{\mathcal{H}}_{\text{int}} \equiv e^{i\mathcal{H}_0 t/\hbar} \mathcal{H}_{\text{int}}(t) e^{-i\mathcal{H}_0 t/\hbar}$ hebben ingevoerd, waarmee het wat makkelijker is om de formele onwikkeling in machten van $\mathcal{H}_{\text{int}}$ uit te schrijven.

$$c_a(t) = \sum_b \langle \psi_a | U(t, t_0) | \psi_b \rangle c_b(t_0), \quad U(t, t_0) \equiv \text{Texp} \left(-i\hbar^{-1} \int_{t_0}^t dt' \bar{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t') \right) \quad (4.28)$$

(gewoonlijk nemen we $t_0 = 0$) waarbij Texp, de zogenaamde tijdsgeordende exponentiële integraal, een formele uitdrukking is die staat voor

$$U(t, t_0) = 1 + (i\hbar)^{-1} \int_{t_0}^t dt' \bar{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t') + (i\hbar)^{-2} \int_{t_0}^t dt' \bar{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t') \int_{t_0}^{t'} dt'' \bar{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t'') + \dots \quad (4.29)$$

De tijdsordening is hier essentieel; zelfs als $\mathcal{H}_{\text{int}}(t)$ tijdsafhankelijk is, dan nog zal $\bar{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t)$ van de tijd afhangen. Men noemt $U(t, t_0)$ ook wel de tijdsevolutie operator in het *interactiebeeld*. Als operator is het een oplossing van de vergelijking $i\hbar dU(t, t_0)/dt = \bar{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t)U(t, t_0)$, met als randvoorwaarde $U(t_0, t_0) = 1$. We kunnen in de machtreeks ontwikkeling voor $U(t, t_0)$ de term van n -de orde in feite opvatten als n interacties op tijden $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t$. Hierbij kan door de interactie op $t = t_i$ de toestand veranderen van $|\psi_{b_i}\rangle$ naar $|\psi_{b_{i+1}}\rangle$, terwijl voor $t \in [t_i, t_{i+1}]$ de toestand zich vrij (d.w.z. via $\mathcal{H}_0$) evolueert. We introduceren de *intermediare* toestanden $|\psi_{b_i}\rangle$ via de volledighedsrelatie, $1 = \sum_{b_i} |\psi_{b_i}\rangle \langle \psi_{b_i}|$. De storingsreeks kan nu in termen van diagrammen worden samengevat. Deze bestaan uit lijntjes (“propagatoren”) voor de vrije evolutie van de intermediare toestanden en punten (“vertices”) waar de interactie plaatsvindt. Dit is een voorbeeld van Feynman diagrammen in de niet-relativistische quantummechanica.

Voor de afleiding van Fermi’s Golden rule gebruikt men alleen de laagste niet triviale orde in de storingsreeks, ook wel de (1e) Born benadering genoemd,

$$c_a(t) = c_a(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' e^{-i(E_b - E_a)t'/\hbar} \langle \psi_a | \mathcal{H}_{\text{int}}(t') | \psi_b \rangle c_b(0). \quad (4.30)$$

We nemen nu aan dat $\mathcal{H}_{\text{int}}$ niet van de tijd afhangt, in welk geval de integraal over t' eenvoudig is uit te voeren. We zijn geïnteresseerd in het geval waar, vanuit een toestand $|\psi_i\rangle$, een overgang kan plaatsvinden naar de toestand $|\psi_f\rangle$. De beginvoorwaarden zijn dus $c_f(0) = 0$ en $c_i(0) = 1$, zodat de waarschijnlijkheid om het systeem in de toestand $|\psi_f\rangle$ aan te treffen gegeven wordt door (ga na)

$$|c_f(t)|^2 = |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{|1 - e^{i(E_f - E_i)t/\hbar}|^2}{(E_f - E_i)^2} = 4|\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{\sin^2(\frac{1}{2}(E_f - E_i)t/\hbar)}{(E_f - E_i)^2}, \quad \mathcal{M}_{fi} \equiv \langle \psi_f | \mathcal{H}_{\text{int}} | \psi_i \rangle. \quad (4.31)$$

Vrijwel altijd zijn de toestanden $|\psi_f\rangle$ onderdeel van een continuum, de vlakke golven nadat de deeltjes het interactie gebied (weer) hebben verlaten. Het aantal beschikbare toestanden $|\psi_f\rangle$ is voor vlakke golven gerelateerd aan het volume van de faseruimte, $\rho(E_f)dE_f = V4\pi p'^2 dp' / (2\pi\hbar)^3 [= Vp'^2 dp' (2\pi\hbar)^{-3} \int d\Omega']$, zie EqPN.(4.18) van het boek. De totale waarschijnlijkheid per tijdseenheid wordt nu gegeven door

$$W = \frac{d}{dt} \sum_f |c_f(t)|^2 = \frac{2}{\hbar} \int \langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle \frac{\sin((E' - E_i)t/\hbar)}{(E' - E_i)} \rho(E') dE', \quad \langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle \equiv \int \frac{d\Omega'}{4\pi} |\mathcal{M}_{fi}|^2. \quad (4.32)$$

We merken op dat $(E' - E_i)^{-1} \sin((E' - E_i)t/\hbar)$ een grote piek heeft bij $E' = E_i$, met een breedte $\Delta E = \hbar/t$, terwijl voor $|E' - E_i| \gg \hbar/t$ de functie sterk oscilleert en geen bijdrage geeft aan de integraal. We veronderstellen t enerzijds voldoende groot zodat we voor $|E' - E_i| < \hbar/t$ mogen aannemen dat $|\langle \psi_f | \mathcal{H}_{\text{int}} | \psi_i \rangle|^2 \rho(E')$ constant is (gelijk aan de waarde voor $E' = E_i$), maar anderzijds voldoende klein, zodat $|c_f(t)| \ll 1$ garandeert dat de 1e orde term voldoende nauwkeurig is. We vinden dan dus

$$W = \frac{2}{\hbar} \langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle \rho(E_i) \int_0^\infty dE' \frac{\sin((E' - E_i)t/\hbar)}{(E' - E_i)} = \frac{2}{\hbar} \langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle \rho(E_i) \int_{-\infty}^\infty dx \frac{\sin(x)}{x}, \quad (4.33)$$

waarbij onder de bovengestelde aannamen de grenzen voor de integratie, $0 < E' < \infty$, voor $x = t(E' - E_i)/\hbar$ tussen $-\infty$ en ∞ gekozen kunnen worden. Met $\int_{-\infty}^\infty dx x^{-1} \sin x = \pi$ volgt nu Fermi's Golden rule voor de waarschijnlijkheid per tijdseenheid (in het boek is men een toch wel belangrijke middeling over de richting van $\vec{p}'$ bij EqPN.(4.19) en (5.20) vergeten weer te geven, zie Eq.(4.32))

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} \langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle \rho(E_i). \quad (4.34)$$

Extra opgave: Laat zien dat EqPN.(4.17) in het boek, $dE' = v' dp'$, geldig is zowel in de klassieke theorie als in de relativistische theorie.

Opgaven: Maak problems 4.1, 5.1 en 5.3-5.

5e en 6e College

Behandelde stof: pg. 72 t/m 82, (§6.1 [§6.2-3 overslaan]).

Extra opmerkingen over relativistische correcties: In het boek wordt de werkzame doorsnede zoals die nodig is in de deeltjesfysica en in het bijzonder voor de DIS (Deep Inelastic Scattering, zie chap. 7) opgebouwd in stappen. De niet-relativistische quantummechanica

geeft via de Golden rule voor de Rutherford formule het klassieke resultaat, Eq.(4.25), vermenigvuldigd met $|F(\vec{q}^2)|^2$ (voor puntdeeltjes $F(\vec{q}^2) = 1$). Voor de afleiding volgen we §5.2, maar gebruiken EqPN.(4.17), (5.22), (5.31-32), en (5.34-35) met, onder verwaarlozing van de terugstoot, $|\vec{p}| = mv' = mv_a$. Bij de Mott verstrooiing is de spin van het electron, maar niet de *mogelijke* spin van het target meegenomen (gerechtvaardigd als de terugstoot te verwaarlozen is). Op pg. 73 wordt de relativistische correctie voor de Mott verstrooiing *aannemelijk* gemaakt. Tenslotte wordt de correctie besproken als het target spin $\frac{1}{2}$ heeft. In plaats van zo'n heuristische aanpak zullen we hier eerst kort de Diracvergelijking bespreken, daarna de volledig relativistische uitdrukking voor de verstrooiing van twee (verschillende) puntdeeltjes met spin $\frac{1}{2}$ geven en tenslotte de Rosenbluth formule. Door het nemen van limieten vinden we dan de juiste uitdrukkingen voor de Mott en Rutherford werkzame doorsnede.

