INLEIDING IN DE SPECIALE RELATIVITEITSTHEORIE

Gebaseerd op syllabus van Dr. P.J.M. Bongaarts

Prof. Pierre van Baal

Instituut-Lorentz

Najaar 2001

Inhoud

Voorwoord

In het voorjaar van 1998 werd de syllabus van Dr. P.J.M. Bongaarts gebruikt, aangevuld met tekst die de vele gedachtenexperimenten en fysische achtergronden van de theorie besprak en waarin 23 opgaven waren verwerkt. Deze opgaven zijn evenzeer een belangrijk onderdeel van de leerstof. De meerderheid van de studenten vond, naast de aanvulling, het detail waarmee de formele aspecten werden uitgewerkt in de syllabus van Dr. Bongaarts prettig. Ik heb daarom besloten dat aspect grotendeels te handhaven en de syllabus van Dr. Bongaarts samen met de aanvulling en opgaven uit het voorjaar van 1998 te verwerken tot één geheel. Ik heb van de oorspronkelijke tekst de laatste twee hoofdstukken herzien - daar waar het te formeel óf te technisch werd - en samengevoegd. Ik ben Dr. Bongaarts dankbaar voor het beschikbaar stellen van de tekst van zijn syllabus en de studenten die het college in het voorjaar van 1998 (en 1999) hebben gevolgd, voor hun commentaren. In het voorjaar van 2000 zijn correctie van typefouten, en vereenvoudigingen op pag. 23 en 24 doorgevoerd. Deze druk (december 2001) bevat een vereenvoudiging in paragraaf 8.1 en de correctie van slechts een enkele drukfout, maar is voor de rest onveranderd van opzet.

Naast de syllabus is er ook een *Webpagina*, waarin veel extra informatie te vinden is, zoals extra vraagstukken ter oefening van de stof en uitwerkingen. Het adres van deze Webpagina is **http://www.lorentz.leidenuniv.nl/vanbaal/relative.html**. U wordt sterk aangeraden deze pagina regelmatig te bekijken.

Er bestaat een groot aantal leerboeken die ter verdere verdieping van de stof geraadpleegd kunnen worden. Bijv. *Special relativity* van A.P. French (is verschenen als nederlandse vertaling in de serie Prisma-Technica, no. 47, *Speciale relativiteitstheorie*, Het spectrum, 1971) en vooral hoofstukken 15-17 van de befaamde *Feynman Lectures on Physics* Vol.I, Addison-Wesley, 1963. Als een eerste inleiding is het boek *Einstein's Mirror* van Tony Hey and Patrick Walters (Cambridge University Press, 1997) aan te bevelen. Hierin komen ook de recente inzichten ter spraken: van zwarte gaten, superstrings tot .... science fiction. Dit boek houdt het midden tussen een leerboek en een populair wetenschappelijke verhandeling, maar is vooral nuttig om aan de conceptuele aspecten van de theorie te wennen en ter illustratie van de verwevenheid van de relativiteitstheorie met een veelheid van verschijnselen in de natuur- en sterrenkunde. Ongenoemd mag ook niet blijven de semi-populaire verhandeling van de meester zelf, *Relativiteit, de speciale en algemene theorie* Albert Einstein, Het Spectrum, 1987. De oorspronkelijke Duitse uitgave is van 1916! En tenslotte, nu we het toch over populaire verhandelingen hebben, waarlijk meesterlijk is het *Mr. Tompkins in Paperback* van George Gamow, Cambridge University Press, 1965. Wel haast een absolute must voor iedere eerstejaars!

1 Inleiding

De natuurkunde ontwikkelt zich over lange perioden geleidelijk; de vooruitgang vindt plaats in kleine stappen. Zo nu en dan komen er echter nieuwe ideeën naar voren die tot echte revoluties leiden. In de 20e eeuw zijn er twee van zulke ingrijpende vernieuwingen geweest: de relativiteitstheorie en de quantumtheorie.

De quantumtheorie:

De quantumtheorie gaf een antwoord op fundamentele vragen die er rond 1900 bestonden in de atoomfysica. Een centraal probleem was het discrete karakter van de atoomspectra. De nieuwe theorie, die dit verschijnsel op een bevredigende manier verklaarde, werd in 1924 als Quantummechanica geïntroduceerd door Schrödinger, Heisenberg en Born. Voorlopers waren Planck en Bohr.

De technische toepassingen van de quantummechanica zijn zeer belangrijk. Zonder quantummechanica geen transistoren, geen chips en dus geen computers. Ook geen lasers en dus geen CD-spelers. Zonder de quantummechanica zou de wereld om ons heen er anders uit zien.

De quantummechanica is gebaseerd op nieuwe en intrigerende ideeën. Fysische voorstellingen die vanzelfsprekend lijken moeten we laten varen. Om de quantummechanica goed te begrijpen moet men bovendien nogal wat wiskunde leren: lineaire algebra, matrix theorie en Fourier analyse.

De relativiteitstheorie:

Rond 1900 was er ook een fundamenteel fysisch probleem dat te maken had met de voortplanting van het licht. Nauwkeurige experimenten hadden aangetoond dat de lichtsnelheid onafhankelijk was van de bewegingstoestand van de waarnemer. Onderzoekers als Lorentz en Poincaré hadden onafhankelijk van elkaar interessante ideeën hierover geformuleerd. Een volledige oplossing van het probleem werd gegeven door de relativiteitstheorie. Deze was een schepping van Albert Einstein. Hij introduceerde in een publicatie in 1905 de Speciale Relativiteitstheorie, waarin hij een nieuwe opvatting gaf van de begrippen ruimte en tijd, en vooral van het verband tussen die twee. In 1912 formuleerde hij de Algemene Relativiteitstheorie, waarin hij zijn ideeën verder uitbreidde en daarbij een nieuwe beschrijving van de zwaartekracht ontwikkelde.

Wat toepassingen betreft is de relativiteitstheorie veel minder belangrijk dan de quantumtheorie. In onze alledaagse omgeving zien we er geen gevolgen van. Verschillen tussen een beschrijving door middel van de relativiteitstheorie en een met behulp van de niet-relativistische mechanica treden alleen op in omstandigheden waarbij we te maken hebben met extreem hoge snelheden. In de atoom en molecuulfysica is dit nog niet het geval; pas bij de kernfysica en de elementaire deeltjes fysica, waar het om zeer hoge energieën en dus ook om hoge snelheden gaat, wordt de speciale relativiteitstheorie onmisbaar. De grote deeltjesversnellers zouden niet werken als er bij de constructie geen rekening was gehouden met de wetten van de speciale relativiteitstheorie. De algemene relativiteitstheorie speelt zelfs op dit gebied nog geen rol. Alleen in de astronomie zijn er enkele kleine effecten die experimenteel aantoonbaar zijn. Opmerkelijk is daarbij vooral de studie aan de dubbelpulsar PSR 1913+16 waarbij vele relativistische effecten zijn waargenomen, inclusief het indirecte bewijs van het bestaan van gravitatiegolven, alles in opmerkelijke overeenstemming met Einsteins algemene theorie. J.H. Taylor en R.A. Hulse hebben voor dit werk in 1993 de Nobelprijs kregen. Ook bij de structuur van zeer compacte objecten, zoals witte dwergen en neutronensterren speelt de relativiteitstheorie een belangrijke rol, een rol die pas echt dramatische wordt bij zwarte gaten (we zullen daar tijdens het college een paar korte opmerkingen over maken). Ook bij de beschrijving van het heelal speelt de algemene theorie een belangrijke rol.

Los van de fysisch waarneembare gevolgen heeft de relativiteitstheorie vanaf het begin een grote aantrekkingskracht uitgeoefend door de fraaie en verrassende algemene inzichten waar ze toe leidde. De algemene relativiteitstheorie, dus de Einsteinse theorie van de gravitatie, vergt meer wiskundige kennis, al zijn er bepaalde aspecten - die we op het college aan zullen stippen, die wel eenvoudig te begrijpen zijn. Voor een goed begrip van de speciale relativiteitstheorie is geen ingewikkelde wiskundige kennis noodzakelijk. Einsteins nieuwe inzichten in ruimte en tijd, en enkele gevolgen er van, kunnen heel goed worden begrepen met alleen VWO wiskunde. Dit maakt het mogelijk al in dit eerste studiejaar een inleiding te geven in Einsteins speciale relativiteitstheorie. We zullen in deze nieuwe opzet van het college ook uitgebreid stilstaan bij een groot aantal belangrijke gedachtenexperiment - hun verbluffende eenvoud en het diepe inzicht dat daaruit volgt kenmerkt veel van het werk van Einstein.

We maken nog enkele opmerkingen, eerst een algemene opmerking over de relatie tussen “oude” en “nieuwe” theorieën: In de natuurkunde kan het gebeuren dat men tengevolge van veranderde inzichten en van de resultaten van bepaalde experimenten een nieuwe theorie invoert die in de plaats komt van een bestaande en tot dusver algemeen aanvaarde theorie. Dit betekent maar zelden dat de oude theorie “fout” is. Zo is bijvoorbeeld de klassieke mechanica van Newton niet “fout” omdat we nu de Einsteinse relativiteitstheorie hebben. De meeste mechanische verschijnselen om ons heen worden nog steeds op zeer nauwkeurige manier door de traditionele Newtonse mechanica beschreven. We zouden er de relativiteitstheorie wel op mogen en ook kunnen toepassen, want we menen dat deze theorie voor alle verschijnselen geldt, maar dat zou ons geen voordeel opleveren; het zou alleen maar nodeloos ingewikkeld zijn. Pas bij verschijnselen zoals die optreden in een deeltjesversneller, waar we immers te maken hebben met zeer hoge snelheden, zou de Newtonse mechanica verkeerde resultaten geven en moeten we de relativistische mechanica gebruiken. De nieuwe theorie heeft dus een groter toepassingsgebied - we kunnen zelfs denken dat ze algemeen geldt - maar de oude theorie behoudt haar waarde voor een kleiner gebied van verschijnselen, waar ze gebruikt kan worden als een zeer goede benadering van de nieuwe algemenere theorie.

We kunnen zeggen dat in de eerste helft van de 20e eeuw de klassieke mechanica in twee verschillende richtingen is generaliseerd: door de quantummechanica en door de relativiteitstheorie. Ze is op een bepaald gebied voor beide theorieën nog een zeer goede en bruikbare benadering. Men kan zich afvragen of er misschien een nog algemenere theorie is die beide generalisaties omvat: Is er een relativistische quantumtheorie? Als men zich tot de speciale relativiteitstheorie beperkt wordt dit probleem opgelost door de relativistische quantumveldentheorie waarmee bijvoorbeeld Dirac het bestaan van anti-deeltjes voorspelde; met de algemene theorie erbij is het probleem nog helemaal open - U heeft allemaal wel van de snaartheorie gehoord, die poogt juist dit probleem op te lossen. In de elementaire deeltjes fysica wordt het vinden van zo'n theorie die quantumtheorie en algemene relativiteitstheorie verenigt dan ook als de meest belangrijke theoretische uitdaging beschouwd.

2 Het Relativiteitsprincipe

Om de relativiteitstheorie en in het bijzonder de relativistische mechanica goed te kunnen begrijpen is het nodig om haar te vergelijken met de niet-relativistische mechanica. We moeten daarbij nagaan wat de verschillen maar ook wat de overeenkomsten tussen beide zijn.

Wat men nu meestal niet-relativistische mechanica noemt, was natuurlijk rond 1900 gewoon de mechanica zonder meer, een als algemeen geldig beschouwde theorie, gebaseerd op ideeën van Galileo en vooral Newton, en daarna door vele anderen verder uitgewerkt tot een bevredigend en sluitend geheel. We zullen de aanduiding Newtonse mechanica gebruiken. De relativistische mechanica zullen we ook wel Einsteinse mechanica noemen.

Er is in de natuurkunde een belangrijk algemeen principe dat betrekking heeft op het verband tussen waarnemingen van dezelfde fysische verschijnselen in verschillende coördinaatsystemen. Het zegt ruwweg dat er op een bepaalde manier geen absoluut onderscheid gemaakt kan worden tussen rust en beweging die rechtlijnig is en constante snelheid heeft.

Denk aan de situatie in een rijdende trein: Stel dat we ons in een trein bevinden die met een constante snelheid over een rechte spoorbaan rijdt. De rails is een ideale rails; we voelen geen schokken. Zolang we niet naar buiten kijken merken we niets van de snelheid van de trein. We kunnen in onze trein allerlei mechanische proeven doen. De resultaten beschrijven we in termen van een ruimtelijk assenstelsel. Het natuurlijke assenstelsel in onze situatie is vanzelfsprekend een rechthoekig stelsel dat met de trein meebeweegt. We vinden dan dat alles precies gaat zo als we het gewend zijn; de mechanische wetten geschreven in de coördinaten van dit stelsel hebben de gebruikelijke vorm.

Dit principe is voor het eerst opgemerkt in het kader van de Newtonse mechanica. Later is men het gaan beschouwen als iets dat geldig zou moeten zijn voor alle fysische verschijnselen: Men veronderstelt dan algemeen dat de natuurwetten het zelfde zijn in coördinaatstelsels die zich met eenparige rechtlijnige snelheden ten opzichte van elkaar bewegen. Dit principe wordt wel het *principe van de relativiteit van beweging* of kortweg het *relativiteitsprincipe* genoemd. In deze zin moeten we dus de Newtonse mechanica als "relativistisch" beschouwen!