De Diracvergelijking

Dirac stelde zich de vraag hoe een Schrödingervergelijking op te stellen die relativistisch invariant is. Gewoonlijk is de Schrödingervergelijking de quantummechanische expressie voor de niet-relativistische energie, $E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \vec{p}^2/2m + V(\vec{x})$, met $E = i\hbar\partial/\partial t$ en $p_j = -i\hbar\partial/\partial x^j$. Zelfs als we een vrij deeltje nemen, $V(\vec{x}) = 0$, is dit uiteraard in tegenspraak met $E^2 = \vec{p}^2c^2 + m^2c^4$. Vasthouden aan een Schrödingervergelijking die 1e orde in de tijd is, nam Dirac daarom als ansatz $E = \alpha^i p_i c + \beta mc^2$, met α^i en β onafhankelijk van plaats en tijd (we gebruiken de sommatieconventie, waarbij Latijnse en Griekse indices resp. de waarden 1,2,3 en 0,1,2,3 aannemen). Voor $\vec{p} = \vec{0}$ geldt dat $E^2 = m^2c^4$ en vinden we $\beta^2 = 1$. Je zou verwachten dat hieruit noodzakelijkerwijze $\beta = 1$ volgt, ofwel $E = mc^2$. Het is opmerkelijk dat Dirac de moed had hiervan af te wijken, gedwongen door de eis van relativistische invariantie! Om op eenvoudige manier in te zien waarom, nemen we eerst het meest extreme geval van een massaloos deeltje, dat immers altijd met de lichtsnelheid beweegt. In dat geval volgt uit de ansatz voor de Schrödingervergelijking ($E = \alpha^i p_i c$) en de eis van relativistische invariantie ($E^2 = \vec{p}^2c^2$) dat $\frac{1}{2}(\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i) = \delta_{ij}$. We gebruiken hier dat α^i niet van $\vec{x}$ afhangt zodat $[\alpha^j, p_i] = 0$, evenals $[p_i, p_j] = 0$. De vergelijking voor de α^i heeft geen oplossingen in het geval dat ze onderling met elkaar commuteren. Dirac concludeerde hieruit dat de α^i matrices zijn. Een eenvoudige oplossing biedt zich meteen aan in termen van de Pauli matrices,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (5.35)$$

bekend van de beschrijving van deeltjes met spin $\frac{1}{2}$, immers explciete berekening geeft $\{\sigma_i, \sigma_j\} \equiv \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij}$. De gevonden Diracvergelijking,

$$E = \vec{\sigma} \cdot \vec{p} c, \quad (5.36)$$

beschrijft inderdaad een massaloos deeltje met spin $\frac{1}{2}$. De Hamiltoniaan is identiek aan die voor een niet-relativistisch spin $\frac{1}{2}$ deeltje een magneetveld, waarbij $\vec{B}$ evenredig is met $\vec{p}$. De spin van het deeltje is dus altijd langs $\pm\vec{p}$ gericht. De heliceit, zie §5.3, is dan ± 1 . Opmerkelijk is echter dat de deeltjes met heliceit -1 een *negatieve* energie hebben!

Dit is het punt om weer terug te keren naar het geval $m \neq 0$. De Schrödingervergelijking, $E = \alpha^i p_i c + \beta mc^2$, invullen in $E^2 = \vec{p}^2c^2 + m^2c^4$ geeft nu dat naast $\frac{1}{2}\{\alpha^i, \alpha^j\} = \delta_{ij}$ en $\beta^2 = 1$,

ook moet gelden dat $\{\beta, \alpha^i\} = \beta\alpha^i + \alpha^i\beta = 0$ (ga na). Omdat iedere 2×2 matrix te schrijven is als een (complex) lineaire combinatie van σ_i en $\mathbb{1}_2$, is eenvoudig in te zien dat we naar grotere matrices moeten om een oplossing van deze vergelijkingen te vinden. Het blijkt dat 4×4 matrices voldoen. Een oplossing in de zg. Weyl representatie luidt,

$$\alpha_W^i = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix}, \quad \beta_W = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1}_2 \\ -\mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.37)$$

Andere keuzes hangen hier altijd mee samen via een unitaire (i.e. basis) transformatie. De Weyl representatie is vooral geschikt als $v \rightarrow c$, terwijl voor lage snelheden de volgende (Dirac) representatie de voorkeur heeft,

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \equiv \gamma^0, \quad \gamma^i \equiv \beta\alpha^i. \quad (5.38)$$

Met de matrices γ^μ is de Diracvergelijking te schrijven als $(-i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu + \mathbb{1}_4 mc)\psi(x) = 0$. Voor een deeltje in rust, $\vec{p} = \vec{0}$, vinden we dus $E = \beta mc^2$, zodat de bovenste twee componenten (van een complexe vier-dimensionale vector waarop de Hamiltoniaan werkt) een positieve energie hebben, terwijl voor de onderste twee componenten de energie negatief is. In beide gevallen beschrijven de twee componenten uiteraard een spin op en neer toestand. In eerste instantie probeerde Dirac de negatieve energie toestanden als protonen te interpreteren, maar dat maakte het waterstofatoom zeer instabiel.

Dirac voelde zich daardoor genoodzaakt antideeltjes in te voeren, nog voordat ze waren waargenomen. Daartoe moesten alle negatieve energie toestanden bezet worden (op een manier die overeenstemde met het uitsluitingsprincipe van Pauli). Een gat in deze zogenaamde Dirac-zee van negatieve energie toestanden correspondeert dan met een deeltje met positieve energie en een tegengestelde elektrische lading; een positron dat 5 jaar later, in 1932 door Anderson inderdaad werd waargenomen. In Feynman diagrammen worden antideeltjes beschreven door deeltjes die terugreizen in de tijd (immers tijdsomkeer is equivalent met het omkeren van het teken van de energie!)

We merken op dat kennelijk in de relativiteitstheorie het begrip van een klassiek deeltje aanpassing behoeft. De theorie wordt noodzakelijkerwijze beschreven in termen van een veeldeeltjes systeem. Deeltjesaantal is niet langer behouden (energie, impuls, lading, of iedere ander quantumgetal dat samenhangt met een symmetrie blijft natuurlijk wel behouden). Het meest dramatische voorbeeld van schending van behoud van het aantal deeltjes is uiteraard annihilatie van een electron en positron.

In het geval dat $|\vec{p}| \gg mc$, zodat βmc in de Diracvergelijking te verwaarlozen is, gedraagt een massief deeltje zich als bij de massaloze Diracvergelijking, met het verschil dat we nu vier i.p.v. twee componenten hebben. De deeltjes met een positieve energie hebben nu naast heliceit $+1$ ook heliceit -1 . De koppeling tussen deze twee heliceits toestanden vindt alleen plaats via de term βmc en kan dus verwaarloost worden als $|\vec{p}| \gg mc$. Voor relativistische snelheden is derhalve de heliceit van het deeltje behouden²

²Strikt massaloze deeltjes kunnen beschreven worden door twee componenten en komen dus alleen voor met een vaste heliceit – het antideeltje met negatieve energie heeft dan de tegengestelde heliceit. Vaste heliceit breekt de symmetrie onder spiegeling. Pariteit wordt inderdaad gebroken door de zwakke wisselwerking, vanwege een koppeling die afhangt van de heliceit, en voor het neutrino in het bijzonder alleen maar aan één van de heliceits toestanden koppelt.

We geven tot slot de vlakke golfoplossingen van de Diracvergelijking (in de Dirac representatie),

$$\psi_{E>0}(\vec{x}) = (2\pi)^{-3/2} e^{-ip \cdot x/\hbar} u^{(a)}(\vec{p}), \quad \psi_{E<0}(\vec{x}) = (2\pi)^{-3/2} e^{-ip \cdot x/\hbar} v^{(a)}(\vec{p}), \quad (5.39)$$

waarbij $p \cdot x \equiv p_\mu x^\mu = p^0 x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x} = Et - \vec{p} \cdot \vec{x}$, terwijl $u^{(a)}(\vec{p})$ en $v^{(a)}(\vec{p})$, $a = 1, 2$, de twee spin componenten voor resp. de deeltjes en antideeltjes). Expliciet worden ze gegeven door

$$\begin{aligned} u^{(a)}(\vec{p}) &= \frac{\gamma^\mu p_\mu + \mathbb{1}_4 mc}{\sqrt{2p_0(p_0 + mc)}} u_0^{(a)}, \quad p_0 = E/c = \sqrt{m^2 c^2 + \vec{p}^2}, \\ v^{(a)}(-\vec{p}) &= \frac{\gamma^\mu p_\mu + \mathbb{1}_4 mc}{\sqrt{2p_0(p_0 - mc)}} v_0^{(a)}, \quad p_0 = E/c = -\sqrt{m^2 c^2 + \vec{p}^2}, \end{aligned} \quad (5.40)$$

in termen van $u_0^{(a)}$ en $v_0^{(a)}$, de spin op en neer toestanden voor resp. het deeltje en antideeltje in het ruststelsel,

$$u_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.41)$$

Dit geeft een orthonormaal stelsel van vlakke golfoplossingen. We hebben er hier voor gekozen de norm van de golffunctie te definiëren als in de gewone quantummechanica.

Intermezzo: In de relativistische veldentheorie normeert men bij voorkeur t.o.v $d^3x/(2|p_0|)$ en moeten we in de bovenstaande definities voor $u^{(a)}(\vec{p})$ en $v^{(a)}(\vec{p})$ vermenigvuldigen met $\sqrt{2|p_0|}$. Hiermee kan men dan laten zien dat $J_\mu(x) = e\psi^\dagger(x)\gamma_0\gamma_\mu\psi(x)$ transformeert als een stroomdichtheid onder Lorentz transformaties. Ieder type geladen deeltje heeft zo zijn eigen stroomdichtheid en koppelt aan een electromagnetisch veld via $\int J_\mu(x)A^\mu(x)d^4x$ waarbij $A_\mu(x)$ de vectorpotentiaal is. Omdat we willen dat zo'n koppeling invariant is onder ijktransformaties, $A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x)$, volgt dat de stroomdichtheid behouden moet zijn, $\partial_\mu J^\mu(x) = 0$. Voor een deeltje met spin, als het electron, draagt ook het magnetisch moment geassocieerd met de spin bij aan de stroomdichtheid (zoals een kringstroom een magnetisch moment geeft). Dit is de reden waarom in het boek onderscheid wordt gemaakt tussen de zogenaamde elektrische en magnetische “form factors” (vormfuncties). De koppeling tussen twee geladen deeltje verloopt via de uitwisseling van een foton en is evenredig met $\int J_\mu(x)(x-y)^{-2}J^\mu(y)d^4xd^4y$. De uitwisseling van een foton geeft zo een factor $1/Q^2 = -1/q^2$ via Fourier transformatie van $1/x^2$ (vergelijk pg. 58). Hierbij is q precies de energie-impulsoverdracht tussen de twee geladen deeltjes bij een botsing. Dit kan allemaal generaliseerd worden naar andere dan electromagnetische krachten. Iedere kracht werkt op de bij die kracht behorende lading. Als het deeltje dat de kracht overdraagt een massa heeft, wordt $-1/q^2$ vervangen door $1/(M^2c^2 - q^2) = 1/(M^2c^2 + Q^2)$, zie §4.4. Naast de aangepaste normering, in feite noodzakelijk om waarschijnlijkheidsdichtheid (cq. ladingsdichtheid) op een Lorentz covariante wijze te definiëren, wordt echter tegelijkertijd in de relativistische versie van de Golden Rule d^3p voor ieder deeltje vervangen door $cd^3p/((2\pi)^3 2|E(\vec{p})|)$, zie GEP §6.2. De notatie van Griffiths volgende vindt men voor het

verval van een instabiel deeltje in $n-1$ andere deeltjes, $1 \rightarrow 2 + 3 + \dots + n$, de volgende partiële vervalsbreedte $d\Gamma$ (waar Griffiths Γ voor de "decay rate" gebruikt, volgen we het boek door te vermenigvuldigen met $\hbar$ en $\Gamma = \int d\Gamma = \hbar\tau^{-1}$ te definiëren als "decay width")

$$d\Gamma = |\mathcal{M}|^2 \frac{S}{2m_1} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3 \dots - p_n) \frac{cd^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{cd^3\vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \dots \frac{cd^3\vec{p}_n}{(2\pi)^3 2E_n}. \quad (5.42)$$

Het zg. invariante matrix element $\mathcal{M}$ wordt i.h.a. grafisch weergegeven door Feynman diagrammen. De factor S heet een symmetrie factor, $1/j!$ voor iedere set van j identieke deeltjes die worden geproduceerd. Merk op dat verval alleen dan kan plaatsvinden als $m_1 > m_2 + m_3 + \dots + m_n$. Voor de werkzame doorsnede, waarbij 2 deeltjes na een botsing $n-2$ deeltjes geven, $1 + 2 \rightarrow 3 + \dots + n$, vindt men (zie GEP verg.(6.34))

$$d\sigma = |\mathcal{M}|^2 \frac{\hbar^2 c S}{v} \frac{c}{2E_1} \frac{c}{2E_2} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 \dots - p_n) \frac{cd^3\vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \dots \frac{cd^3\vec{p}_n}{(2\pi)^3 2E_n}. \quad (5.43)$$

Hierbij gebruiken we dat $v \equiv (E_1 E_2)^{-1} c^3 \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2 c^4}$ de Lorentz invariante uitdrukking is voor de botsingssnelheid tussen deeltje 1 en 2, relevant voor de bepaling van de flux. Voor een fixed target experiment, waarbij $p_2 = (m_2 c; \vec{0}) = (E_2/c; \vec{0})$, vinden we inderdaad $v = |\vec{v}_1|$. In het algemeen kan men laten zien dat $v = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$, zolang de twee bundels (anti-)parallel zijn ($\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$).

Werkzame doorsnede voor electron-muon verstrooiing

We kiezen het voorbeeld van electron-muon verstrooiing omdat het muon veel zwaarder is dan het electron, en beide zich gedragen als deeltjes zonder interne structuur. Bij verwaarlozing van de interne structuur van het proton is deze formule ook geldig voor electron-proton verstrooiing.

Voordat we het resultaat bespreken is het nuttig wat meer inzicht te geven hoe Mott zijn formule (EqPN.(5.38) in het boek) heeft afgeleid. Hij gebruikte de (positieve energie) oplossingen van de Diracvergelijking, maar volgde voor de rest dezelfde afleiding als in §5.2 van het boek! Bij ongepolariseerde electronen moet je middelen over de spins van de ingaande electronen en sommeren over de spins van de uitgaande electronen. Bij deze berekening wordt dus ook de terugstoot van het muon (proton, of de kern) met massa M verwaarloosd ($E \ll Mc^2$), maar mag het electron wel relativistisch bewegen (indien $E \gg mc^2$). Je kunt nu in principe zelf de berekening van Mott herhalen (voor de liefhebbers); we zullen dat hier niet voordoen.

Als de terugstoot een rol gaat spelen kan de elektrische potentiaal niet meer als statisch beschouwd worden en is het noodzakelijk de veldentheorie te gebruiken. De details zullen we hier niet bespreken. Het resultaat is als volgt (zie bijv. GEP, problem 6.10)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\hbar^2}{64\pi^2 M} \frac{|\vec{p}'|}{|\vec{p}|} \frac{\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle}{(Mc^2 + E - (|\vec{p}|E'/|\vec{p}'|) \cos \theta)}, \quad (5.44)$$

waarbij uiteraard $|\vec{p}|c = \sqrt{E^2 - m_e^2 c^4}$, $|\vec{p}'|c = \sqrt{E'^2 - m_e^2 c^4}$, terwijl behoud van energie en impuls E' bepaald kan worden in termen van E en θ , zoals gegeven in EqPN.(5.15) van het

boek. Alle *dynamica* van de verstrooiing wordt beschreven door $\mathcal{M}$, waarbij $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$ staat voor de middeling over de spins van de ingaande deeltjes en de sommatie over de spins van de uitgaande deeltjes. Men vindt hiervoor de volgende uitdrukking (zie bijv. GEP §8.3)

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{(q^2)^2} 4\pi\alpha L_{\mu\nu}(p, p') 4\pi\alpha Z^2 L^{\mu\nu}(P, P'). \quad (5.45)$$

Het matrix element $\mathcal{M}$ bevat een foton (dit geeft een factor $1/q^2$) dat ontstaat bij de overgang van het ingaande naar het uitgaande electron, en weer geabsorbeerd wordt door het ingaande muon, dat daarbij overgaat in het uitgaande muon. Dus komt in $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$ de factor $1/(q^2)^2$ van de uitwisseling van een foton, terwijl $\alpha L_{\mu\nu}(p, p')$ komt van de interactie van het in- en uitgaande electron met het foton, en $Z^2\alpha^2 L^{\mu\nu}(P, P')$ van de interactie van het in- en uitgaande muon ($Z = -1$) met het foton. Er geldt voor spin $\frac{1}{2}$ deeltjes zonder interne structuur dat (zie bijv. GEP §8.3)

$$L_{\mu\nu}(p, p') = 2(p_\mu p'_\nu + p_\nu p'_\mu - g_{\mu\nu}(p \cdot p' - p^2)), \quad m_e^2 c^2 = p^2 = p'^2. \quad (5.46)$$

(vervang m_e door M voor $L_{\mu\nu}(P, P')$, immers $P^2 = P'^2 = M^2 c^2$). Invullen in Eq.(5.45) geeft

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = 8 \frac{(4\pi Z\alpha)^2}{(q^2)^2} ((P' \cdot p')(P \cdot p) + (P' \cdot p)(P \cdot p') - m_e^2 c^2 (P' \cdot P) - M^2 c^2 (p' \cdot p) + 2m_e^2 M^2 c^4). \quad (5.47)$$

Als we de terugstoot verwaarlozen, $E \ll Mc^2$, is $E = E'$ en dus ook $|\vec{p}| = |\vec{p}'|$. Dit invullen in Eq.(5.44),

$$E \ll Mc^2 : \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\hbar^2}{64\pi^2 M} \frac{\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle}{(Mc^2 + E(1 - \cos\theta))} = \frac{\hbar^2 \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle}{64\pi^2 M^2 c^2}, \quad (5.48)$$

waar we in de laatste stap E t.o.v. Mc^2 hebben verwaarloosd. Gebruiken we verder dat bij verwaarlozing van de terugstoot $P' = P = (Mc; \vec{0})$ en $E = E'$, dan vinden we met Eq.(5.47)

$$\begin{aligned} E \ll Mc^2 : \quad \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= 8 \left(\frac{4\pi Z\alpha Mc}{q^2} \right)^2 (2E^2/c^2 + m_e^2 c^2 - p' \cdot p) \\ &= \left(\frac{16\pi Z\alpha ME}{q^2} \right)^2 (1 - \beta^2 \sin^2(\theta/2)). \end{aligned} \quad (5.49)$$

waarbij voor de laatste gelijkheid $E^2/c^2 = m_e^2 c^2 + \vec{p}^2$ en, bij de verwaarlozing van de terugstoot, $p' \cdot p = E^2/c^2 - \vec{p}^2 \cos\theta$ gebruikt mag worden (ga na). Dit invullen in Eq.(5.48) geeft precies Mott's resultaat, EqPN.(5.36) en (5.38) in het boek!

Anderzijds, als de terugstoot niet langer verwaarloosd kan worden, dan geldt $E \gg m_e c^2$. Dit geeft $|\vec{p}| = E$, $|\vec{p}'| = E'$ en $E/E' = 1 + E(1 - \cos\theta)/Mc^2$ (zie EqPN.(5.15) van het boek), zodat Eq.(5.44) vereenvoudigt tot

$$E \gg m_e c^2 : \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\hbar^2 E'^2 \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle}{64\pi^2 M^2 c^2 E^2}. \quad (5.50)$$

Invullen van $P' = P + p - p'$ (energie-impulsbehoud) in Eq.(5.47) geeft dat (ga na)

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = 8 \frac{(4\pi Z\alpha)^2}{(q^2)^2} [2(P \cdot p')(P \cdot p) + (p' \cdot p)(P \cdot p - P \cdot p' - M^2 c^2) + m_e^2 c^2 (2P \cdot (p' - p) + M^2 c^2)]. \quad (5.51)$$

De termen evenredig met $m_e^2 c^2$ mogen we nu verwaarlozen, en aangezien $P = (Mc; \vec{0})$ vinden we het volgende vereenvoudigde resultaat,

$$\begin{aligned} E \gg m_e c^2 : \quad \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= 8M \left(\frac{4\pi Z\alpha}{q^2} \right)^2 (2MEE' + (p' \cdot p)(E - E' - Mc^2)) \\ &= 16EE' \left(\frac{4\pi Z\alpha M}{q^2} \right)^2 \left(\cos^2(\theta/2) - \frac{q^2}{2M^2 c^2} \sin^2(\theta/2) \right). \end{aligned} \quad (5.52)$$

In de laatste stap gebruikten we dat $(p' \cdot p) = E'E(1 - \cos(\theta))/c^2 = 2E'E \sin^2(\theta/2)/c^2$, terwijl uit EqPN.(5.15) in het boek volgt dat $E - E' = EE'(1 - \cos \theta)/(Mc^2)$, hetgeen met EqPN.(6.2) van het boek ook geschreven kan worden als $E - E' = -q^2/(2M)$ (ga na). De gevonden uitdrukking voor $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$ invullen in Eq.(5.50) geeft precies EqPN.(6.5) in het boek.