In de tweede helft van de 19e eeuw werd door Maxwell een theorie geformuleerd die op een samenhangende manier alle electromagnetische verschijnselen beschreef. Deze theorie werd naast de mechanica de tweede pijler waarop het gebouw van de klassieke natuurkunde kwam te rusten. Het belangrijkste element in de Maxwellse theorie is het begrip veld. Hiervoor geldt een stelsel van algemene vergelijkingen. Het bleek dat ook licht van electromagnetische aard is: Het is een golfbeweging die zich volgens de Maxwellse vergelijkingen in het vacuum met een constante snelheid voortplant. Deze snelheid is gemeten en bedraagt ongeveer 300.000 km per seconde. Men zou verwachten dat twee waarnemers die zich ten opzichte van elkaar bewegen andere snelheden voor het licht zouden moeten vinden. Dit blijkt niet zo te zijn, zoals geconcludeerd kan worden uit experimenten die in 1887 door Michelson en Morley werden gedaan. We zullen dit verderop uitleggen en laten zien hoe dit op het eerste gezicht in tegenspraak is met de ideeën achter het relativiteitsprincipe. Einstein analyseerde deze situatie en merkte op dat de gebruikelijke interpretatie van het relativiteitsprincipe weliswaar erg voor de hand lag, maar toch niet de enigst mogelijke was. Hij introduceerde een nieuwe minder vanzelfsprekende interpretatie, waarmee het mogelijk was om de contradicties op te heffen; dit werd het uitgangspunt van zijn *speciale relativiteitstheorie*. We gaan een en ander nu in detail bespreken.

Samenvattend:

De klassieke natuurkunde (de natuurkunde voor ongeveer 1900) bestond uit
1. Newtonse mechanica
2. Maxwellse theorie van het electromagnetisme.

Men kende een principe van de relativiteit van beweging. Het was geldig voor de mechanica. Voor het electromagnetisme leidde het tot een contradictie. Einstein gaf een nieuwe interpretatie van dit principe. Hierdoor verdween de contradictie en ontstond de speciale relativiteitstheorie

3 Inertiaalsystemen

We gaan eens wat nauwkeuriger kijken naar de situatie zoals die optreedt bij de rijdende trein waar we eerder over spraken. Dus twee waarnemers die zich ten opzichte van elkaar eenparig rechtlijnig bewegen. Ieder van de twee waarnemers heeft voor zich zelf een ruimtelijk assenstelsel dat met hem meebeweegt. Een natuurlijk assenstelsel is een z.g. Euclidisch assenstelsel, met rechthoekige ruimtelijke coördinaten. Voorwerpen kunnen worden gedraaid en verschoven; hun meetkundige eigenschappen veranderen daarbij niet; er is in de ruimte om ons heen een evident begrip van lengtes en hoeken. De plaats van de oorsprong van het assenstelsel doet er niet toe en ook de richting van de assen niet. We nemen aan dat onze beide waarnemers zich ieder in zo'n rechthoekig assenstelsel bevinden, en dat ze beiden over een klok van het zelfde type beschikken. Ze kunnen dan allebei elementaire metingen doen. Ze kunnen lengtes, tijdsintervallen en dus ook snelheden bepalen. In de situatie waarbij de ene waarnemer zich in een met constante snelheid rijdende trein bevindt en de andere er buiten een stationaire positie gekozen heeft, nemen ze allebei het zelfde belangrijke feit waar:

Een voorwerp dat aan zich zelf wordt overgelaten, d.w.z. waarop geen krachten werken, blijft in rust of beweegt zich eenparig rechtlijnig. Dit suggereert de volgende definitie:

Een Euclidisch ruimtelijk coördinaatstelsel waarin een aan zich zelf overgelaten voorwerp in rust blijft of eenparig rechtlijnig beweegt noemen we een inertiaalsysteem.

De twee waarnemers bevinden zich dus in twee verschillende inertiaalsystemen. Voor de waarnemer in de trein geldt dat zolang de trein met constante snelheid rijdt. Zodra de trein afremt of door een bocht gaat beginnen losliggende voorwerpen om hem heen "vanzelf" te bewegen; zijn coördinaatstelsel is dan géén inertiaalstelsel meer.

Opmerking: Het begrip inertiaalsysteem is natuurlijk een idealisatie, net zoals begrippen als puntmassa, wrijvingsloze beweging, etc. We moeten daarbij allerlei storende omstandigheden wegdenken.

Met behulp van het begrip inertiaalsysteem kunnen we nu het al genoemde relativiteitsprincipe precieser formuleren:

De natuurwetten hebben in elk inertiaalsysteem de zelfde vorm; ze zijn het zelfde.

Dit betekent dat alle inertiaalsystemen onderling equivalent zijn. Het betekent ook dat beweging relatief is in de zin dat er geen absoluut onderscheid gemaakt kan worden tussen rust en eenparig rechtlijnige beweging.

Beschouw nu een inertiaalsysteem S met ruimtelijke coördinaten x, y, z, en daarin een puntdeeltje waarop geen krachten werken. (We veronderstellen dat er geen zwaartekracht is). De beweging van het deeltje wordt beschreven door de formule

$$\vec{r}(t) = \vec{v}t + \vec{r}(0), \tag{3.1}$$

of uitgeschreven

$$\begin{aligned} x(t) &= v_x t + x(0), \\ y(t) &= v_y t + y(0), \\ z(t) &= v_z t + z(0), \end{aligned} \tag{3.2}$$

met daarin $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ een constante snelheid, die eventueel nul mag zijn waardoor de situatie met het deeltje in rust als speciaal geval is ingesloten. Stel dat we een tweede coördinaatstelsel S' hebben, met ruimtelijke coördinaten x', y', z', dat zich eenparig rechtlijnig beweegt ten opzichte van het stelsel S, en wel met snelheid $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$. We kunnen dan op tijdstip t de coördinaten x', y', z' uitdrukken in de x, y, z volgens

$$\begin{aligned} x' &= x - u_x t, \\ y' &= y - u_y t, \\ z' &= z - u_z t, \\ t' &= t, \end{aligned} \tag{3.3}$$

We hebben daarbij nog aangenomen dat op het tijdstip $t = 0$ de oorsprongen van de twee stelsels samenvallen, anders zouden de formules nog constante termen bevatten. We kunnen de formules die de beweging van het deeltje beschrijven van de coördinaten x, y, z vertalen naar x', y', z'. We krijgen

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) - u_x t = v_x t + x(0) - u_x t = (v_x - u_x)t + x(0), \\ y'(t) &= y(t) - u_y t = v_y t + y(0) - u_y t = (v_x - u_y)t + y(0), \\ z'(t) &= z(t) - u_z t = v_z t + z(0) - u_z t = (v_x - u_z)t + z(0), \end{aligned} \tag{3.4}$$

dus weer een eenparig rechtlijnige beweging, nu met constante snelheid

$$\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{u} = (v_x - u_x, v_y - u_y, v_z - u_z). \tag{3.5}$$

We zien daarmee op de eerste plaats dat ook S' een inertiaalstelsel is. In beide stelsels gelden de zefde wetten van de mechanica. Wij kunnen bijvoorbeeld eenvoudig nagaan dat bij de transformatie van S naar S' de fundamentele Newtonse wet die de beweging van een deeltje beschrijft niet verandert. Deze wet luidt

$$\vec{F} = m\vec{a}. \tag{3.6}$$

Daarbij is m de massa van een het deeltje, $\vec{F}$ de kracht die er op werkt en $\vec{a}$ de versnelling die daar het gevolg van is. In S beschrijven we de beweging van het deeltje met $\vec{r}(t)$. Daarbij horen snelheid en versnelling.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}, \tag{3.7}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}. \tag{3.8}$$

In S' wordt de beweging van het zelfde deeltje beschreven met

$$\vec{r}\,'(t) = \vec{r}(t) - \vec{u}t, \tag{3.9}$$

en dus met snelheid en versnelling

$$\vec{v}\,'(t) = \frac{d\vec{r}\,'(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} - \vec{u} = \vec{v}(t) - \vec{u}, \tag{3.10}$$

$$\vec{a}\,'(t) = \frac{d\vec{v}\,'(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}(t) - \vec{u}) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{a}(t). \tag{3.11}$$

Aangezien m en $\vec{F}$ niet veranderen geldt $\vec{F} = m\vec{a}$ in S en $\vec{F} = m\vec{a}\,'$ in S'.

Transformaties van het type (3.3) noemen we **Galilei transformaties**. *We zeggen dat de Newtonse mechanica* **Galilei invariant** *is.*

Uit het voorafgaande kunnen we ook nog de volgende algemene conclusie trekken: Een eenparig rechtlijnige beweging die in een gegeven inertiaalstelsel S een snelheid $\vec{v}$ heeft wordt in een tweede inertiaalstelsel S' dat ten opzichte van het eerste met een constante snelheid $\vec{u}$ beweegt waargenomen als een eenparig rechtlijnige beweging met snelheid $\vec{v} - \vec{u}$.

Voor de algemene relativiteitstheorie kan het relativiteitsprincipe uitgebreid worden tot de opmerking dat men lokaal geen onderscheid kan maken tussen een versnelling en een gravitatieveld. Dit helpt ook om een inertiaalstelsel iets minder abstract te definiëren als het stelsel van vrije val (m.a.w. er werken geen netto krachten). Zo'n stelsel wordt ook wel een lokaal inertiaalstelsel (of lokaal Lorentz stelsel) genoemd. Een voorbeeld is een ruimteschip als de Mir, waar de astronauten geen zwaartekracht ondervinden (ze zijn in hun baan om de aarde constant in vrije val - alternatief kan men zeggen dat de zwaartekracht wordt opgeheven door de centrifugale kracht). Er is wel een heel kleine getijdekracht, omdat de balans strikt gesproken alleen voor het zwaartepunt van het ruimteschip dient (daarnaast is er een “schijnkracht” t.o.v. het zwaartepunt tengevolge van de centrifugale kracht). Voor de getijdekracht geldt dat deze evenredig is met de afmeting van het ruimtestation, gedeeld door de derde macht van de afstand tot het centrum van de aarde.

Opgave 1:

Bereken de grootte van de residuele kracht t.o.v. het zwaartepunt door getijde en centrifugale kracht mee te nemen. Kies zelf voor de baan van de Mir een realistische waarde. U zult nu begrijpen waarom een ruimteschip (en een vrij vallende lift) een goede benadering voor een inertiaalsysteem zijn.

In vergelijking (3.3) voor de Galilei transformaties is de fundamentele aanname gemaakt dat $t' = t$, m.a.w. dat er een universeel gedefinieerde tijd bestaat (zie ook par. 4). Echter voor het meten van de tijd op verschillende plaatsen moeten we de stand van de klokken vergelijken en voor het vergelijken moeten we informatie uitwisselen. Dit geldt evenzeer voor het meten van de lengte van een meetlat. In het dagelijks leven komt deze vergelijking tot stand door het proces van kijken (naar de wijzers van het uurwerk), maar stel dat we blind waren, dan moeten we eerst naar de klok om de stand te controleren. Bij ver verwijderde klokken kost dat een aanzienlijke tijd en als we na het gelijkzetten van de klokken terug gaan naar onze oorsponkelijke plaats wordt de stand van de klok gededuceerd door te corrigeren voor de tijd die we nodig hadden om terug te keren op onze plaats. Dat zijn in dit geval aanzienlijke correcties waarvoor we precies moeten weten wat onze snelheid was. Zo ook moeten we dus precies weten wat de snelheid van het licht is. Als deze oneindig is, kunnen we klokken instantaan gelijk zetten.

Het was Ole Roemer die in 1676 voor het eerst aantoonde dat licht een eindige snelheid heeft. Hij deduceerde dit door zorgvuldig het tijdstip bij te houden, waarop de maan Io binnentreedt in de schaduw van de planeet Jupiter, waar Io in 1,77 dagen omheen loopt. Door de situatie tijdens oppositie (waar de aarde tussen zon en Jupiter in staat) en conjunctie (waar de zon tussen aarde en Jupiter staat - en we dus Jupiter maar moeizaam kunnen waarnemen) met elkaar te vergelijken ontdekte Roemer dat er een discrepantie was die verklaard kon worden door aan te nemen dat het licht er ca. 22 minuten voor nodig had om de aardbaan te doorkruisen, oftewel een afstand af te leggen van 2 A.E. (Astronomische Eenheden). Met 1 A.E. de gemiddelde afstand van de aarde tot de zon, bepaald op ca. 150 miljoen km, kwam Christiaan Huygens twee jaar later uit op een snelheid van 200.000 km/s. In feite is de snelheid van het licht ca. 300.000 km/s, zodat Roemer een systematische fout had (in werkelijkheid heeft het licht 16 à 17 minuten nodig om de aardbaan te doorkruisen).

Opgave 2:

Als we de tijd meten waarop Io samenvalt met de *rand* van Jupiter, laat dan zien dat zonder rekening te houden met de eindigheid van de lichtsnelheid, er ook een tijdsverschil optreedt als de aarde zich midden tussen oppositie en conjugatie bevindt, en dat dit tijdsverschil (met oppositie of conjugatie) op kan lopen tot ca. 1,3 uur (zowel voor als achter). De afstand van Jupiter tot de zon bedraagt 5,2 A.E. (we nemen voor het gemak alle banen cirkelvormig).