Om misverstanden te voorkomen geven we hier nog eens de relevante uitdrukkingen die bij het boek gebruikt moeten worden in EqPN.(6.5), en met³ $Z = 1$ in EqPN.(6.10) en (7.7), om de juiste resultaten te verkrijgen voor $E \gg m_e c^2$:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}} = \left(\frac{2Z\alpha\hbar c E'}{c^2 q^2} \right)^2, \quad \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} = \frac{E'}{E} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}}^* = \cos^2(\theta/2) \frac{E'}{E} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}}. \quad (5.53)$$

Merk op dat in de afleiding van de werkzame doorsnede voor de Rutherford (EqPN.(5.33)) en de Mott (EqPN.(5.39)) verstrooiing de terugstoot wordt verwaarloosd. Er kan dan geen onderscheid meer gemaakt worden tussen E' en E , een onderscheid dat wel nodig is om later tot de correcte relativistische formule te komen. Het is dit aspect dat onbevredigend is in de manier waarop het boek tot de resultaten komt voor $E \gg m_e c^2$.

Vormfuncties

We zullen nu de Rosenbluth formule voor elastische verstrooiing (EqPN.(6.10) in het boek) bespreken (we volgen GEP §8.3), waarbij het deeltje met massa M en lading Ze een interne structuur kan hebben. We moeten in Eq.(5.45) $L_{\mu\nu}(P, P')$ vervangen door een uitdrukking $K_{\mu\nu}(P, P')$ waarin deze interne structuur op een of andere manier verwerkt is. Om hier wat orde in te schapen gebruiken we dat $K_{\mu\nu}$ onder Lorentz transformaties als een symmetrische tensor moet transformeren. We kunnen met P en $q = P' - P (= p - p')$ slechts de volgende drie onafhankelijke combinaties maken: $P_\mu P_\nu$, $q_\mu q_\nu$ en $P_\mu q_\nu + P_\nu q_\mu$, die samen met $g_{\mu\nu}$ gebruikt kunnen worden om $K_{\mu\nu}(P, P')$ te definiëren.

De interactie met het electron vindt plaats door de uitwisseling van een foton. Dat koppelt aan $K_{\mu\nu}$ via de electromagnetische potentiaal $A_\mu(x)$. Maar deze koppeling mag

³De ladingsfactor wordt geabsorbeerd in de vorm- en structuurfuncties, anders kunnen we de formules niet gebruiken bij verstrooiing aan bijv. een neutron.

niet afhangen van de ijk die we voor $A_\mu(x)$ gebruiken. Onder een ijktransformatie gaat $A_\mu(x)$ over $A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x)$. Voor vlakke golven $A_\mu(x) = e_\mu(q) \exp(iq \cdot x/\hbar)$ en $\Lambda(x) = \lambda \exp(iq \cdot x/\hbar)$ betekent dit dat de amplitude $e_\mu(q)$ onder een ijktransformatie vervangen wordt door $e_\mu(q) + i\lambda\hbar^{-1}q_\mu$. Dit zou aanleiding geven tot extra termen evenredig met $\lambda q^\mu K_{\mu\nu}$ en $\lambda^* \lambda q^\mu q^\nu K_{\mu\nu}$, welke niet voor mogen komen; ijkinvariantie vereist dus dat $q^\mu K_{\mu\nu} = 0$.

Er resteren dan nog maar twee onafhankelijke symmetrische Lorentztensoren,

$$K_{\mu\nu}^{(1)} \equiv \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} - g_{\mu\nu}, \quad K_{\mu\nu}^{(2)} \equiv \left(P_\mu - \frac{q \cdot P}{q^2} q_\mu \right) \left(P_\nu - \frac{q \cdot P}{q^2} q_\nu \right). \quad (5.54)$$

Ieder van deze tensoren kan vermenigvuldigd worden met een Lorentzscalar die nog wel af kan hangen van $q^2 = (P' - P)^2$, de enige niet triviale Lorentzscalar die uit P en P' gedestilleerd kan worden. Immers zowel $P^2 = M^2 c^2$ als $P'^2 = M^2 c^2$. Dit laatste feit (geldig voor elastische verstrooiing) impliceert ook dat

$$K_{\mu\nu}^{(2)} = (P_\mu + \tfrac{1}{2}q_\mu)(P_\nu + \tfrac{1}{2}q_\nu) \quad (5.55)$$

(ga dit na door te laten zien dat $q^2 = -2q \cdot P$). We kunnen dus met

$$K_{\mu\nu}(P, P') = K_1(q^2) \left(\frac{q_\mu q_\nu}{q^2} - g_{\mu\nu} \right) + \frac{K_2(q^2)}{M^2 c^2} (P_\mu + \tfrac{1}{2}q_\mu)(P_\nu + \tfrac{1}{2}q_\nu), \quad (5.56)$$

de meest algemene parametrisatie van $K_{\mu\nu}(P, P')$ weergeven. Analoog aan Eq.(5.45) geldt

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{(q^2)^2} 4\pi\alpha L_{\mu\nu}(p, p') 4\pi\alpha Z^2 K^{\mu\nu}(P, P'), \quad (5.57)$$

en voor $E \gg m_e c^2$ vinden we dan

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4M^2 c^2} [2K_1(q^2) \sin^2(\theta/2) + K_2(q^2) \cos^2(\theta/2)] \frac{E'}{E} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}}. \quad (5.58)$$

Dit is precies de Rosenbluth formule, EqPN.(6.10) in het boek, waarbij $K_1(q^2)$ en $K_2(q^2)$ als volgt gerelateerd zijn aan $G_E(Q^2)$ en $G_M(Q^2)$:

$$K_1(q^2) = (2Mc)^2 \tau G_M^2(Q^2), \quad K_2(q^2) = (2Mc)^2 \frac{G_E^2(Q^2) + \tau G_M^2(Q^2)}{1 + \tau}, \quad (5.59)$$

met $Q^2 = -q^2$ en $\tau = Q^2/(2Mc)^2$.

Extra opgave: De Rosenbluth formule kan aannemelijk gemaakt worden door te laten zien dat $L_{\mu\nu}(P, P') = K_1(q^2)(-g_{\mu\nu} + q_\mu q_\nu/q^2) + K_2(q^2)(P_\mu + \tfrac{1}{2}q_\mu)(P_\nu + \tfrac{1}{2}q_\nu)/(M^2 c^2)$, met $K_1(q^2) = -q^2$ en $K_2(q^2) = 4M^2 c^2$ (de vormfuncties voor puntdeeltjes). Laat dit zien⁴.

(Fakultatief: geef de afleiding van de Rosenbluth formule.)

Opgaven: Maak problem 6.1.

⁴In plaats van uitschrijven kun je ook eerst controleren dat $q^\mu L_{\mu\nu}(P, P') = 0$, zodat $L_{\mu\nu}$ noodzakelijkerwijze de algemene vorm van Eq.(5.56) moet hebben. Omdat $L_{\mu\nu}(P, P')$ kwadratisch in de impulsen is, moet dus $K_1(q^2)$ linear in, en $K_2(q^2)$ onafhankelijk van q^2 zijn. Op grond van dimensies $K_1(q^2) = Aq^2$ en $K_2(q^2) = BM^2 c^2$, met A en B constanten. Beredeneer tenslotte dat $A = -1$ en $B = 4$.

7e College

Behandelde stof: pg. 83 t/m 95 (§7.1-4).

Om verwarring te voorkomen: het onderschrift van fig. 7.6 bevat een slordigheid. Er staat “Diagram (b) depicts the scattering in the Breit frame in which the *momentum* transferred by the virtual photon is zero.” Zoals in de tekst daaronder wordt geschreven, had er *energy* i.p.v. *momentum* moeten staan.

Extra opmerkingen over diep-inelastische verstrooiing: Als de structuur van een deeltje op heel kleine schaal willen bestuderen hebben we bundels van bij voorkeur electronen met hoge energie nodig. Alleen bij verstrooiing over een grote hoek kan dan veel energie worden overgedragen aan het te bestuderen deeltje. Het is deze energie die de resolutie van het experiment bepaalt, zie EqPN.(5.37) van het boek. Het nadeel is dat daarbij zoveel energie wordt overgedragen, dat het te bestuderen deeltje makkelijk in een aangeslagen toestand kan komen, of secundaire deeltjes geproduceerd kunnen worden. De botsing is in zo’n geval inelastisch.

Relevant is de invariante massa W ; de massa die hoort bij de 4-impuls $P' = P + q = P + p - p'$, dus $W^2 c^2 = P'^2 = M^2 c^2 + 2P \cdot q + q^2$. Bij elastische verstrooiing geldt uiteraard $W = M$. Als door de botsing het te bestuderen deeltje in een aangeslagen toestand komt, is W dus de massa van deze nieuwe toestand. Dit zal dus i.h.a. rond een vaste waarde liggen. Zitten we er net wat onder of boven, dan kan deze aangeslagen toestand niet gevormd worden. Dat is de verklaring voor het feit dat men als functie van (bijv.) de energie van het electron een piek ziet (waarvan de breedte omgekeerd evenredig is met de levensduur van de aangeslagen toestand), een zg. resonantie.

Daarnaast kunnen er natuurlijk ook andere deeltjes worden geproduceerd (fragmentatie van het te bestuderen deeltje), zolang maar aan de behoudswetten is voldaan. Bij inelastische verstrooiing zijn er nu dus twee Lorentz invariante parameters, Q^2 en W , die de kinematica van het verstrooiingsproces beschrijven. In de praktijk gebruikt men vaak $\nu \equiv P \cdot q / M$. Bij “fixed target” experimenten is dit precies $\nu = E - E'$, de op het targetdeeltje overgedragen energie, gelijk aan het verschil van de in- en uitgaande electronenergie, zie EqPN.(7.3). Vooral handig voor de beschrijving van de substructuur van het proton in termen van quarks is de schalingsvariabele van Bjørken, $x \equiv Q^2 / (2M\nu)$. Verstrooiing is elastisch dan en slechts dan als $x = 1$.