Tot zover hebben we alleen gekeken naar de mechanica. Nu het electromagnetisme. Licht is een golfverschijnsel van electromagnetische aard, dat zich volgens een uit de Maxwell vergelijkingen afgeleide golfvergelijking voortplant. Vanuit een centrale lichtbron breidt het licht zich bolvormig naar alle kanten uit. De punten van het golffront bewegen zich daarbij volgens rechte lijnen. Dit zijn de lichtstralen. Licht in deze zin beweegt zich dus rechtlijnig en met een snelheid die volgens de Maxwell vergelijkingen in vacuum een zeer bepaalde constante waarde heeft. Als het relativiteitsprincipe ook voor de Maxwelltheorie geldt moeten de Maxwellvergelijkingen in S en S' dezelfde gedaante hebben. Daaruit zou weer volgen dat een lichtstraal in S en S' dezelfde snelheid heeft. Dit is duidelijk in strijd met de hierboven uitgesproken algemene conclusie. We gaan hier nader op in. Al in het begin van de 19e eeuw was men, vooral op grond van waargenomen buigings en interferentie effecten, tot de overtuiging gekomen dat licht een golfverschijnsel was. De golftheorie van het licht kreeg een verdere expliciete vorm binnen de algemene theorie van het electromagnetisme die in 1864 door J.C. Maxwell werd geformuleerd. Licht was een electromagnetische golf, met voor ieder medium en ook voor het vacuum een vaste voortplantingssnelheid. Een voor de hand liggende vraag was wat de drager van deze golven was. Watergolven zijn golven in water, geluidsgolven planten zich voort in lucht of in een andere stof. Lichtgolven planten zich daarentegen ook voort in het luchtledige. Dit leidde tot de veronderstelling dat er een universeel medium was, overal aanwezig, ook in het vacuum, dat als drager voor de electromagnetische golven fungeerde. Dit hypothetische zeer ijle medium noemde men de ether. De constante lichtsnelheid in het vacuum, die door de vergelijkingen van Maxwell voorspeld werd, was dan de voortplantingssnelheid ten opzichte van de ether. De aanwezigheid van deze ether, die een absolute standaard voor rust en beweging introduceerde, ging wel in tegen het relativiteitsprincipe, waaraan de Newtonse mechanica voldeed. Niet alle inertiaalsystemen waren meer equivalent; er was één speciaal systeem, namelijk het systeem bepaald door de ether. Men dacht daarbij dat dit in de een of andere zin werd vastgelegd door het geheel van de vaste sterren in het heelal. De aarde, de zon en het planetenstelsel zouden zich dan bewegen ten opzichte van de ether. Deze beweging zou experimenteel kunnen worden vastgesteld. Dit was het doel van een vernuftig en zeer nauwkeurig experiment dat in 1881 door de Amerikaanse fysicus A.A. Michelson alleen en in 1887 samen met zijn landgenoot E.W. Morley werd uitgevoerd.

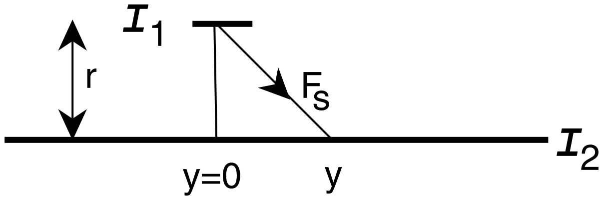
We vatten nog even samen: Op zich hoeft het eindig zijn van de lichtsnelheid geen probleem op te leveren met de Galilei invariantie, zolang het licht zich gedraagt zoals we van golven zouden verwachten: ze planten zich voort in een medium en dat medium definieert het referentiekader waaraan we alle beweging kunnen relateren. Voor geluids- en watergolven hangt de golfsnelheid niet af van de snelheid van de bron, maar wel van die van de waarnemer t.o.v. van het medium (uiteraard hangt de frequentie wel af van de snelheid van de bron, zoals we ook later bij het dopplereffect voor licht zullen bespreken). Het is echter de vraag of lichtgolven zich werkelijk gedragen als geluidsgolven, d.w.z. of er echt een ether bestaat. Het experiment van Michelsen en Morley heeft aangetoond dat er inderdaad geen ether is (of dat het licht zich er niets van aantrekt). Het is een ietwat vreemde misconceptie geweest te denken dat lichtgolven een ether nodig hebben. De Maxwellvergelijkingen beschrijven deze golven in vacuum zonder één porbleem, waar het principe gebaseerd is op het feit dat een tijdsafhankelijk electrisch veld een tijdsafhankelijk magnetisch veld genereert, wat op zijn beurt weer een tijdsafhankelijk electrisch veld genereert en zich alsdus voortplant. Hiervoor is de tussenkomst van een medium niet nodig.

Vóór de bespreking van het Michelson en Morley experiment is het dan ook mogelijk om al aan te geven dat de Maxwell theorie kuren vertoont als we een Galilei transformatie toepassen. Het was deels om deze kuren te omzeilen dat Lorentz zijn nu beroemde transformatie introduceerde, zodanig dat de Maxwellvergelijkingen eronder invariant zijn (Lorentz heeft er niet de algemene geldigheid, met haar consequenties voor ruimte en tijd, in onderkend en het was Einstein die het onderliggende principe bloot heeft weten te leggen). Aan een heel eenvoudig voorbeeld kunnen we zien dat er inderdaad bij electromagnetisme problemen met de Galilei invariantie optreden.

Beschouw hiertoe twee deeltjes met lading q op een afstand r die een Coulomb afstoting voelen ter grootte van $F = q^2/(4\pi\epsilon_o r^2)$. Door een bewegende waarnemer wordt naast de Coulomb afstoting echter ook een aantrekkende kracht gezien, die samenhangt met het feit dat een bewegende lading een electrische stroom representeert en dat twee evenwijdig stromen elkaar aantrekken. Deze aantrekkingswet vormt de definitie van de Ampère, die luidt dat de kracht die een stroomdraad per meter ondervindt van een daaraan evenwijdige stroomdraad met dezelfde stroomsterkte I op een afstand van een meter precies een kracht van $2.10^{-7}N$ ondervindt indien $I = 1A$. Als het goed is kent U deze wet nog van de middelbare school, $F_A = \mu_o I^2/(2\pi r)$. Wat heeft dat met ons probleem hier te maken zult U zich afvragen? Immers bij een stroomdraad wordt ten eerste de Coulomb afstoting afgeschermd, doordat de stroomdraad neutraal is (alleen de negatief geladen electronen worden getransporteerd). Verder is de stroom qv lokaal, en strekt deze zich niet uit langs een hele draad. De kracht is in dit geval dan ook niet evenredig met $1/r$, maar met $1/r^2$, $F_s = \mu_o q^2 v^2/(4\pi r^2)$. Net als bij de stroomdraden wordt deze aantrekkende kracht, gericht langs de verbindingslijn tussen de twee bewegende ladingen, veroorzaakt door het feit dat een bewegend electrisch veld een magnetisch veld veroorzaakt en dat de andere bewegende lading een Lorentz kracht ondervindt tengevolge van dit magneetveld.

Opgave 3:

Laat zien dat uit $F_s = \mu_o q_1 v_1 q_2 v_2/(4\pi r_{12}^2)$ (gericht langs de verbindingslijn tussen de twee ladingen met als afstand r_{12} tussen deze ladingen) de wet van Ampère volgt. Gebruik hierbij



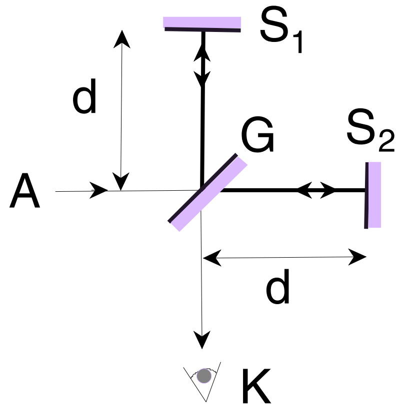
dat de stroomdraden opgebouwd kunnen worden uit bewegende ladingspakketjes, $qv = I\Delta\ell$, zodat de kracht die de stroom I_1 op een stukje stroomdraad ter lengte $\Delta\ell_1$ voelt ten gevolge van de stroomdraad I_2 gegeven wordt door

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} dy\ \mu_o r I_1 I_2 \Delta\ell_1/(4\pi(r^2 + y^2)^{3/2})$$

(Hierin speelt dus $I_2 dy$ de rol van $q_2 v_2$ en wordt de totale kracht verkregen door alle stukjes dy bij elkaar op te tellen - te integreren dus).

Nu we ons verzekerd hebben van de juistheid van de extra aantrekkende kracht, concluderen we dus dat de bewegende waarnemer een totale kracht ziet die gegeven wordt door $F_v = (1 - v^2/c^2)F$, waar F de kracht in het ruststelsel (de Coulomb kracht) is. Dit is niet wat we van een Galilei transformatie zouden verwachten.

We hebben de opstelling van het Michelson en Morley experiment schematisch voorgesteld in figuur 3.1. Het licht van een ster A komt het apparaat binnen en valt op een schuin



figuur 3.1

geplaatste glazen plaat G die met een gedeeltelijk doorlatende metaallaag is bedekt. De helft van het licht wordt onder een hoek van 90 graden gereflecteerd, gaat naar de spiegel S_1, wordt daar teruggekaatst en keert weer bij de glasplaat G terug. De andere helft gaat ongehinderd door G heen, wordt vervolgens door de spiegel S_2 teruggekaatst en komt ook weer bij G terug. Er ontstaat een interferentie effect dat met behulp van een kijker K kan worden waargenomen. De twee armen van deze z.g. Michelson interferometer zijn even lang. Het apparaat kan tijdens het experiment nog over een hoek van 90 graden worden gedraaid, waardoor de rol van beide armen verwisseld wordt. De interferometer beweegt zich met de aarde in een baan om de zon, met een snelheid van ongeveer 30 km/s. Afhankelijk van de positie van de aarde in haar baan, dus van de tijd van het jaar, kan deze snelheid naar de ster toe of er vandaan gericht zijn. Volgens de hypothese die men met dit experiment wil testen, heeft het licht een constante snelheid ten opzichte van de ether en beweegt het meetapparaat zich door de ether daartegen in of in de zelfde richting mee. In beide gevallen betekent dit dat de snelheid van het licht in het apparaat langs de as naar S_1 en terug, en in transversale richting naar S_2 en terug, verschillend zijn en dat dus de optische weglengten langs beide armen verschillend zijn. De nauwkeurigheid van het experiment is ruim voldoende om het interferentie effect te meten dat hiervan het gevolg zou zijn.

Het Michelson-Morley experiment heeft afgerekend met het idee van de ether. Het beoogde effect werd niet waargenomen, zoiets heet een nulresultaat. In de praktijk werd in plaats van sterlicht een aan de opstelling bevestigde lichtbron gebruikt, immers de snelheid van de bron beinvloedt in een ethertheorie de lichtsnelheid niet. Stel nu dat we de ether vergelijken met een rivier, die horizontaal naar links een stroomsnelheid heeft van 3 m/s. De fotonen die tussen het halfdoorlatende spiegeltje G en de spiegels S_1 en S_2 heen en weer lopen kunnen we vergelijken met een speedboat, die we een snelheid van 5 m/s geven. Als we beide afstanden 100 m veronderstellen, dan is de vraag welke boot het eerste terug is bij de spiegel G. Voor de boot die bij S_2 keert is de verstreken tijd $100/2 + 100/8s{=}50 + 12,5s$ (op de heenreis is het tegen de stroom in ploeteren met een snelheid van 2 m/s, terwijl op de terugreis een flitsende 8 m/s wordt bereikt). Voor de boot die bij S_1 keert, kost het wat moeite om niet met de stroom af te drijven en moet de boot zijn steven dus in de richting van de stroom draaien, precies zodanig dat de snelheidscomponent gericht tegen de stroom in 3 m/s bedraagt. Er blijft dan dus gebruikmakende van de stelling van Pythagoras slechts 4 m/s over voor het afleggen van de te overbruggen afstand. De verstreken tijd is nu dus $2 * 100/4s = 50s$, ruimschoots sneller dan de andere boot.

Als we nu de snelheid van de boot vervangen door de lichtsnelheid c, de stroomsnelheid door de snelheid v van de ether en de af te leggen afstand door d, dan kost de reis van G naar S_2 en terug $2cd/(c^2 - v^2)s$ en de reis van G naar S_1 en terug, dwars op de richting van de ether, kost $2d/\sqrt{c^2 - v^2}s$. Van te voren kon men niet weten hoe hard en uit welke richting de ether zou waaien. Het zou dus toevallig op de dag van meting windstil geweest kunnen zijn. Echter de aarde beweegt om de zon met een snelheid van 30 km/s, zodat er slechts op een heel bepaalde dag van het jaar mogelijk geen etherwind is (die dan zelf ook 30 km/s t.o.v. de zon moet bedragen, uiteraard ervan uitgaande dat het etherweer stabiel is over de tijdsduur van een jaar). Het nulresultaat was totaal onverwacht en het verhaal gaat dat Michelson, toen al een beroemd experimentator, voor elkaar heeft gekregen op een dag in 1887 in Cleveland Ohio al het tramverkeer stil te leggen om de trillingen in de interferometer te minimaliseren!