Informatie over de structuur van het proton kunnen we verkrijgen analoog aan de bepaling van de ladingsverdeling binnen een kern op basis van de elastische verstrooiing. Hiervoor hadden we de vormfuncties $K_{1,2}(Q^2)$ ingevoerd. Ook voor inelastische verstrooiing vindt de interactie plaats door het uitwisselen van een foton. Alleen, nu mogen we bij $K_{\mu\nu}(P, P')$ in Eq.(5.56) niet langer aannemen dat $P'^2 = M^2 c^2$. Immers, voor inelastische verstrooiing is juist $P'^2 = W^2 c^2 > M^2 c^2$, hetgeen een *extra* Lorentz invariante parameter geeft. Al onze onkunde wordt nu geparametriseerd door twee structuurfuncties die afhangen van *twee* Lorentz invariante parameters, Q^2 en ν , of ieder andere willekeurige combinatie van deze twee, zoals Q^2 en x . Daarnaast lag in Eq.(5.44) de energie van het uitgaande electron vast zodra de verstrooiingshoek en de ingaande energie van het electron bekend waren. Dat is nu niet langer het geval, omdat een deel van de energie gebruikt wordt voor de excitatie of

fragmentatie van het te bestuderen deeltjes (het proton). We moeten dus integreren over E' om de totale partiële werkzame doorsnede te bepalen. Omdat juist de afhankelijkheid van E' veel nuttige informatie zal bevatten, meet men de zogenaamde dubbel-differentiële werkzame doorsnede, gegeven door

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \left(\frac{\alpha\hbar}{q^2}\right)^2 \frac{E'}{E} L^{\mu\nu}(p, p') W_{\mu\nu}(P, P'), \quad (7.60)$$

waarbij in dit geval de kinematica uiteraard wat afwijkt van het elastische geval, Eq.(5.44) en Eq.(5.45). In bovenstaande uitdrukking is $W_{\mu\nu}(P, P')$ gedefinieerd analoog aan $K_{\mu\nu}(P, P')$, met alle dynamica geparametriseerd door de structuurfuncties $W_1(Q^2, \nu)$ en $W_2(Q^2, \nu)$,

$$W_{\mu\nu}(P, P') \equiv W_1(Q^2, \nu) \left(\frac{q_\mu q_\nu}{q^2} - g_{\mu\nu} \right) + \frac{W_2(Q^2, \nu)}{(Mc)^2} \left(P_\mu - \frac{q \cdot P}{q^2} q_\mu \right) \left(P_\nu - \frac{q \cdot P}{q^2} q_\nu \right), \quad (7.61)$$

waarbij rekening is gehouden met het feit Eq.(5.55) voor inelastische verstrooiing niet langer bruikbaar is. Net als bij de berekening van de Rosenbluth formule, Eq.(5.58), kan hieruit EqPN.(7.7) in het boek worden afgeleid⁵.

De Bjørken schalingsfuncties, zie EqPN.(7.12) in het boek, kunnen uiteraard niet altijd gebruikt worden. Immers bij lage energie (en dus lage resolutie) ziet het foton alleen het proton als een puntlading (Mott verstrooiing), terwijl bij hoge energie het foton de structuur binnen het proton, i.e. de quarks, ziet. In het overgangsgebied is EqPN.(7.12) niet geldig, en hangt F_a nog van Q^2 af, $F_a(x, Q^2)$. In de praktijk moeten zowel Q^2 als ν groot gekozen worden (in ieder geval $Q^2 > 1(\text{GeV}/c)^2$ en $\nu > 3.5\text{GeV}$). De afwijkingen van Bjørkenscaling nemen af voor toenemende Q^2 , $F_a(x, Q^2) \rightarrow F_a(x)$. Het feit dat $F_a(x, Q^2)$ onafhankelijk van Q^2 wordt, is natuurlijk een zeer sterke aanwijzing dat de verstrooiing bij hoge energie door puntdeeltjes binnen het proton wordt veroorzaakt.

Dat deze puntdeeltjes spin $\frac{1}{2}$ hebben volgt uit de Callan-Gross relatie, $2xF_1(x) = F_2(x)$. Dit moet in probleem 7.2 bewezen worden, maar is zo cruciaal voor een goed begrip dat we het hier behandelen. Als EqPN.(7.7) de verstrooiing aan een puntdeeltje weergeeft, moet het dus in de vorm van EqPN.(6.5) te brengen zijn. Een noodzakelijke voorwaarde is dat $W_1(Q^2, \nu) = \tau W_2(Q^2, \nu)$ (ga na). Bij de definitie van $\tau = Q^2/(2mc)^2 \equiv \tau_q$ mogen we niet langer $m = M$ (de massa van het proton) gebruiken, immers we nemen aan dat de verstrooiing via een enkel quark verloopt. Derhalve moet m de massa van het quark zijn. Om redenen die samenhangen met hogere orde quantum correcties (i.h.b. voor de lichte quarks) is het moeilijk deze massa precies vast te leggen. Dat hoeft hier ook niet, omdat we aannemen dat de verstrooiing aan het quark in goede benadering elastisch is, en in dat geval vinden we met EqPN.(7.5) $m = \frac{1}{2}Q^2/\nu$. We hebben dus

$$\frac{F_2(x)}{F_1(x)} = \frac{\nu W_2(\nu, Q^2)}{Mc^2 W_1(\nu, Q^2)} = \frac{\nu}{Mc^2 \tau} = \frac{4m^2 \nu}{MQ^2} = \frac{Q^2}{M\nu} = 2x, \quad (7.62)$$

hetgeen precies de Callan-Gross relatie is!

⁵Voor meer details zie bijv. GEP §8.4. Een extra factor c^2 bij Griffiths wordt met de conventies die het boek hanteert geabsorbeerd in de definitie van W_a . De Bjørken schalingsfuncties $F_a(x)$ komen wel overeen (vergelijk GEP verg.(8.37-38) met EqPN.(7.12) in het boek)

Uit de definitie van x , EqPN.(7.9), volgt dat $m = xM$. Dat x de fractie van de proton impuls is die het quark draagt geldt strikt gesproken echter alleen in het Breitstelsel, zie pg. 90 van het boek. Het is hierbij beter om van EqPN.(7.9) de definitie $x = Q_L^2/2P_L \cdot q_L = Q_B^2/2P_B \cdot q_B$ te gebruiken (de index B staat voor Breit- en L voor laboratoriumstelsel). In het Breitstelsel geldt *niet* langer $q = q_L = (\nu_L/c; \vec{q}_L) = ((E_L - E'_L)/c; \vec{q}_L)$, maar $q = q_B = (0; \vec{q}_B)$. Om $\vec{q}_B$ te bepalen merken we op dat in het Breitstelsel, met $|\vec{P}_B| \gg Mc$, de transversale component van de quarkimpuls, $\vec{P}_q$, wordt verwaarloosd, zodat $\vec{P}_q$ evenredig is met $\vec{P}_B$, zeg $\vec{P}_q = y\vec{P}_B$. Na de verstrooiing blijft $|\vec{P}_q|$ onveranderd, omdat er ook geen energieoverdracht is in het Breitstelsel: alleen de richting (het teken van y) is vrij te kiezen. Bij verstrooiing *moet* echter de quarkimpuls veranderen, en dus van richting omkeren! Derhalve geldt $\vec{q}_B = -2y\vec{P}_B$ (zie fig.7.6) en volgt inderdaad dat $x = Q_B^2/2P_B \cdot q_B = y$ (ga na), ofwel $\vec{P}_q = x\vec{P}_B$.

Uiteraard is het zo dat de impuls van een quark binnen het proton niet een vaste waarde heeft. Tevens zijn er tegelijk quarks van verschillende smaak (flavor) en lading z_f . Voor iedere smaak wordt de verdeling van de quark-impulsfracties beschreven door $q_f(x)$ ($\bar{q}_f(x)$ voor de anti-quarks). Iedere van deze moet vermenigvuldigd worden met het kwadraat van de lading z_f^2 (i.p.v. van een overall factor Z^2) vanwege de koppeling met het foton, zie EqPN.(7.16). Merk op dat de Bjørkenschalingsfuncties gevormd worden door een *incoherente* som van deze bijdragen. Met de Callan-Gross relatie en EqPN.(7.16) volgt

$$F_1(x) = \frac{1}{2} \sum_f z_f^2 (q_f(x) + \bar{q}_f(x)), \quad (7.63)$$

waarmee we de volgende vereenvoudiging afleiden⁶ (ga na)

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = F_1(x) \left[\frac{2x}{\nu} + \frac{2 \tan^2(\theta/2)}{Mc^2} \right] \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}}^* = \frac{4MF_1(x)}{Q^2} [x^2 + 2\tau \tan^2(\theta/2)] \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}}^* \quad (7.64)$$

Een andere bevestiging van de juistheid van het formalisme is dat EqPN.(6.5) afgeleid kan worden uit EqPN.(7.7). We moeten daartoe Eq.(7.64) *integreren* over E' . Echter E' is niet langer vrij: $\nu = E - E' = \frac{1}{2}Q^2/M$ en $x = 1$. Derhalve geldt voor een puntdeeltje met lading $Z = 1$ dat $z_f = 1$ en $q_f(x) = \delta(x - 1)$ (er is nu maar één smaak en $\bar{q}_f(x) = 0$), ofwel $F_1(x) = \frac{1}{2}\delta(x - 1)$. Essentieel is dat $F_1(x)$ een deltafunctie in x is, terwijl $d\sigma/d\Omega$ verkregen wordt door te integreren over E' (bij vaste θ), zodat met $f(x)$ een willekeurige functie van x

$$\int dE' F_1(x) f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial E'} \right)^{-1} f(1) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial E'} \left[\frac{4EE' \sin^2(\theta/2)}{2(E - E')Mc^2} \right] \right)^{-1} f(1) = \frac{Q^2}{4M} \frac{E'}{E} f(1) \quad (7.65)$$

(ga na). Met Eq.(7.64) vinden we dan inderdaad precies EqPN.(6.5) in het boek!