Lorentz en FitzGerald hebben onafhankelijk van elkaar geprobeerd het nulresultaat te verklaren door aan te nemen dat de interferometerarm, die in de richting van de etherwind wijst, een contractie ondergaat met een factor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Als de arm niet precies in de richting van de etherwind wijst, moet men voor v de component in de richting van de arm nemen bij het berekenen van de contractie. De volgende opgave (gebaseerd op een experiment uit 1932 door Kennedy en Thorndike) laat zien dat voor gelijke armen dit inderdaad het nulresultaat verklaart, maar dat zodra de armen van ongelijke lengte zijn er ook met de Lorentz-FitzGerald contractie een variatie t.g.v. de etherwind te verwachten is.

Opgave 4:

Laat zien dat voor een interferometer met armen van lengte d_1 en d_2, waarbij de etherwind een hoek α met de eerste arm maakt, het tijdsverschil voor de looptijd in de twee armen, die verondersteld worden een contractie te ondergaan bepaald door de snelheidscomponent gericht langs de armen, de volgende afhankelijkheid van α en v vertoont:

$$2c^{-1}(1 - v^2/c^2)^{-1}(d_1 - d_2)\sqrt{1 - v^2 \cos^2\alpha/c^2}\sqrt{1 - v^2 \sin^2\alpha/c^2}.$$

Merk op dat dit tijdsverschil inderdaad verdwijnt bij een interferometer met gelijke armen!

Naast de contractie van lengte heeft men ook een zg. tijdsdilatie nodig, maar op het moment dat we die ook in rekening brengen kunnen we het resultaat ook samenvatten zoals Einstein dat deed, en strikt gesproken Maxwell ons al die tijd heeft proberen te vertellen:

Het lichtpostulaat:
De lichtsnelheid heeft in ieder (lokaal) inertiaalstelsel dezelfde waarde.

Door de toevoeging van het woord lokaal geldt dit postulaat ook in de aanwezigheid van gravitatie!

Dus voor Einstein betekende het nulresultaat dat de ether moest worden opgegeven en dat men van de voortplanting van licht, en van electromagnetische verschijnselen in het algemeen, alleen kon zeggen dat de voortplantingssnelheid in ieder inertiaalsysteem de zelfde was. Het relativiteitsprincipe gold dus ook voor deze verschijnselen; het moest een algemeen geldig fysich principe zijn. De schijnbare discrepantie tussen het relativiteitsprincipe en het constant zijn van de lichtsnelheid zou moeten worden opgeheven door de overgang tussen twee inertiaalsystemen op een nieuwe manier te beschrijven.

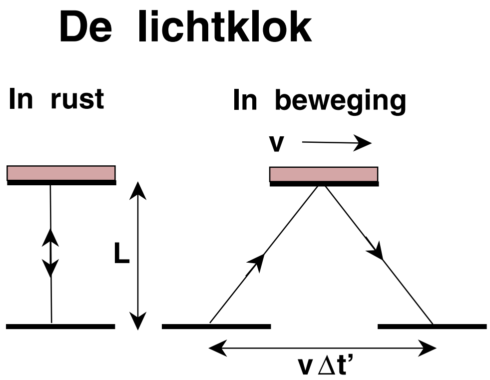
We vatten het voorafgaande nog even kort samen: Uit Maxwell's algemene theorie van het electromagnetisme en de experimenten van Michelson en Morley volgt dat licht een electromagnetisch golfverschijnsel is dat zich in een inertiaalstelsel met een constante snelheid voortplant. In vacuum is dat ongeveer 300.000 km/s, om iets preciezer te zijn 299.793 km/s. Dit is een natuurconstante die men c noemt. Op grond van de eerder gegeven redenering over het verband tussen de snelheden van een bewegend deeltje waargenomen in verschillende inertiaalsystemen zou men een ander resultaat verwacht hebben: Als een lichtgolf zich in inertiaalstelsel S met snelheid $c\vec{e}$ beweegt, met $\vec{e}$ een eenheidsvector, dan zou die zelfde golf in een tweede stelsel S', dat zich t.o.v. S met een snelheid $\vec{u}$ beweegt, de snelheid $c\vec{e} - \vec{u}$, dus met grootte $|c\vec{e} - \vec{u}|$, moeten hebben. Deze paradox is door Einstein opgelost met behulp van zijn speciale relativiteitstheorie. De grondgedachte daarbij is een nieuwe en nu algemeen aanvaarde interpretatie van het relativiteitsprincipe, met andere transformatieformules voor de relatie tussen twee inertiaalstelsels. Dit gaan we in het volgende hoofdstuk uiteenzetten.

4 Lorentz transformaties

De traditionele interpretatie van het relativiteitsprincipe, zoals we dat hebben besproken is erg voor de hand liggend, maar niettemin toch onjuist. In de gebruikte transformatieformules is als vanzelfsprekend aangenomen dat de tijd in S en S' het zelfde is. De nieuwe coördinaten x', y' en z' zijn lineaire functies van de oude coördinaten x, y en z en de tijd t. Voor de nieuwe tijd t' hebben we gewoon $t' = t$ genomen. Om hier de nadruk op te leggen hebben we dit in (3.3) voor de Galilei transformatie expliciet vermeld. Merk op dat dit een lineaire transformatie van vier variabelen naar vier nieuwe variabelen is.

Als we algemeen zouden zoeken naar een lineaire transformatie $(x, y, z, t) \to (x', y', z', t')$, met de eigenschap dat eenparige rechtlijnige bewegingen weer in eenparige rechtlijnige bewegingen overgaan, dan zou de conditie $t' = t$ ervoor zorgen dat we op de Galilei transformaties zouden uitkomen. Als we de eis $t' = t$ laten vallen en toelaten dat de nieuwe tijd t' niet alleen van de oude tijd t maar ook van de oude ruimte coördinaten x, y en z afhangt zijn er ook andere mogelijkheden. Het betekent dat we tijd en ruimte niet langer als afzonderlijke begrippen opvatten, maar dat we denken aan een 4-dimensionale "ruimte-tijd". Dit is de essentie van de gedachtengang van Einstein.

Het beroemde gedachtenexperiment van Einstein met de rijdende trein - die ook als voorbeeld dienst doet om aan te duiden dat eenparige beweging een relatief begrip is (en wie heeft niet die sensatie van verwarring gehad om te besluiten of de trein nu wel of niet rijdt als U alleen maar de trein naast U kan zien) - laat zien dat gelijktijdigheid, in de Newtonse theorie nog zo vanzelfsprekend, met een waarnemer-onafhankelijke lichtsnelheid plots geheel op zijn kop wordt gezet. Laat hiertoe een lichtflits vanuit het midden van de trein naar beide kanten zich uitspreiden. Voor een waarnemer in de trein bereikt het licht de voor- en achterkant van de trein precies gelijktijdig, maar voor een waarnemer op het perron wordt de achterkant eerder bereikt dan de voorkant, zoals U eenvoudig nagaat gebruikmakende van het feit dat ook voor de waarnemer op het perron het licht zich met de snelheid c voortbeweegt!



figuur 4.1

Evenzeer kunnen we de zg. tijdsdilatatie op uiterst eenvoudige wijze demonstreren. We gebruiken hierbij een zg. lichtklok die bestaat uit een ontvanger/zender met erboven, op een afstand L, een spiegel. De tijd verstreken tussen het zenden en ontvangen, na reflectie tegen de spiegel, van een foton kunnen we als één tijdseenheid beschouwen. Noem deze $\Delta t = 2L/c$. Anderzijds, voor een bewegende waarnemer (loodrecht op de verbinding tussen spiegel en zender/ontvanger, die dus **geen** contractie ondervindt) geldt nog steeds dezelfde snelheid van het licht, maar beschrijft dit nu de weg van een driehoek met een basis $v\Delta t'$ en een hoogte L. De verstreken tijd $\Delta t'$ tussen het zenden en ontvangen van een foton, zoals waargenomen door de bewegende waarnemer is nu evenzo de totale afgelegde weg van het foton gedeeld door de lichtsnelheid, dus $c\Delta t' = 2\sqrt{L^2 + (v\Delta t'/2)^2}$. Aangezien $L = c\Delta t/2$ vinden we nu eenvoudig de beroemde tijdsdilatatie

$$\Delta t' = \Delta t/\sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{4.1}$$

.

De tijdsdilatie is bevestigd in experimenten waar de cosmische straling wordt bestudeerd. Hoog in de atmosfeer, op een hoogte van ca. $10km$, komt cosmische straling (zeer hoog-energetische fotonen of snelle deeltjes) in botsing met de lucht en vinden er kernreakties (en verstrooiing) plaats. Dat is maar goed ook, want zeer harde straling is niet gezond voor mens en dier. Een van de deeltjes die bij zo'n reactie in grote hoeveelheden worden geproduceerd is het muon, dit is een zwaardere uitvoering van het electron met een massa van ca. 206,77 maal de massa van het electron. Het muon is zelf instabiel en valt in ca. $\tau = 2,2 \times 10^{-6}s$ weer uiteen in bijv. een electron en twee neutrino's. Op basis van de Newtonse mechanica zou, zelfs bij een snelheid van het muon die dicht tegen de lichtsnelheid zit, het muon slechts 660 meter afleggen voordat het vervalt (strikt gesproken verloopt het verval met een kansverdeling die beschreven wordt door een e-macht, $e^{-t/\tau}$). Na $10km$ zijn dan praktisch alle muonen vervallen, maar dit is in tegenspraak met de waarnemingen. Vanuit het standpunt van de waarnemer verloopt het vervalsproces van een bewegend muon echter met een tijd

$\tau' = \tau/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ en bij een snelheid $v = 0,998c$ is de afgelegde afstand gelijk aan de te overbruggen afstand van $10km$. Hoe dichter de snelheid van het muon de snelheid van het licht nadert hoe meer muonen nog niet vervallen zijn voordat ze het aardoppervlak bereiken. Vanuit het oogpunt van het muon wordt de afstand tot het aardoppervlak verkort met een factor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ en hoeft het dus bij een snelheid van $0,998c$, inplaats van de $10km$, maar $660m$ te overbruggen. De conclusie is in beide gevallen dezelfde; door relativistische effecten kan het muon het aardoppervlak bereiken voordat het is vervallen. Ook in deeltjesversnellers, waar snelheden dicht bij die van het licht worden bereikt, leven onstabiele deeltjes aanzienlijk langer dan in rust. Men heeft dan ook plannen om cirkelvormige versnellers te bouwen waarin muonen versneld worden. Het grote voordeel is dat het energieverlies dat optreedt door de remstraling in een cirkelvormige baan evenredig is met E^2/m^4. Bij gelijke energie van het deeltje, verliest een electron maar liefst 1.6 miljard maal meer energie dan een muon. Uiteraard moeten de muonen gemaakt worden met zeer grote snelheid, want anders zijn ze vervallen voordat ze versneld kunnen worden. Men is nu op een punt gekomen waar zo'n muonversneller technisch haalbaar lijkt.

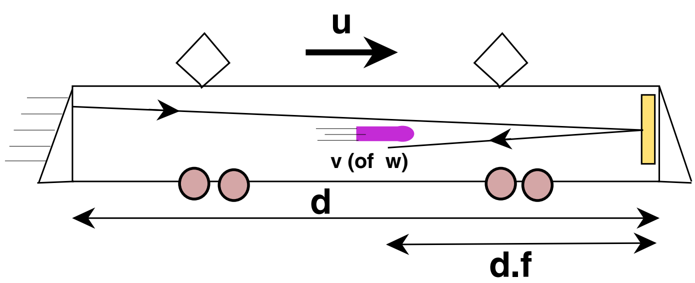
Nu het duidelijk is dat tijdsdilatatie ook werkelijk experimenteel is aangetoond moeten we ons afvragen of het voor ieder soort klok apart moet worden gecontroleerd. Dat zou uiteraard een ramp zijn en het doel van een fysicus is altijd wetten op te stellen die zo universeel mogelijk zijn, zodat ze ook een maximaal voorspellende waarde hebben. Die universaliteit van de de tijdsdilatatie is echter heel eenvoudig aan te tonen. Bijv. kunnen we i.p.v. de lichtklok een tennisklok maken, waarbij een tennisbal tegen de spiegel terugkaatst. Als we het zo inrichten dat de tennisbal terug is gekeerd, nadat het licht een geheel aantal keren, zeg n, heen en weer is gegaan (we kiezen n voldoende groot om te zorgen dat de tennisbal een realistische snelheid nodig heeft en we verwaarlozen uiteraard energieverliezen). Omdat een gebeurtenis op dezelfde tijd en dezelfde plaats (het samenvallen van de terugkeer van de tennisbal en het foton - na n reflecties) in ieder stelsel natuurlijk hetzelfde is (alleen gelijktijdigheid voor gebeurtenissen op **verschillende** plaatsen is niet langer gegarandeerd), zullen deze twee klokken in ieder stelsel gelijk lopen. Dit geldt uiteraard ook voor klokken die op een heel ander principe rusten, waarbij we via een wijzerplaat de klokken **op dezelfde plaats** met elkaar kunnen vergelijken. Dus de tijdsdilatatie is universeel en het is niet een eigenschap van de klok maar van de tijd die tot tijdsdilatatie aanleiding geeft.

Voordat we de Lorentz transformatie bespreken geven we nog een eenvoudige afleiding voor de regels van het optellen van snelheden. Dat ook hier iets bijzonders gebeurt is direkt duidelijk uit het lichtpostulaat.

Opgave 5:

Beredeneer waarom bij het optellen van een willekeurige snelheid bij de lichtsnelheid, we altijd weer de lichtsnelheid moeten krijgen.

Het toepassen van de Newtonse regels op dit feit zou leiden tot de vergelijking $c = c + u$, voor willekeurige u, en dit zou alleen kunnen als c oneindig is, in tegenspraak met de feiten. Om te zien hoe snelheden optellen, beschouwen we een zeer elegant gedachtenexperiment van N.D. Mermin. Hierbij wordt achter in een rijdende trein tegelijk een lichtflits en een kogel (met snelheid v) naar de voorkant geschoten. Het licht wordt gereflecteerd aan een spiegel op de voorwand en ontmoet de kogel op een fractie f van de totale lengte van de trein. De fractie f geeft een gebeurtenis die samenvalt in ruimte en tijd (de kogel ontmoet het terugkerende foton) en zal door waarnemers die t.o.v. de trein bewegen als dezelfde gemeten worden. Laat de trein met een snelheid u t.o.v. een waarnemer bewegen (de waarnemer beweegt dus met een snelheid $-u$ t.o.v. de trein). We berekenen nu wat voor die waarnemer f is. De snelheid



figuur 4.2

van de kogel in de trein, t.o.v. van de waarnemer buiten, noemen we w, en de lengte van de trein zoals door de waarnemer gemeten noemen we d (de waarde van d zelf is niet relevant, maar als U wilt kunt U $d = L\sqrt{1-u^2/c^2}$ nemen, met L de lengte van de trein in rust). We vinden nu $w(T_1 + T_2) = c(T_1 - T_2)$, zijnde de **netto** afstand gemeten vanaf de achterkant tot het punt waar kogel en foton elkaar ontmoeten. Hieruit volgt $T_2/T_1 = (c-w)/(c+w)$. Anderzijds geldt ook dat $cT_1 = d + uT_1$, zijnde de afstand die het foton tot het punt van reflectie aflegt. Evenzo is de afstand van de spiegel tot het ontmoetingspunt met de kogel gegeven door $cT_2 = fd - uT_2$. Hieruit is d te elimineren en volgt $T_2/T_1 = f(c-u)/(c+u)$. Het gelijkstellen van deze twee uitdrukkingen voor T_2/T_1 leidt tot

$$f = f(u,w) = \frac{(c+u)(c-w)}{(c-u)(c+w)}.$$

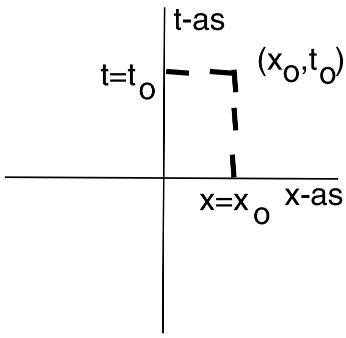
Deze afleiding geldt voor iedere waarnemer, i.h.b. voor een waarnemer die met de trein meereist. Voor deze waarnemer moet $u = 0$ en $w = v$ worden genomen, en geldt $f = f(0,v) = (c-v)/(c+v)$. Omdat f voor beide waarnemers hetzelfde moet zijn volgt dus de uitdrukking voor w, die leidt tot het "optellen" van de snelheden u en v:

$$w = \frac{u+v}{1+uv/c^2}. \tag{4.2}$$

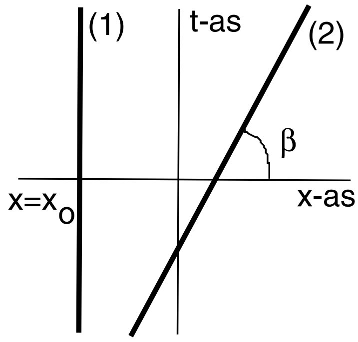
4.1 Ruimte-tijd plaatjes

In een inertiaalsysteem wordt de 4-dimensionale "ruimte-tijd" opgesplitst in tijd en gewone ruimte; in verschillende inertiaalsystemen gebeurt dit op verschillende manieren en daardoor worden in de transformatieformules tussen inertiaalsystemen ruimte- en tijd-coördinaten gemengd. Om dit te begrijpen gaan we ruimte-tijd plaatjes tekenen. Het gaat ons om de relatie tussen tijd en ruimte, niet om de relatie tussen ruimtecoördinaten onderling. We kunnen daarom 2-dimensionale plaatjes gebruiken, met een t-as en één ruimtelijke as, bijvoorbeeld de x-as.

Een punt (x_0, t_0) in een plaatje als figuur 4.3 stelt een gebeurtenis voor. (De y- en z-coördinaten zijn natuurlijk niet getekend). Een lijn beschrijft de historie van een puntdeeltje. We noemen zo'n lijn een wereldlijn of levenslijn. We tekenen in figuur 4.4, 4.5 en 4.6 enkele



figuur 4.3



figuur 4.4

wereldlijnen van op verschillende manier bewegende puntdeeltjes:

(1) Een deeltje in rust op $x = x_0$.

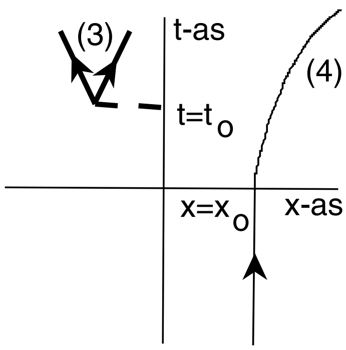
(2) Een eenparig rechlijnig bewegend deeltje met snelheid $v = \text{cotg}\beta$. Het is duidelijk dat hoe kleiner de hoek β is, hoe groter de snelheid is. Een horizontale lijn kan niet; dat zou een oneindige snelheid betekenen.

(3) Een tweetal deeltjes (bijvoorbeeld een electron en een positron) worden op $t = t_0$ gecreëerd en vliegen met tegengestelde snelheden weg.

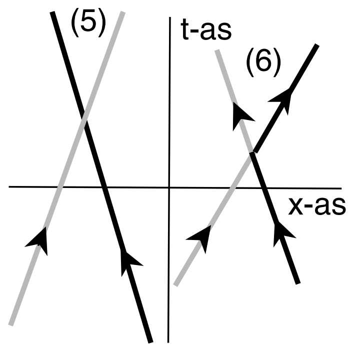
(4) Een deeltje bevindt zich in rust op plaats $x = x_0$. Vanaf tijdstip $t = 0$ ondervindt het een kracht waardoor het versneld gaat bewegen.

(5) Twee deeltjes passeren elkaar op $t = t_0$ en $x = x_0$.

(6) Twee deeltjes botsen op $t = t_0$ in $x = x_0$, hun snelheden keren om.



figuur 4.5

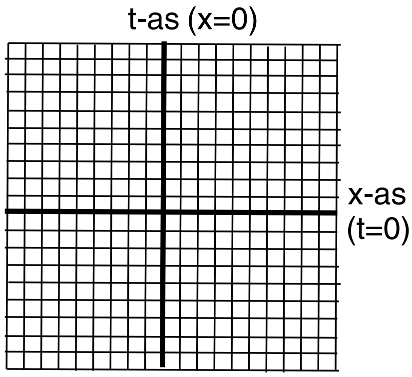


figuur 4.6

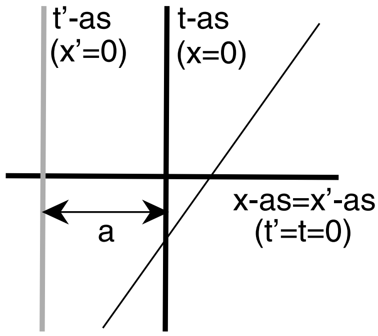
Opgave 6:

Waarom is uit (6) in figuur 4.6 af te lezen dat de massa's van de twee deeltjes die met elkaar botsen gelijk moeten zijn.

Het is voor het nog volgende van groot belang zich te realiseren dat een 2-dimensonaal plaatje zoals hier getekend op de de eerste plaats gezien moet worden als een systeem van coördinaatlijnen die het 2-dimensionale vlak overdekken, zoals getekend in figuur 4.7. Denk daarbij aan grafiekpapier! De x-as is de lijn $t = 0$, de t-as is de lijn $x = 0$.



figuur 4.7



figuur 4.8

Als volgende stap gaan we nu bekijken hoe coördinaattransformaties er in dergelijke 2-dimensionale ruimte-tijd plaatjes uitzien:

a. Eerst een zeer eenvoudig geval (figuur 4.8):

We verschuiven de oorsprong van het coördinaatsysteem over een afstand a. Op deze manier krijgen we op een zeer triviale manier uit het gegeven inertiaal systeem S een nieuw inertiaalsysteem S'. We hebben daarbij de transformatieformules

$$\begin{aligned} x' &= x + a, \\ t' &= t. \end{aligned} \tag{4.3}$$

De t-as verschuift en de x-as blijft dezelfde. We moeten denken aan grafiekpapier: het zijn de x-lijnen die verschuiven. We zien uit het plaatje direct dat snelheden niet veranderen.

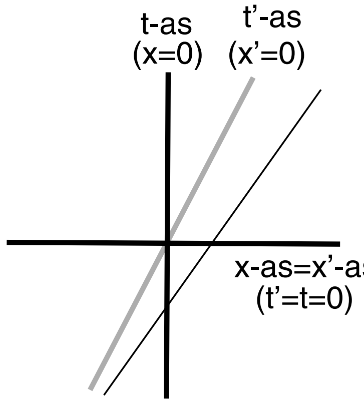
b. Nu een interessanter geval (figuur 4.9):

Bekijk een coördinaatsysteem S' dat zich ten opzichte van het gegeven stelsel S eenparig rechtlijnig beweegt, met snelheid u in de positieve x-richting. Het meest voor de hand liggend is dat de twee stelsels door een Galilei-transformatie verbonden zijn, dus door de formules

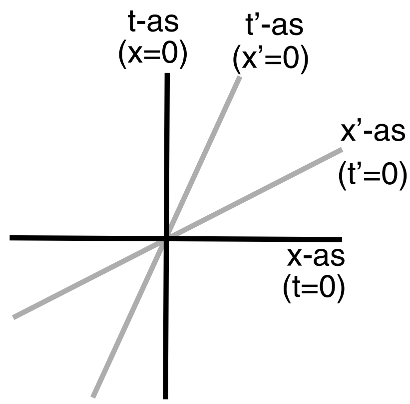
$$\begin{aligned} x' &= x - ut, \\ t' &= t, \end{aligned} \tag{4.4}$$

Dit hebben we figuur 4.9 afgebeeld. De x-as en de x'-as liggen over elkaar heen; de t'-as is ten opzichte van de t-as gedraaid.

We moeten echter weer denken in termen van grafiekpapier: We zien dan dat de t-lijnen hetzelfde blijven, en dat de x-lijnen gedraaid zijn. We kunnen ook zien wat er met snelheden gebeurt: Een deeltje dat in S een snelheid v heeft, wordt in S' waargenomen als een deeltje met snelheid $v-u$, zoals we dat eerder besproken hebben. Dit is in overeen-stemming met de Newtonse mechanica, maar vanwege het constant zijn van de lichtsnelheid niet met de Maxwell theorie van het electromagnetisme.



figuur 4.9



figuur 4.10

c. We bekijken hetzelfde geval op een andere meer algemene manier (figuur 4.10):

We beginnen met een algemeen lineair verband tussen x, t en x', t' te veronderstellen:

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}t, \\ t' &= a_{21}x + a_{22}t. \end{aligned} \tag{4.5}$$

De vier reële coëfficiënten a_{jk} vormen een 2×2 matrix die we a noemen. De transformatie moet omkeerbaar zijn. Daarvoor moet de determinant van a ongelijk aan nul zijn. De inverse matrix is

$$a^{-1} = \alpha^{-1} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

met $\alpha = \det a = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. De inverse transformatie heeft dan de vorm:

$$\begin{aligned} x &= (\ \ a_{22}x' - a_{12}t')/\alpha, \\ t &= (-a_{21}x' + a_{11}t')/\alpha. \end{aligned} \tag{4.7}$$

De situatie die we willen beschrijven, een coördinaatstelsel S' dat zich ten opzichte van een gegeven stelsel met eenparige snelheid u beweegt, legt condities op aan de getallen a_{jk}. De wereldlijn van een punt dat in het stelsel S' vast is wordt beschreven door de vergelijking

$$x' = b', \tag{4.8}$$

met b' constant. Omgerekend met formule (4.5) wordt dat in S

$$a_{11}x + a_{12}t = b', \tag{4.9}$$

of

$$x = -\frac{a_{12}}{a_{11}}t + \frac{b'}{a_{11}}, \tag{4.10}$$

hetgeen betekent dat de snelheid van S' ten opzichte van S gelijk is aan $-a_{12}/a_{11}$. Dit moet u zijn, en dus hebben we $a_{12} = -ua_{11}$. Op dezelfde wijze gaan we uit van een vast punt in S met wereldlijn $x = b$. Omrekening naar S' met (4.7) geeft, als snelheid van S ten opzichte van S', a_{12}/a_{22}. Dit moet $-u$ zijn en dus hebben we ook $a_{22} = -a_{12}/u = a_{11}$. De transformatie van S naar S' kunnen we daarmee schrijven als