Extra opgave: Laat zien dat Eq.(7.64) ook geschreven kan worden als

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{F_1(x)}{2M} \left(\frac{\alpha\hbar}{E \sin(\theta/2)} \right)^2 \left[1 + \frac{2EE'}{(E - E')^2} \cos^2(\theta/2) \right]. \quad (7.66)$$

(Fakultatief: Bewijs dat EqPN.(7.7) inderdaad volgt uit Eq.(7.60) en (7.61)).

Opgaven: Maak problems 7.1, 7.3 (7.3.e is fakultatief) en 7.5.

⁶Voordat je denkt dat dit fout is, omdat de afleiding van de Callan-Gross relatie gebruikt dat $d^2\sigma/d\Omega dE'$ evenredig is met $1 + 2\tau \tan^2(\theta/2)$, roepen we in herinnering dat $\tau = Q^2/(2Mc)^2 = x^2 Q^2/(2mc)^2 = x^2 \tau_q$.

8e en 9e College

Behandelde stof: Film en demo detector kosmische straling; pg. 97 t/m 111 (§8.1-4, §A.2).

Extra opmerking over asymptotische vrijheid: Dat de sterkte van interacties af kan hangen van de energie, is als volgt in te zien. Hoe hoger de energie hoe korter de afstand waarop we een deeltje benaderen. In de electrodynamica wordt de kracht uitgewisseld door fotonen, die zelf geen lading hebben. Ze kunnen in virtuele processen wel heel kort even bijv. een electron-positron paar vormen. Tijdens de korte tijd dat die paren met tegengestelde lading worden gevormd kan er een kleine scheiding van lading optreden. Bijv. in het veld van een proton, bij de de vorming van een electron-positron paar zal het electron aangetrokken worden door het proton, terwijl het positron juist wordt afgestoten. Hierdoor wordt de lading van het proton een beetje afschermd. Deze afscherming wordt groter naarmate we dichter bij het proton komen. Op grote afstand moeten alle bijdragen bij elkaar opgeteld worden en nemen we een kleiner lading waar dan zonder deze afscherming. De effectieve lading, die de sterkte van de interactie bepaalt, neemt dus toe met afnemende afstand, ofwel met toenemende Q^2 .

In de sterke wisselwerking, waar de kracht wordt overgedragen door gluonen, vindt er evenzo afscherming van kleurlading plaats door paarcreatie van een quark en een anti-quark. Echter het gluon heeft in tegenstelling tot het foton ook een kleurlading, een combinatie van een kleur en een anti-kleur. Hierdoor zal een gluon de kleur juist proberen te verdunnen, het tegengestelde van afscherming, in het engels dan ook antiscreening genoemd. Hoe meer kleuren er zijn, des te meer verdunning; hoe meer quarks er zijn, des te meer afscherming. Dit is wat EqPN.(8.6) in het boek weergeeft, $\alpha_s(Q^2) = 12\pi/[(11n - 2n_f) \ln(Q^2/\Lambda^2)]$, waarbij $n = 3$ het aantal kleuren is. In onze wereld wint de verdunning het van de afscherming. Dat is een hele gelukkige samenloop van omstandigheden, want daardoor kunnen we bij grote Q^2 bepaalde processen in de quantum chromodynamica op betrouwbare wijze berekenen en de theorie vergelijken met het experiment. Voor lage energie is storingstheorie niet langer mogelijk en is de theorie dus veel moeilijker. Men gebruikt dan bijv. een discrete benadering voor de ruimte en de tijd en doet numerieke berekeningen. Hiermee heeft men inderdaad kunnen laten zien dat quarks niet vrij kunnen voorkomen. Een wiskundig bewijs ontbreekt echter nog steeds.

Intermezzo: Het is mogelijk om de formules voor $\alpha_s(Q^2)$ af te leiden zonder ingewikkelde veldentheorie te gebruiken. Deze berekening vraagt echter net wat meer voorkennis dan wat voor dit college verondersteld kan worden, en ik zal dus voor de liefhebbers volstaan met het geven van een referentie: “Asymptotic freedom as a spin effect”, N.K. Nielsen, American Journal of Physics 49 (1981) 1171. **Abstract:** “*It is shown how both the qualitative and the quantitative features of the asymptotic freedom of quantum chromodynamics can be understood in a rather intuitive way. The starting point is the spin of the gluon, which because of the gluon self-coupling makes the vacuum behave like a paramagnetic substance. Combining this result with the Lorentz invariance, we conclude that the vacuum exhibits dielectric antiscreening and hence asymptotic freedom. The calculational techniques are with some minor modifications those of the Landau theory on the diamagnetic properties of a free-electron gas.*” Het tijdschrift is in de bibliotheek aanwezig.

Extra opgave: Uitgaande van het feit dat *alle* quarks (in eenheden van e) een lading $-1/3 \pmod{1}$ hebben (bedenk dat het up quark een lading $2/3 = -1/3 + 1$ heeft), bewijs dat heeltallige lading van de baryonen impliceert dat ze bestaan uit clusters van drie quarks (hadronen) en/of een quark en een anti-quark (mesonen).

Opgaven: Maak problem 8.1.

10e College

Behandelde stof: pg. 113 t/m 126 (§9.1-4).

Extra opmerkingen over electron-positron verstrooiing: Tot nog toe hebben we naar verstrooiing in het zogenaamde laboratoriumstelsel gekeken, waarin het target in rust is. Vaak is echter verstrooiing in het zwaartepuntstelsel nodig, zoals bijvoorbeeld bij botsing van twee tegengesteld bewegende bundels van electronen of van protonen. Nog beter is om deeltjesproductie te bestuderen via annihilatie, zoals bij electron-positron of proton-antiproton botsingen. In het zwaartepuntstelsel voor twee deeltjes met 4-impulsen $p_1 = (E_1/c; \vec{p}_1)$ en $p_2 = (E_2/c; \vec{p}_2)$ geldt uiteraard dat $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \equiv \vec{p}$. Als we vervolgens ons beperken tot die processen waarbij er na de botsing twee (mogelijk nieuwe) deeltjes worden geproduceerd dan geldt eveneens in dit zwaartepuntstelsel dat $\vec{p}'_1 = -\vec{p}'_2 \equiv \vec{p}'$. In deze situatie heeft men de volgende uitdrukking voor de werkzame doorsnede (zie GEP verg.(6.42))

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\hbar^2 c^2}{64\pi^2} \frac{|\vec{p}'|}{|\vec{p}|} \frac{S \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle}{(E_1 + E_2)^2}, \quad (10.67)$$

analoog aan Eq.(5.44). Bijna altijd geldt $S = 1$, behalve in het geval dat de uitgaande deeltjes indientiek zijn, waarvoor $S = \frac{1}{2}$. Deze formule geldt ook voor de verstrooiingsprocessen die we eerder in het laboratoriumstelsel hebben bestudeerd met, vanwege de Lorentzinvariantie, *dezelfde* uitdrukkingen voor $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$ in termen van de 4-impulsen (ter herinnering: $\langle \rangle$ staat hier voor de middeling over de ingaande en de sommatie over de uitgaande spin polarisaties), dus met $p_1 = p$, $p_2 = P$, $p'_1 = p'$ en $p'_2 = P'$. Hier zijn de massas van de twee ingaande deeltjes i.h.a. natuurlijk niet gelijk, terwijl dat bij de annihilatieprocessen wel het geval is.

Opmerkelijk genoeg kunnen we voor $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ verstrooiing *bijna* dezelfde uitdrukking voor $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$ gebruiken als voor $e^- + \mu^- \rightarrow e^- + \mu^-$ (zie Eq.(5.45) en Eq.(5.46)),

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{(q^2)^2} 4\pi\alpha L_{\mu\nu}(p_1, -p_2) 4\pi\alpha Z^2 L^{\mu\nu}(p'_1, -p'_2). \quad (10.68)$$

waarbij nu $q = p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2$ en $p_1 \cdot p_1 = p_2 \cdot p_2 = m_e^2 c^2$, $p'_1 \cdot p'_1 = p'_2 \cdot p'_2 = M^2 c^2$, met m_e , resp. M , de massa van het electron en muon (hier is $Z = 1$). Wat opvalt is natuurlijk het minteken voor p_2 en p'_2 , geassocieerd met de 4-impuls van de antideeltjes. Zoals al eerder opgemerkt, kunnen we antideeltjes interpreteren als deeltjes die terugreizen in de tijd, zie de richting van de pijl voor antideeltjes in de Feynman diagrammen, bijv. op pg. 113 in het boek. Dit minteken voor de 4-impuls zie je ook duidelijk terug in de uitdrukking voor de

golf functie van de antideeltjes, zoals gegeven in Eq.(5.40)! Voor $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$ vinden we (ga na)

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = 8 \frac{(4\pi Z\alpha)^2}{(q^2)^2} ((p_2 \cdot p'_2)(p_1 \cdot p'_1) + (p'_2 \cdot p_1)(p'_1 \cdot p_2) + m_e^2 c^2 (p'_2 \cdot p'_1) + M^2 c^2 (p_2 \cdot p_1) + 2m_e^2 M^2 c^4), \quad (10.69)$$

ook te verkrijgen door $\{p, p', P, P'\} \rightarrow \{p_1, -p_2, p'_1, -p'_2\}$ in Eq.(5.47) te substitueren.