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}(x - ut), \\ t' &= a_{11}(a_{21}x/a_{11} + t), \end{aligned} \tag{4.11}$$

en de inverse transformatie van S' naar S als

$$\begin{aligned} x &= a_{11}(x' + ut')/\alpha, \\ t &= a_{11}(-a_{21}x'/a_{11} + t')/\alpha. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Als we in deze formules $a_{21} = 0$ en $a_{11} = 1$ nemen, geldt $t' = t$ en hebben we weer een Galilei transformatie terug gekregen. Dat willen we juist niet; we veronderstellen daarom dat $a_{21} \neq 0$. We hebben daarmee een situatie zoals die in het ruimte-tijd plaatje van figuur 4.10 getekend is. We zien dat nu beide assen gedraaid zijn. In de zin van grafiekpapier zijn zowel de x-lijnen als de t-lijnen gedraaid. In de overgang van S naar S' zijn ruimte- en tijdmeting veel sterker door elkaar gemengd. Er geldt nog steeds dat rechte lijnen in rechte lijnen overgaan, dus eenparige bewegingen blijven eenparig. Snelheden veranderen echter op een manier die ingewikkelder is dan we kennen van het geval van de Galilei transformaties. Om dat te berekenen bekijken we een deeltje dat zich ten opzichte van S beweegt met snelheid v. De wereldlijn van het deeltje is een rechte lijn gegeven door de vergelijking

$$x(t) = vt + b. \tag{4.13}$$

In S' wordt deze vergelijking, na enige herschrijving, en met gebruikmaking van de formules (4.12),

$$x'(t') = \frac{(v-u)t'}{1 + a_{21}v/a_{11}} + \frac{\alpha b}{a_{11} + a_{21}v}, \tag{4.14}$$

hetgeen betekent dat het deeltje in S' een snelheid v' heeft met

$$v' = \frac{v-u}{1 + a_{21}v/a_{11}}. \tag{4.15}$$

Voor $a_{21} = 0$ zou dit weer de transformatieformule van snelheden onder een Galilei transformatie zijn. Daarbij zouden de snelheden eenvoudig optellen. In de algemene situatie is dat niet meer het geval. We kunnen nu wel de vrijheid, die we nog in de keuze van de a_{21} en a_{11} hebben, gebruiken om er voor te zorgen dat bij de transformaties één bepaalde snelheid niet verandert. Dat moet natuurlijk de lichtsnelheid c zijn. We hebben dan de vergelijking

$$c = \frac{c-u}{1 + a_{21}c/a_{11}}. \tag{4.16}$$

waarmee we a_{21} in a_{11} kunnen uitdrukken. We vinden

$$a_{21} = -ua_{11}/c^2. \tag{4.17}$$

De transformatieformules (4.11) worden daarmee

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}(x - ut), \\ t' &= a_{11}(t - ux/c^2), \end{aligned} \tag{4.18}$$

en de inverse formules (4.12)

$$\begin{aligned} x &= a_{11}^{-1}\gamma^2(u)(x' + ut'), \\ t &= a_{11}^{-1}\gamma^2(u)(t' + ux'/c^2), \end{aligned} \tag{4.19}$$

met daarbij

$$\gamma(u) = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}. \tag{4.20}$$

We kunnen de vrijheid in a_{11} nog gebruiken om te zorgen dat (4.18) en (4.19), op het teken van u na, de zelfde vorm krijgen. Daartoe kiezen we $a_{11} = \gamma(u)$. Daarmee hebben we tenslotte de transformatieformules

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(u)(x - ut), \\ t' &= \gamma(u)(t - ux/c^2), \end{aligned} \tag{4.21}$$

en de inverse formules

$$\begin{aligned} x &= \gamma(u)(x' + ut'), \\ t &= \gamma(u)(t' + ux'/c^2), \end{aligned} \tag{4.22}$$

Dit noemen we een *Lorentz transformatie*. (Dergelijke transformatieformules zijn voor het eerst voorgesteld door H.A. Lorentz, die er echter nog niet de juiste interpretatie voor had. Deze is pas door Einstein gegeven.)

Een kortere afleiding van de Lorentz transformatie gaat als volgt: De oorsprong in het stelsel S', weergegeven door $x' = 0$, wordt in het stelsel S weergegeven door de eenparig rechtlijnige beweging $x(t) = ut$, oftewel $x - ut = 0$. Omdat we willen dat de transformatie lineair is moet dus gelden dat $x' = \gamma(u)(x - ut)$. Omgekeerd kunnen we uitgaan van de oorsprong in S, weergegeven door $x = 0$, die in S' wordt beschreven door $x' + ut' = 0$, zodat $x = \gamma(-u)(x' + ut')$. Merk op dat de relativiteit ons oplegt dat de ene transformatie te verkrijgen is uit de andere door de snelheid van richting te laten omkeren. Maar we zijn volledig vrij de richting van positieve x-as te kiezen, omdat de ruimte isotroop is. (De ruimte-tijd is ook homogeen, hetgeen ons de vrijheid geeft het nulpunt van plaats en tijd te kiezen). Dus concluderen we dat $\gamma(u) = \gamma(-u)$. We gebruiken nu dat een lichtstraal vanuit de oorsprong, op $t = 0$ beginnende, in **beide** stelsels beschreven wordt door $x = ct$ en $x' = ct'$. Enerzijds volgt daaruit dat $ct' = x' = \gamma(u)(ct - ut) = \gamma(u)(c - u)t$, anderzijds, de rol van S en S' verwisselend, $ct = x = \gamma(u)(ct' + ut') = \gamma(u)(c + u)t'$. Hieruit kunnen we $\gamma(u)$ oplossen, bijv. door de twee uitdrukking met elkaar te vermenigvuldigen en links en rechts $t't$ uit te delen. Men vindt eenvoudig dat $\gamma(u) = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$. Verder kunnen we ook t' in termen van x en t bepalen, door $x = \gamma(x' + ut')$ te schrijven als $t' = (x/\gamma - x')/u$ en vervolgens de uitdrukking $x' = \gamma(x - ut)$ te substitueren. Er volgt $t' = \gamma(t - ux/c^2)$ en de uitdrukking van t in termen van x' en t' wordt hieruit verkregen door u van teken om te laten klappen.

Deze afleiding van de Lorentz transformatie is minder abstract geformuleerd dan de vorige. Bovendien zal het symmetrieprincipe dat we geburikten vaker van pas komen.

Samenvattend:

Lorentz transformaties verbinden, net als Galilei transformaties, inertiaalsystemen op een manier die in overeenstemming is met het relativiteitsprincipe en het lichtpostulaat. In tegenstelling tot Galilei transformaties laten ze de lichtsnelheid invariant. Hiermee zijn ze in overeenstemming met de Maxwell theorie van het electromagnetisme.

We moeten hier wel een prijs voor betalen: Op de eerste plaats vinden we, zoals we eerder in het gedachtenexperiment met de kogel zagen, dat snelheden niet meer eenvoudig mogen worden opgeteld. Ook uit (4.15) krijgen we de transformatieformule voor snelheden

$$v' = \frac{v-u}{1-uv/c^2}. \tag{4.23}$$

Een tweede daarmee samenhangend en nog veel belangrijker punt is dat de Newtonse mechanica niet meer invariant is onder Lorentz transformaties. We gaan dit in deze eenvoudige twee dimensionale situatie na.

Bezie een deeltje met willekeurige, d.w.z. niet noodzakelijk eenparige beweging. Zijn wereldlijn wordt in S gegeven door een functie $x(t)$ en in S' door $x'(t')$. Het is handig om zo'n wereldlijn te zien als een kromme in de ruimte-tijd die los van mogelijke coördinaatsystemen beschreven wordt door een parameter τ. Een mogelijke keuze is de eigentijd die we later in zullen voeren, maar τ kan tamelijk willekeurig gekozen worden; de keuze heeft geen invloed op ons resultaat. Met zo'n parameter wordt de beweging weergegeven door

$$x(\tau), t(\tau). \tag{4.24}$$

De snelheid van het deeltje is dan

$$v = \frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx}{d\tau}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{-1} \tag{4.25}$$

en de versnelling

$$a = \frac{dv}{dt} = \left(\frac{dv}{d\tau}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{-1}. \tag{4.26}$$

In S' hebben we voor de beschrijving van hetzelfde deeltje (gebruik (4.21))

$$x'(\tau) = \gamma(u)(x(\tau) - ut(\tau)), \quad t'(\tau) = \gamma(u)(t(\tau) - ux(\tau)/c^2), \tag{4.27}$$

met daarbij

$$v' = \left(\frac{dx'}{d\tau}\right)\left(\frac{dt'}{d\tau}\right)^{-1} \tag{4.28}$$

en ook

$$a' = \frac{dv'}{dt'} = \left(\frac{dv'}{d\tau}\right)\left(\frac{dt'}{d\tau}\right)^{-1}. \tag{4.29}$$

We gebruiken nu (4.25) en (4.28) om v' uit te drukken in v.

$$v' = \left(\frac{dx'(\tau)}{d\tau}\right)\left(\frac{dt'(\tau)}{d\tau}\right)^{-1} = \left(\frac{dx(\tau)}{d\tau} - u\frac{dt(\tau)}{d\tau}\right)\left(\frac{dt(\tau)}{d\tau} - \frac{u}{c^2}\frac{dx(\tau)}{d\tau}\right)^{-1} = \frac{v-u}{1-uv/c^2}. \tag{4.30}$$

Dit is formule (4.23), de transformatieformule voor snelheden, maar nu algemeen geldig voor deeltjes met willekeurige beweging. We kunnen op dezelfde wijze a' uitdrukken in a en v, maar voor een willekeurige parameter τ is dat nogal veel werk. We kunnen de afleiding aanzienelijk vereenvoudigen door voor τ de tijd t in het stelsel S te gebruiken. Dus we beschrijven in het stelsel S een deeltje dat een willekeurige beweging $x(t)$ ondergaat en als gewoonlijk definiëren we $v(t) = dx(t)/dt$ en $a(t) = dv(t)/dt$, zijnde respectievelijk de snelheid en de versnelling. Door de Lorentz transformatie naar het stelsel S' uit te voeren, vinden we wat de baan van het deeltje in dat stelsel is geparametriseerd door de tijd t van het stelsel S (let op, niet als functie van t'). Dus

$$x'(t) = \gamma(u)(x(t) - ut), \quad t'(t) = \gamma(u)(t - ux(t)/c^2). \tag{4.31}$$

Hiermee vinden we

$$\frac{dx'}{dt} = \gamma(u)\left(\frac{dx(t)}{dt} - u\right) = \gamma(u)(v(t) - u) \tag{4.32}$$

en

$$\frac{dt'}{dt} = \gamma(u)\left(1 - \frac{u}{c^2}\frac{dx(t)}{dt}\right) = \gamma(u)\left(1 - \frac{uv(t)}{c^2}\right). \tag{4.33}$$

Deze vergelijkingen op elkaar delen geeft de snelheid, $v' = dx'/dt' = (dx'(t)/dt)/(dt'(t)/dt)$, oftewel verg. (4.30).

De versnelling in het stelsel S' volgt nu uit $a' = dv'/dt' = (dv'(t)/dt)/(dt'(t)/dt)$. Eerst berekenen we

$$\frac{dv'(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v(t)-u}{1-uv(t)/c^2}\right) \tag{4.34}$$

met behulp van

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v(t)-u}{1-uv(t)/c^2}\right) = (v(t)-u)\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-uv(t)/c^2}\right) + \left(\frac{1}{1-uv(t)/c^2}\right)\frac{d}{dt}(v(t)-u)$$

en

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-uv(t)/c^2}\right) = -\frac{1}{(1-uv(t)/c^2)^2}\,\frac{d}{dt}(1-uv(t)/c^2).$$

Gebruikmakende van het feit dat $dv(t)/dt = a(t)$, volgt

$$\frac{dv'(t)}{dt} = \frac{(1-u^2/c^2)}{(1-uv(t)/c^2)^2}a(t). \tag{4.35}$$

Delen door $dt'(t)/dt$, als gegeven in verg. (4.33), geeft tenslotte

$$a' = a(t)\gamma^{-3}(u)(1-uv(t)/c^2)^{-3}. \tag{4.36}$$

Opgave 7:

Controleer de berekeningen in verg. (4.31) tot en met (4.36).

Het gaat hierbij om een versnelling die ieder moment in de richting van de snelheid u, de x-richting, plaats heeft. Het is zeker niet vanzelfsprekend dat dezelfde transformatie geldt voor een versnelling loodrecht op u. Hiertoe kiezen we nu in het stelsel S een beweging die beschreven wordt door $y(t)$, zodat $v_y = dy(t)/dt$ en $a_y = dv_y(t)/dt$, beide dus in de y-richting wijzende, hetgeen de reden is waarom we een index y gebruiken. Door transformatie naar het S' stelsel vinden we $\vec{x}\,'(t) = (-ut\gamma(u), y(t), 0)$ en $t'(t) = t\gamma(u)$.

Opgave 8:

Laat zien dat $\vec{v}\,' = (-u, v(t)/\gamma(u), 0)$ en dat $\vec{a}\,' = (0, a(t)/\gamma^2(u), 0)$.

We zien dus dat de versnellingscomponent loodrecht op de richting van de snelheid u anders transformeert dan evenwijdig aan die richting!

Opgave 9:

Bewijs voor een deeltje met een versnelling zowel in de x als de y richting, dat $a'_x = a_x\gamma^{-3}(u)(1 - v_x u/c^2)^{-3}$ en dat $a'_y = a_y\gamma^{-2}(u)(1 - v_x u/c^2)^{-2} + uv_y a_x c^{-2}\gamma^{-2}(u)(1 - v_x u/c^2)^{-3}$ en dat dit overeenstemt met de twee specifieke gevallen die we hebben beschreven.

Aan het resultaat voor de transformatie van de versnellingen kunnen we een duidelijke conclusie verbinden. Er geldt $a \neq a'$, dus $ma \neq ma'$. Als de beweging van het deeltje veroorzaakt wordt door een kracht F betekent dat men niet tegelijkertijd $F = ma$ in S en $F = ma'$ in S' kan hebben. Dus:

De vergelijking $F = ma$, de basisvergelijking van de Newtonse mechanica, is niet invariant onder Lorentz transformaties.

We vatten nu de voorafgaande twee dimensionale formules op als formules die betrekking hebben op een situatie in de gewone vier dimensionale ruimte-tijd, waarbij inertiaalsystemen S' zich ten opzichte van een gegeven systeem S in de richting van de x-as bewegen. We kunnen dan de Lorentz transformatie formules (4.21) direct uitbreiden tot 4-dimensionale formules

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(u)(x - ut), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \gamma(u)(t - ux/c^2). \end{aligned} \tag{4.37}$$

Dit zullen we de *standaard Lorentz transformatie* in de x-richting noemen. De inverse formules (4.22) worden natuurlijk aangevuld tot

$$\begin{aligned} x &= \gamma(u)(x' + ut'), \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= \gamma(u)(t' + ux'/c^2). \end{aligned} \tag{4.38}$$

We hebben ook standaard Lorentz transformaties in de y-richting

$$
\begin{aligned}
x' &= x, \\
y' &= \gamma(u)(y - ut), \\
z' &= z, \\
t' &= \gamma(u)(t - uy/c^2)
\end{aligned}
\tag{4.39}
$$

en standaard Lorentz transformaties in de z-richting

$$
\begin{aligned}
x' &= x, \\
y' &= y, \\
z' &= \gamma(u)(z - ut), \\
t' &= \gamma(u)(t - uz/c^2).
\end{aligned}
\tag{4.40}
$$

Tenslotte zijn er ook standaard Lorentz transformaties in een willekeurige richting. De formules hiervoor zijn natuurlijk wat ingewikkelder. We zullen ze niet afleiden, maar geven ze hier. Als het nieuwe systeem S' zich ten opzichte van S beweegt met een snelheid $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ wordt de transformatie van ruimte-tijd coordinaten gegeven door

$$
\begin{aligned}
x' &= x + (\gamma(u) - 1)(u_x x + u_y y + u_z z)u_x/u^2 - \gamma(u)u_x t, \\
y' &= y + (\gamma(u) - 1)(u_x x + u_y y + u_z z)u_y/u^2 - \gamma(u)u_y t, \\
z' &= z + (\gamma(u) - 1)(u_x x + u_y y + u_z z)u_z/u^2 - \gamma(u)u_z t, \\
t' &= \gamma(u)(t - (u_x x + u_y y + u_z z)/c^2).
\end{aligned}
\tag{4.41}
$$

Hierin is $u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$ en $\gamma(u) = (1 - u^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Opgave 10:

In vectornotatie (zie hoofdstuk 7 als U niet vertrouwd bent met deze notatie) luidt (4.41) $\vec{x}\,' = \vec{x} + (\gamma(u) - 1)(\vec{u}\cdot\vec{x})\vec{u}/u^2 - \gamma(u)\vec{u}t$ en $t' = \gamma(u)(t - \vec{u}\cdot\vec{x}/c^2)$. Laat zien dat de oorsprong van het stelsel S' beschreven wordt door de eenparig rechtlijnige beweging $\vec{x} = \vec{u}t$ en dat een lichtstraal uitgezonden in een willekeurige richting, beschreven door $\vec{x} = \vec{c}t$ (met $\vec{c}\cdot\vec{c} = c^2$) ook beschreven wordt door $\vec{x}' = \vec{c}\,'t'$ (met $\vec{c}\,'\cdot\vec{c}\,' = c^2$). Wat kunt U over de richting van de lichtstraal in het stelsel S' zeggen.

Opgave 11:

(i.) Ga na dat we de formules (4.37) voor de standaard Lorentz transformatie in de x-richting terug krijgen door in (4.41) $u_x = u$, $u_y = u_z = 0$ te nemen.
(ii.) Ga uit van een inertiaalsysteem S met ruimte-tijd coördinaten x, y, z, t. Ga met een Lorentz transformatie naar een tweede inertiaalsysteem S' dat zich met een snelheid u_1 in de x-richting t.o.v. S beweegt. Bekijk vervolgens een derde inertiaalsysteem S'' dat zich t.o.v. S' met een snelheid u_2 in de x'-richting beweegt. Laat zien dat de rechtstreekse transformatie van de oorspronkelijke S naar deze laatste S'' weer een standaard Lorentz transformatie in de x-richting is, en leidt daaruit af dat S'' zich t.o.v. S beweegt met een snelheid u die gelijk is aan

$$
u = \frac{u_1 + u_2}{1 + u_1 u_2/c^2}.
\tag{4.42}
$$

Belangrijke algemene opmerking:

We zien in deze formule en ook in allerlei andere formules, zoals de formules voor Lorentz transformaties (4.20), (4.21), (4.22), (4.37), (4.38) etc., voor de transformaties van snelheden (4.23) en van versnellingen (4.36), factoren als u/c, u^2/c^2 en uv/c^2. In veel situaties zijn deze factoren erg klein omdat de snelheden u en v klein zijn in vergelijking met de lichtsnelheid.

Als illustratie bekijken we een numeriek voorbeeld bij formule (4.42): We gaan uit van een coördinaatstelsel S dat vast aan het aardoppervlak verbonden is. S' bevindt zich in een supersonisch vliegtuig dat een snelheid heeft van $u = 2700$ km per uur en S'' is verbonden aan een raket die vanuit het vliegtuig naar voren wordt afgevuurd, met een snelheid $u' = 3600$ km per uur t.o.v. het vliegtuig. Volgens de relativiteitstheorie heeft dan de raket een door formule (4.42) bepaalde snelheid u'', die van de som $u + u'$ afwijkt met ongeveer $8 \times 10^{-10}\%$. Zelfs bij deze voor aardse omstandigheden hoge snelheden zal het buitengewoon moeilijk zijn om de relativistische afwijking van de Newtonse beschrijving te meten.

Conclusie:

In de limiet van snelheden die klein zijn ten opzichte van de lichtsnelheid gaan de formules van de Einsteinse relativiteitstheorie over in de formules van de Newtonse beschrijving. Dit betekent dat de Newtonse theorie waardevol blijft als een zeer goede benadering voor het grote gebied van fysische verschijnselen waarbij geen snelheden optreden die van de zelfde orde van grootte zijn als de lichtsnelheid.

4.2 Andere parametrisering van standaard Lorentz transformaties

Als we een aantal Lorentz transformaties met verschillende snelheden in dezelfde richting achter elkaar uitvoeren is het totale resultaat weer een Lorentz transformatie. We kunnen de snelheid als parameter voor zulke transformaties gebruiken. Deze snelheden tellen echter niet op, zo als we gezien hebben. Het is daarom soms handig om een andere parameter in te voeren die wel additief is. We bekijken standaard Lorentz transformaties in de x-richting zoals gegeven door formules (4.37) en definiëren een door de snelheid u bepaalde parameter φ volgens

$$\varphi = \tfrac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + u/c}{1 - u/c} \right) . \tag{4.43}$$

Beschouw nu de in bovenstaande opgave beschreven situatie: Drie inertiaalsystemen S, S' en S'', met standaard Lorentz transformaties $S \to S'$ en $S' \to S''$ behorende bij snelheden u_1 en u_2 in de x-richting. Geef de snelheid behorende bij de resulterende transformatie $S \to S''$ aan als u. Deze u kan met formule (4.42) in u_1 en u_2 uitgedrukt worden. Volgens (4.43) hoort bij u_1 de parameter φ_1

$$\varphi_1 = \tfrac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + u_1/c}{1 - u_1/c} \right) \tag{4.44}$$

en bij u_2 de parameter φ_2

$$\varphi_2 = \tfrac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + u_2/c}{1 - u_2/c} \right) \tag{4.45}$$

Tenslotte hoort bij de snelheid u van de samengestelde transformatie de parameter φ volgens

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1+u/c}{1-u/c}\right) \tag{4.46}$$

Deze φ wordt met behulp van (4.42) uitgedrukt in u_1 en u_2:

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1+u_1u_2/c^2+(u_1+u_2)/c}{1+u_1u_2/c^2-(u_1+u_2)/c}\right) = \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{(1+u_1/c)(1+u_2/c)}{(1-u_1/c)(1-u_2/c)}\right) = \varphi_1+\varphi_2. \tag{4.47}$$

We hebben dus gevonden dat de waarden van deze nieuwe parameter bij opeenvolgende Lorentz transformaties in de zelfde richting optellen; de parameter φ is *additief.* Uiteraard is alles wat we hier voor Lorentz transformaties in de x-richting bespreken op de zelfde manier van toepassing op transformaties in de y- en de z-richting.

We gaan de Lorentz transformatie (4.37) in termen van φ schrijven. Uit de definitie (4.43) volgt

$$e^{\varphi} = \left(\frac{1+u/c}{1-u/c}\right)^{\frac{1}{2}} = \gamma(u)(1+u/c), \tag{4.48}$$

$$e^{-\varphi} = \left(\frac{1-u/c}{1+u/c}\right)^{\frac{1}{2}} = \gamma(u)(1-u/c). \tag{4.49}$$

We herinneren ons de definities van de hyperbolische trigoniometrische functies

$$\sinh\alpha = \tfrac{1}{2}(e^{\alpha}-e^{-\alpha}), \tag{4.50}$$

$$\cosh\alpha = \tfrac{1}{2}(e^{\alpha}+e^{-\alpha}), \tag{4.51}$$

en daarmee

$$\tanh\alpha = \frac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha} = (e^{\alpha}-e^{-\alpha})/(e^{\alpha}+e^{-\alpha}). \tag{4.52}$$

Deze hyperbolische sinus, cosinus en tangens hebben natuurlijk niets te maken met hoeken of meetkunde; het zijn functies die wat hun eigenschappen betreft wiskundige analogieën met de gewone trigoniometrische functies vertonen. Met behulp van deze functies krijgen we uit (4.48) en (4.49)

$$\sinh\varphi = \gamma(u)u/c, \tag{4.53}$$

$$\cosh\varphi = \gamma(u) \tag{4.54}$$

en de bij (4.43) behorende inverse relatie

$$u = c\tanh\varphi. \tag{4.55}$$

We schrijven hiermee tenslotte de Lorentz transformatie (4.37) als

$$\begin{aligned} x' &= \cosh\varphi\; x - \sinh\varphi\; ct,\\ y' &= y,\\ z' &= z,\\ t' &= \cosh\varphi\; t - \sinh\varphi\; x/c. \end{aligned} \tag{4.56}$$

De wiskundige analogie van de parameter φ met een hoek variabele zien we ook nog als we (4.56) vergelijken met de formules voor een ruimtelijke draaiing van het assenstelsel om de z-as over een hoek θ

$$\begin{aligned} x' &= \cos\theta\ x + \sin\theta\ y, \\ y' &= \cos\theta\ y - \sin\theta\ x, \\ z' &= z, \\ t' &= t. \end{aligned} \tag{4.57}$$

Men noemt daarom de parameter φ soms wel pseudo-hoek.

Toepassing:

Bekijk inertiaalsystemen S_0 , S_1, $S_2, \cdots S_n$. Veronderstel dat iedere S_k zich ten opzichte van S_{k-1} met een snelheid u beweegt. We willen weten wat de snelheid u_n van S_n ten opzichte van S_0 is. Voor Galilei transformaties zou dat gewoon n maal u zijn, bij Lorentz transformaties is het een ingewikkelder uitdrukking. We kunnen proberen u stapsgewijze te berekenen met formule (4.42), maar het wordt snel duidelijk dat het niet zal meevallen op deze manier een gesloten uitdrukking voor u_n te vinden.

$$u_2 = \frac{2u}{1 + u^2/c^2}, \tag{4.58}$$

$$u_3 = \frac{u + u_2}{1 + uu_2/c^2} = \frac{3u + u^3/c^2}{1 + 3u^2/c^2}, \tag{4.59}$$

$$u_4 = \frac{u + u_3}{1 + uu_3/c^2} = \frac{4u + 4u^3/c^2}{1 + 6u^2/c^2 + u^4/c^4}, \quad \cdots\cdots \tag{4.60}$$

Met de pseudo-hoekvariabele is dat echter erg gemakkelijk. Volgens (4.55) geldt

$$u_n = c\tanh\varphi_n = c(e^{\varphi_n} - e^{-\varphi_n})/(e^{\varphi_n} + e^{-\varphi_n}). \tag{4.61}$$

De pseudo-hoekvariable is additief en dus is φ_n gelijk aan n maal φ. We kunnen daarom (4.61) met behulp van (4.48) en (4.49) schrijven als

$$u_n = c\frac{(1 + u/c)^n - (1 - u/c)^n}{(1 + u/c)^n + (1 - u/c)^n}. \tag{4.62}$$

We schrijven (4.62) nog een beetje anders

$$u_n = c\frac{1 - \left(\frac{1-u/c}{1+u/c}\right)^n}{1 + \left(\frac{1-u/c}{1+u/c}\right)^n}, \tag{4.63}$$