Merk op dat in het zwaartepuntstelsel $E_1 = E_2 = E'_1 = E'_2 \equiv E$ en $s = c^2 q^2 = 4E^2$. Voor voldoende grote energie, waar massas verwaarloosd kunnen worden ($E \gg Mc^2$), geldt $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = 8(\pi Z\alpha)^2 c^4 E^{-4} ((p_2 \cdot p'_2)(p_1 \cdot p'_1) + (p'_2 \cdot p_1)(p'_1 \cdot p_2))$. Dit is verder te vereenvoudigen tot $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = 8(\pi Z\alpha)^2 c^4 E^{-4} ((E^2/c^2 - \vec{p} \cdot \vec{p}')^2 + (E^2/c^2 + \vec{p} \cdot \vec{p}')^2)$ en tenslotte met $|\vec{p}| = |\vec{p}'| = E/c$ tot een wel heel eenvoudige uitdrukking, $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = 16(\pi Z\alpha)^2 (1 + \cos^2 \theta)$. Samen met Eq.(10.67) geeft dit dus precies EqPN.(9.4) van het boek (voor de uitdrukking bij willekeurige energie, waarbij we de massas niet kunnen verwaarlozen, zie GEP §8.2).

We zien dus hoe flexibel $L_{\mu\nu}(p, p')$ ingezet kan worden voor de berekening van werkzame doorsneden. Niet alle verstrooiingsprocessen kunnen aldus berekend worden. Een belangrijke uitzondering is het geval van verstrooiing voor identieke deeltjes, zoals electron-positron ($e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$, Bhabha) of electron-electron ($e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$, Møller) verstrooiing, waarbij $\mathcal{M}$ bepaald is door de som van twee diagrammen (zie onderaan pg. 116 van het boek). De kruistermen kunnen niet langer gevormd worden met behulp van $L_{\mu\nu}(p, p')$. Vooral bij de electron-electron verstrooiing is dit effect dramatisch, omdat het aantoonde dat verwisseling van twee electronen (zeg de uitgaande electronen) aanleiding geeft tot een minteken in de amplitude, in tegenstelling tot een plusteken bij verwisseling van twee identieke deeltjes met heeltallige spin.

Kruistermen komen natuurlijk veel vaker voor, zoals bij de berekening van hogere orde correcties, of doordat naast het foton bij annihilatieprocessen ook het Z^0 deeltje kan worden uitgewisseld, zoals aangegeven op pg. 113. Echter, omdat het Z^0 deeltje zwaar is, zal bij lage energie deze bijdrage te verwaarlozen zijn. Als een neutrino-antineutrino paar wordt geproduceerd kan echter geen foton uitgewisseld worden en moeten we in $\mathcal{M}$ de $-1/q^2 = -c^2/s = -c^2/(2E)^2$ t.g.v. de uitwisseling van foton vervangen door $1/(M_{Z^0}^2 c^2 - q^2) = c^2/(M_{Z^0}^2 c^4 - s) = c^2/(M_{Z^0}^2 c^4 - 4E^2)$. De koppeling van het Z^0 deeltje aan electronen en neutrinos wordt in goede benadering⁷ gegeven door resp. $e/\sqrt{3}$ en $e\sqrt{2/3}$ in vergelijking met een koppeling e van het foton aan het electron. De totale werkzame doorsnede voor $e^+ + e^- \rightarrow \nu + \bar{\nu}$ verstrooiing is daarom in laagste orde

$$\sigma \approx \frac{8\pi\alpha^2}{27s} \frac{(\hbar c)^2 s^2}{(M_{Z^0}^2 c^4 - s)^2}, \quad (10.70)$$

hetgeen vergeleken moet worden met EqPN.(9.5) in het boek. Vooruitlopend op wat later in meer detail zal worden besproken, zien we dat bij *lage energie* de zwakke wisselwerking niet zo zeer zwak is vanwege een kleine koppeling, maar vanwege de grote massa van het Z^0 deeltje ($91.2 \text{ GeV}/c^2$). Als de energie veel groter is dan de rustenergie van het Z^0 deeltje worden de zwakke en electromagnetische krachten vergelijkbaar in sterkte.

⁷De koppelingen worden gegeven in hoofdstuk 11 van het boek. Hier gebruiken we $\sin^2 \theta_W \approx 0.25$ als benadering voor de gemeten waarde, $\sin^2 \theta_W = 0.23$.

We zien verder dat de werkzame doorsnede dreigt te divergeren voor $\sqrt{s} = M_{Z^0}c^2$. Dit is waar de resonante productie van Z^0 deeltjes plaats zal vinden. Doordat deeltjes die geproduceerd kunnen worden (bijv. in electron-positron botsingen), omgekeerd ook uiteen kunnen vallen (in bijv. electron-positron paren) en dus instabiel zijn, wordt de singulariteit altijd vermeden doordat in de buurt van een resonantie de vervalsbreedte Γ meegenomen moet worden,

$$\sigma \approx \frac{8\pi\alpha^2}{27s} \frac{(\hbar c)^2 s^2}{(M_{Z^0}^2 c^4 - s)^2 + M_{Z^0}^2 c^4 \Gamma^2}. \quad (10.71)$$

We kunnen dit resultaat vergelijken met de Breit-Wigner formule in §9.2 van het boek, welke geldig is in de buurt van een resonantie, dus voor dit specifieke geval

$$\sigma \approx \frac{3\pi\hbar^2}{4|\vec{p}|^2} \frac{\Gamma_e \Gamma_\nu}{(M_{Z^0} c^2 - E_{tot})^2 + \Gamma^2/4}. \quad (10.72)$$

Merk op dat we voor E in EqPN.(9.7) en (9.8), de totale energie moeten gebruiken, $E_{tot} = 2E_{bundel} = \sqrt{s}$, dat de gereduceerde golflengte $\hbar/|\vec{p}|$ voor de relativistisch electronenergie $E \approx \frac{1}{2}M_{Z^0}c^2 \gg m_e c^2$ gegeven wordt door $\hbar c/E_{bundel} = 2\hbar c/\sqrt{s}$, en dat uiteraard $E_0 = M_{Z^0}c^2$. Dit geeft dus voor de Breit-Wigner formule

$$\sigma \approx \frac{3\pi(\hbar c)^2 \Gamma_e \Gamma_\nu / s}{(M_{Z^0} c^2 - \sqrt{s})^2 + \Gamma^2/4} = \frac{3\pi(\hbar c)^2 (M_{Z^0} c^2 + \sqrt{s})^2 \Gamma_e \Gamma_\nu / s}{(M_{Z^0}^2 c^4 - s)^2 + (M_{Z^0} c^2 + \sqrt{s})^2 \Gamma^2/4}. \quad (10.73)$$

In de buurt van de resonantie, waar $s \approx M_{Z^0}^2 c^4$, is dit dus ook te schrijven als

$$\sigma \approx 12\pi(\hbar c)^2 \frac{\Gamma_e \Gamma_\nu}{(M_{Z^0}^2 c^4 - s)^2 + M_{Z^0}^2 c^4 \Gamma^2} \approx \frac{12\pi\Gamma_e \Gamma_\nu}{s M_{Z^0}^2 c^4} \frac{(\hbar c)^2 s^2}{(M_{Z^0}^2 c^4 - s)^2 + M_{Z^0}^2 c^4 \Gamma^2} \quad (10.74)$$

De eerste identiteit geven we omdat dit precies EqPN.(11.9) in het boek is. Uit de tweede identiteit lezen we, na vergelijking met Eq.(10.71), af dat $\Gamma_e \Gamma_\nu \approx 2\alpha^2 M_{Z^0}^2 c^4 / 81$. Omdat, t.o.v. het electron, de koppeling van het neutrino aan het Z^0 deeltje (in benadering) een factor $\sqrt{2}$ groter is, geldt dat⁸

$$\Gamma_e \approx \frac{1}{2}\Gamma_\nu, \quad \Gamma_\nu \approx \frac{2\alpha}{9} M_{Z^0} c^2. \quad (10.75)$$

Tot slot is het nog nuttig om iets meer te zeggen over de Breit-Wigner formule. Deze kan op een mooie manier afgeleid worden uit algemene principes, op basis van behoud van waarschijnlijkheid (de unitariteit van de verstrooiingsmatrix), hetgeen verklaart waarom de resonante bijdrage aan de werkzame doorsnede altijd uitgedrukt kan worden in termen van de totale vervalsbreedte en die voor het ingaande en uitgaande kanaal, $\Gamma_{i,f}$ (zie EqPN.(9.8)). Als in het boek, kunnen we er hier niet veel verder op ingaan, maar de spinafhankelijkheid is wel eenvoudig te verklaren (zie EqPN.(9.7)). Een vervalsbreedte Γ beschrijft het proces van een deeltje met spin J dat vervalt in twee deeltjes met spin s_a en s_b . Zoals altijd moeten we daarbij sommeren over de uitgaande spins (s_a en s_b) en middelen over de ingaande spin

⁸In §11.2 van het boek wordt gegeven dat $\Gamma_\nu = \alpha M_{Z^0} c^2 / (6 \sin^2(2\theta_W))$ (gebruik EqPN.(11.17-22)). Met $\sin^2 \theta_W \approx 1/4$ volgt inderdaad het resultaat voor Γ_ν in Eq.(10.75).

(J). Echter, bij de vorming van de resonantie loopt het proces in omgekeerde richting. Wat betreft de bijdrage van Γ_i moeten we dan eigenlijk sommeren over de spin van de resonantie en middelen over de spins van de ingaande deeltjes; $(2J+1)/((2s_a+1)(2s_b+1))$ geeft precies de noodzakelijke correctie.

Om verwarring te voorkomen: Op pg. 121 wordt de Zweig rule uitgelegd aan de hand van het verval van het ϕ deeltje. Voor het verval in pionen zijn er géén quarklijnen die de in- en uitgaande toestanden verbinden en is meervoudige gluon uitwisseling nodig, in tegenstelling tot het verval in kaonen, waar slechts één gluon uitgewisseld hoeft te worden. Voor het verval in kaonen is dit gluon niet getekend in de figuur boven aan pg. 121 en voor het verval in pionen zijn de drie gluonen niet geheel juist weergegeven in de figuur onderaan die pagina. Het uitgangspunt is dat de nodige quark-antiquark paren gevormd worden door gluonen. Bij het verval in kaonen beginnen we bijvoorbeeld met een groen s quark, dat overgaat door gluon emissie in een rood s quark. Dit g_r gluon vormt dan een groen up quark en een anti-rood up anti-quark paar. Het K^- bestaat zo uit een rood s quark en een anti-rood up anti-quark, terwijl het K^+ wordt gevormd door het groene up quark en het anti-groene s anti-quark (dat dus niet van kleur verandert). Bij het verval in pionen vormt uiteraard ieder van de drie gluonen een van de drie quarkparen, dus twee van de gluonen zijn in het boek niet goed weergegeven⁹.

Extra opgaven: i) Gebruik de lepton universaliteit (§9.1) om te laten zien dat de Z^0 -resonante bijdrage aan de werkzame doorsnede voor $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ ongeveer de helft is van die voor $e^+ + e^- \rightarrow \nu + \bar{\nu}$.

ii) Bij het verval van het ϕ deeltje in twee kaonen kan men het gluon ook laten uitwisselen door het s anti-quark. Teken hiervoor zelf een van de mogelijke processen onder vermelding van de kleuren. Werk ook voor het verval in pionen een voorbeeld uit waarin alle kleuren en de gluonen correct zijn weergegeven.

Opgaven: Maak problems 9.1-2.

11e College

Behandelde stof: pg. 127 t/m 148 (§10.1-5, [§10.6 alleen lezen ter informatie]).

Extra opmerkingen over neutrino-electron verstrooiing: In het boek wordt de totale werkzame doorsnede voor neutrino-electron verstrooiing in het zwaartepuntstelsel van het ingaande neutrino en electron gegeven door EqPN.(10.11). Voor dit proces, op basis van de uitwisseling van een W -deeltje, geldt dat (met $\alpha_W \equiv g^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) = \alpha g^2/e^2$)

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = 2 \frac{(4\pi\alpha_W)^2}{(q^2 - M_W^2 c^2)^2} (p_{\nu_\mu} \cdot p_{e^-})(p_{\nu_e} \cdot p_{\mu^-}), \quad q = p_{e^-} - p_{\nu_e} = p_{\nu_\mu} - p_{\mu^-}. \quad (11.76)$$

Aangezien verondersteld wordt dat $-q^2 = Q^2 \gg m_\mu^2 c^2$, kunnen we gebruiken dat (ga na) $p_{\nu_\mu} = (E/c; \vec{p}) = (|\vec{p}|; \vec{p})$, $p_{e^-} = (E/c; -\vec{p})$, $p_{\nu_e} = (E/c; \vec{p}')$, $p_{\mu^-} = (E/c; -\vec{p}')$ en dus

⁹Bij verval in $\rho^+ + \pi^-$ via de uitwisseling van drie gluonen is één van de gluonlijnen niet goed getekend.

$q^2 = -(\vec{p} - \vec{p}')^2 = -2(1 - \cos \theta)E^2/c^2$. In het zwaartepuntstelsel volgt met Eq.(10.67) dat

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\hbar^2 c^2 \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle}{64\pi^2 s} = \frac{(4\pi\alpha_W \hbar c)^2 s}{128\pi^2 (M_W^2 c^4 + \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)s)^2} \quad (11.77)$$

(ga na¹⁰). De totale werkzame doorsnede wordt nu gevonden door te integreren over de ruimtehoek,

$$\sigma = \int_0^\pi d\theta \sin \theta \frac{(4\pi\alpha_W \hbar c)^2 s}{64\pi (M_W^2 c^4 + \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)s)^2} = \frac{2(4\pi\alpha_W \hbar c)^2 s}{64\pi M_W^2 c^4 (M_W^2 c^4 + s)}. \quad (11.78)$$

Gebruiken we tenslotte de definitie van G_F (zie EqPN.(10.4) in het boek), dan vinden we inderdaad het resultaat van EqPN.(10.11), geldig zolang $s \gg m_\mu^2 c^4$.

In het boek wordt in EqPN.(10.8) de lage energie benadering voor EqPN.(10.11) gegeven. De afleiding was gebaseerd op dimensie overwegingen. Echter, bij lage energie zou je verwachten dat de massas van het electron en muon voor correcties zorgen (er geldt niet langer dat $E = |\vec{p}|c$). Het in EqPN.(10.8) gegeven resultaat is daarom alleen geldig als voldaan is aan $m_\mu \ll \sqrt{s}/c^2 \ll M_W$. In de extra opgave moet je laten zien dat

$$\sigma = \frac{G_F^2}{\pi(\hbar c)^4} s \cdot \left(1 - \frac{m_\mu^2 c^4}{s}\right)^2, \quad m_e^2 c^4 \ll s \ll M_W^2 c^4, \quad (11.79)$$

in de limiet waar *niet* de muon massa (maar *wel* de electron massa) wordt verwaarloosd. Met andere woorden, dat EqPN.(10.8) met de correctiefactor $(1 - m_\mu^2 c^4/s)^2$ vermenigvuldigd moet worden.

Om verwarring te voorkomen: Bij EqPN.(10.22) in het boek wordt met $|\mu_1\rangle$ uiteraard $|\nu_1\rangle$ bedoeld, terwijl in EqPN.(10.24) geen factor $\hbar$ hoort voor te komen. Daar is ook een kwadraat weggevallen, er had moeten staan $E_{\nu_i} \approx pc(1 + \frac{1}{2}m_{\nu_i}^2 c^4/(pc)^2) = pc(1 + \frac{1}{2}m_{\nu_i}^2 c^2/p^2)$.

Extra opmerking over diep-inelastische neutrino verstrooiing (§10.6): De essentie is dat in de zwakke wisselwerking de koppeling aan het quark afhangt van de heliceit, en dat daardoor in neutrino en anti-neutrino verstrooiing op slinkse wijze onderscheid gemaakt kan worden tussen de quark ($q_f(x)$) en anti-quark ($\bar{q}_f(x)$) impulsfractie-verdelingsfuncties. Dit is duidelijk uit fig.10.2 en EqPN.(10.29-30) af te lezen, maar het zou ons te ver voeren de formules hier verder toe te lichten.

Extra opgave: Waarom geldt bij lage energie dat Eq.(11.76) over gaat in $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = 2(g/(M_W c))^4 (p_{\nu_\mu} \cdot p_{e^-})(p_{\nu_e} \cdot p_{\mu^-})$. Als we de massas van het electron en de neutrinos verwaarlozen geldt als eerder $p_{\nu_\mu} \cdot p_{e^-} = 2E^2/c^2 = \frac{1}{2}s/c^2$, maar dit is niet langer gelijk aan $p_{\nu_e} \cdot p_{\mu^-}$. Laat eerst zien dat $\vec{p}' = \vec{p}_{\mu^-} = -\vec{p}_{\nu_e}$ en $|\vec{p}'| = E_{\nu_e}/c$, terwijl $E_\mu^2 = E_{\nu_e}^2 + m_\mu^2 c^4$. Waarom geldt $E_{\nu_e} + E_\mu = |\vec{p}_{\nu_\mu}|c + |\vec{p}_{e^-}|c = 2|\vec{p}|c = 2E$. Laat hiermee nu zien dat $p_{\nu_e} \cdot p_{\mu^-} = 2EE_{\nu_e}/c^2$ en dat $E_{\nu_e} = E(1 - (\frac{1}{2}m_\mu c^2/E)^2) = E(1 - m_\mu^2 c^4/s)$. Gebruik tenslotte Eq.(10.67) om het resultaat uit Eq.(11.79) te vinden.

Opgaven: Maak problems 10.1-4 en 7.4a.

¹⁰Bedenk dat uit $|\vec{p}| = |\vec{p}'| \gg m_\mu$ volgt dat $p_{\nu_\mu} \cdot p_{e^-} = p_{\nu_e} \cdot p_{\mu^-} = E^2/c^2 + \vec{p}^2 = 2E^2/c^2 = \frac{1}{2}s/c^2$.

12e College

Behandelde stof: pg. 149 t/m 166 (§11.1-2, §12).

Extra opmerking over neutrinos: In het boek wordt onder EqPN.(11.22) gezegd dat men gelooft dat er geen rechtshandige neutrinos in de natuur voorkomen. Dat was de situatie voordat men heeft ontdekt dat neutrinos een massa hebben (de mogelijkheid dat het electron neutrino massaloos is kan nog niet worden uitgesloten). Voor deeltjes met massa is de heliceiteit niet behouden, zodat er naast het linkshandig neutrino dat koppelt aan de $W^\pm$ en Z^0 deeltjes, er ook een rechtshandig neutrino moet zijn. Zulke rechtshandige neutrinos koppelen echter niet (rechtstreeks) aan de $W^\pm$ en Z^0 deeltjes, en de conclusie in het boek dat $T_3 = z_f = \hat{g}_R = 0$ is dus nog steeds correct.

Opgaven: Maak problem 11.1.

13e College – laatste college

Behandelde stof: pg. 315[311] t/m 333[329] (§19.3-5).

Extra opmerking over de big bang: Op pg. 321[317] wordt in het boek gezegd dat als in het Friedmann model de gemiddelde dichtheid gelijk is aan die van de kritische dichtheid, dat dan het heelal asymptotisch een begrensende afmeting zou bereiken. Bedoeld wordt dat de snelheid van expansie asymptotisch naar nul gaat. De afmeting van het heelal gaat nog steeds naar oneindig, $R(t) \propto t^{2/3}$. In dit eenvoudige model wordt de leeftijd van het heelal gegeven door $t_0 = 2/(3H_0)$, i.p.v. EqPN.(19.4). Toch geeft $t_0 = 1/H_0$ op basis van de recente metingen met o.a. de WMAP satelliet *effectief* de juiste leeftijd, $t_0 = 13.7$ miljard jaar en $H_0 = 71 \text{ km s}^{-1}/\text{Mpc}$. Dat komt omdat naast de donkere materie ook het effect van de zogenaamde donkere energie (cq. cosmologische constante) meegenomen moet worden.

Opgaven: Maak problems 19.1-3.

EINDE