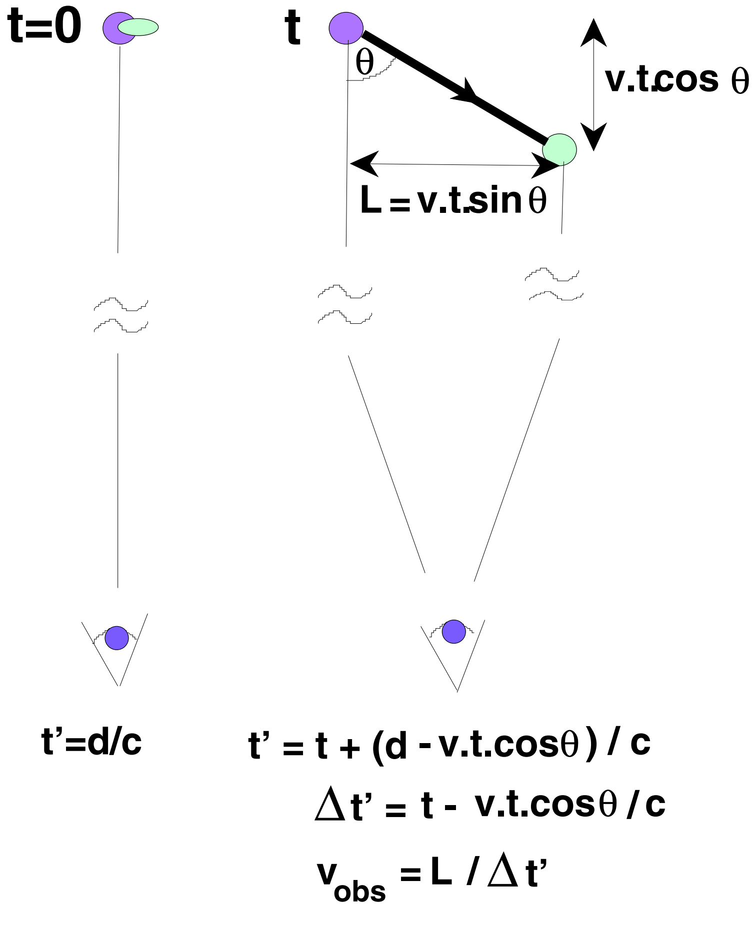
en zien dan dat de snelheid u_n bij toenemende n wel steeds groter wordt maar niet naar oneindig gaat, zoals dat bij Galilei transformaties zou gebeuren. In plaats daarvan nadert u_n van beneden naar de lichtsnelheid c als limietwaarde. Dit illustreert een belangrijk fysisch principe:

Volgens de Einsteinse relativiteitstheorie kunnen deeltjes zich niet sneller bewegen dan het licht. De lichtsnelheid is een bovengrens.

Opgave 12:

Bewijs formule (4.63) ook door inductie naar n. D.w.z. laat zien dat $u_1 = u$ (ja, ja, de eerste stap in een inductiebewijs is altijd volledig triviaal) en dat uit de geldigheid van de formule voor u_n, die van u_{n+1} volgt, voor willekeurige n. Hiertoe moet U dus de snelheden u_n en u "relativistisch optellen" en laten zien dat het resultaat door u_{n+1} wordt gegeven. Mocht U nog niet weten wat een bewijs door inductie is, dan weet U dat nu!

De conclusie dat niets zich sneller dan het licht kan voortbewegen lijkt in tegenspraak met wat in de astronomie bij quasars wordt waargenomen, waar gaswolken met grote snelheden worden uitgestoten. Er worden schijnbare snelheden gemeten die enkele malen groter dan de lichtsnelheid zijn. In de figuur is de situatie weergegeven. We stellen het tijdstip van



figuur 4.11

de explosie in de quasar op t=0. We zien deze explosie op aarde op het tijdstip $t' = d/c$, waarin uiteraard d de afstand tot de quasar is. Als de gaswolk zich onder een hoek θ (met de gezichtslijn van de quasar) beweegt, dan bereikt het licht van de gaswolk de waarnemer verhoudingsgewijze eerder naarmate deze hoek dichter bij nul ligt, eenvoudigweg omdat het licht een kleinere afstand af te leggen heeft om de waarnemer te bereiken. Deze vermindering in afstand bedraagt $vt\cos\theta$, waarin t de tijd is die verstreken is sinds de explosie. De gaswolk wordt waargenomen op het tijdstip $t' = t + (d - vt\cos\theta)/c$. De waarnemer blijft de quasar uiteraard opdezelfde plaats aan de hemel zien (aannemende dat de eigenbeweging verwaarloosd kan worden). Voor de waarnemer is het verschil in tijd verstreken tussen het waarnemen van de explosie en het waarnemen van de verwijderende gaswolk $\Delta t' = t(1 - (v/c)\cos\theta)$. De in die tijd door de gaswolk afgelegde transversale afstand bedraagt $L = vt\sin\theta$, zodat het voor de waarnemer lijkt alsof de gaswolk de volgende snelheid heeft:

$$v_{obs}(\theta) = L/\Delta t' = \frac{v\sin\theta}{1-(v/c)\cos\theta}. \tag{4.64}$$

Dit is dus een factor $1/(1-(v/c)\cos\theta)$ *groter* dan de transversale snelheid $v_{tr} = v\sin\theta$. Deze transversale snelheid is kleiner dan de werkelijke snelheid, en dus zeker kleiner dan de lichtsnelheid. Nemen we als voorbeeld $v = 4c/5$ en $\cos\theta = 4/5$, dan kunt U eenvoudig na rekenen dat $v_{obs} = 4c/3$, en dus beduidend groter dan de lichtsnelheid.

Opgave 13:

Laat zien dat voor vast gegeven v, $v_{obs}(\theta)$ maximaal is indien $\cos\theta = v/c$ en dat voor dit geval $v_{obs} = \gamma(v)v$. Hoe groot moet de snelheid van de gaswolk *minstens* zijn om een schijnbare snelheid groter dan de lichtsnelheid waar te nemen?

Uit dit voorbeeld zien we dat heel zorgvuldig geanalyseerd dient te worden *wat* we nu eigenlijk waarnemen, voordat we beweren dat er een tegenspraak is.

In de later ontwikkelde quantumtheorie is gebleken dat een lichtgolf zich onder bepaalde omstandigheden gedraagt als een deeltje. Een dergelijk deeltje wordt foton genoemd. Fotonen bewegen zich altijd met de lichtsnelheid c. In de elementaire-deeltjesfysica heeft men nog een ander type deeltje gevonden dat zich ook met de lichtsnelheid beweegt: het neutrino. Alle andere deeltje hebben snelheden die kleiner zijn dan c. We zullen later nog zien dat deeltjes die met de lichtsnelheid bewegen volgens de relativiteitstheorie massa nul hebben.

5 Algemene Lorentz transformaties

Standaard Lorentz transformaties in de x-, y- en z-richting geven een verband tussen inertiaalsystemen waarbij de lichtsnelheid niet verandert. We kunnen in feite algemeen nagaan dat de door formule (4.41) gegeven standaard Lorentz transformatie in een willekeurige richting deze eigenschap heeft. Dit zijn niet de enige lineaire transformaties van de ruimte-tijd die deze eigenschap hebben. Als we bijvoorbeeld eerst een standaard Lorentz transformatie in de x-richting uitvoeren en vervolgens een standaard Lorentz transformatie in de y-richting, dan geeft dit samen een transformatie die nog steeds de lichtsnelheid onveranderd laat, maar die toch niet gelijk blijkt te zijn aan een standaard Lorentz transformatie in een bepaalde richting.

Opgave 14:

Voer eerst een Lorentz transformatie uit in de x-richting en *daarna* een Lorentz transformatie in de y-richting. Neem voor het gemak u gelijk voor beide transformaties. Laat zien dat er *geen* $\vec{u}$ bestaat zodanig dat deze combinatie van twee simpele Lorentz transformaties van de vorm is zoals gegeven in formule (4.41). (Het is een combinatie van zo'n Lorentz transformatie en een draaiing, maar dat hoeft U hier niet te laten zien.)

We willen nu een algemene karakterisering geven van lineaire transformaties van ruimte-tijd coördinaten die in de Einsteinse relativiteitstheorie toegelaten zijn voor de beschrijving van het verband tussen inertiaalsystemen. Daartoe bekijken we de volgende kwadratische uitdrukking in de ruimte-tijdcoördinaten x, y, z en t van een gebeurtenis:

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \tag{5.1}$$

Deze kwadratische vorm heeft twee belangrijke eigenschappen. De eerste eigenschap is invariantie onder standaard Lorentz transformaties. Dat wil zeggen dat voor zo'n transformatie van x, y, z, t naar x', y', z', t' geldt

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2. \tag{5.2}$$

We gaan dit even na voor het geval van een transformatie in de x-richting, dus een transformatie volgens formule (4.37)

$$\begin{aligned} c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 &= c^2\gamma^2(u)(t - ux/c^2)^2 - \gamma^2(u)(x - ut)^2 - y^2 - z^2 \\ &= \gamma^2(u)(c^2t^2 - u^2t^2 - 2uxt + 2utx + u^2x^2/c^2 - x^2) - y^2 - z^2 \\ &= (1 - u^2/c^2)\gamma^2(u)(c^2t^2 - x^2) - y^2 - z^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \end{aligned} \tag{5.3}$$

De tweede belangrijke eigenschap luidt als volgt: Iedere lineaire transformatie van ruimte-tijd coördinaten die de kwadratische vorm invariant laat, laat ook de lichtsnelheid onveranderd. Ook dit gaan we na: Een punt van het front van een lichtgolf beweegt zich eenparig rechtlijnig met snelheid c. De wereldlijn van zo'n punt is een rechte lijn in de 4-dimensionale ruimte-tijd gegeven door de formules

$$\begin{aligned} x &= cn_xt + a_x, \\ y &= cn_yt + a_y, \\ z &= cn_zt + a_z, \end{aligned} \tag{5.4}$$

met daarin n_x, n_y, n_z de componenten van de eenheidsvector $\vec{n}$ die de richting van de beweging aangeeft, en a_x, a_y, a_z constanten, de waarden van de ruimtecoördinaten op $t = 0$. Bezie twee willekeurige verschillende gebeurtenissen op deze wereldlijn, met ruimte-tijd coördinaten x_1, y_1, z_1, t_1 en x_2, y_2, z_2, t_2. Daarvoor geldt

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= cn_x(t_1 - t_2), \\ y_1 - y_2 &= cn_y(t_1 - t_2), \\ z_1 - z_2 &= cn_z(t_1 - t_2). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Kwadrateren en optellen geeft

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = c^2(t_2 - t_1)^2, \tag{5.6}$$

oftewel

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = 0. \tag{5.7}$$

Er is een lineaire transfomatie $x,\ y,\ z,\ t \to x',\ y',\ z',\ t'$. Ook in de nieuwe ruimte-tijd coördinaten beweegt het golffrontpunt zich eenparig rechtlijnig, met een snelheid die we $\vec{v}\,' = (v'_x, v'_y, v'_z)$ noemen. De wereldlijn wordt weer beschreven door formules van de vorm (5.4)

$$\begin{aligned} x' &= v'_x t' + a'_x, \\ y' &= v'_y t' + a'_y, \\ z' &= v'_z t' + a'_z, \end{aligned} \tag{5.8}$$

Voor de nieuwe ruimte-tijd coördinaten van de twee verschillende gebeurtenissen op die lijn geldt dan ook weer

$$\begin{aligned} x'_1 - x'_2 &= v'_x(t'_1 - t'_2), \\ y'_1 - y'_2 &= v'_y(t'_1 - t'_2), \\ z'_1 - z'_2 &= v'_z(t'_1 - t'_2). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Voor de absolute waarde v' van de snelheid $\vec{v}\,'$ kunnen we schrijven

$$v'^2 = {v'_x}^2 + {v'_y}^2 + {v'_z}^2 = \left(\frac{x'_1 - x'_2}{t'_1 - t'_2}\right)^2 + \left(\frac{y'_1 - y'_2}{t'_1 - t'_2}\right)^2 + \left(\frac{z'_1 - z'_2}{t'_1 - t'_2}\right)^2. \tag{5.10}$$

We hebben aangenomen dat de lineaire transformatie de kwadratische vorm (5.1) en dus ook (5.6) invariant laat, d.w.z.

$$0 = c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2 = c^2(t'_2-t'_1)^2-(x'_2-x'_1)^2-(y'_2-y'_1)^2-(z'_2-z'_1)^2. \tag{5.11}$$

Dit geeft

$$c^2 = {v'_x}^2 + {v'_y}^2 + {v'_z}^2 = \left(\frac{x'_1 - x'_2}{t'_1 - t'_2}\right)^2 + \left(\frac{y'_1 - y'_2}{t'_1 - t'_2}\right)^2 + \left(\frac{z'_1 - z'_2}{t'_1 - t'_2}\right)^2. \tag{5.12}$$

en hieruit volgt $v'^2 = c^2$, of $v' = c$, hetgeen we wilden bewijzen.

Dit resultaat geeft ons de mogelijkheid om de transformaties die we in de relativiteitstheorie mogen gebruiken om inertiaalsystemen met elkaar te verbinden op een eenvoudige en algemene manier wiskundig te karakteriseren:

Een algemene Lorentz transformatie is een omkeerbare lineaire transformatie van de ruimte-tijd coördinaten die de kwadratische vorm $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ invariant laat.

Deze transformaties, die we verder kortweg Lorentz transformaties zullen noemen, vormen een collectie die uiteraard de standaard Lorentz transformaties bevat en ook de zuiver ruimtelijke draaiingen zoals bijvoorbeeld de door formule (4.57) gegeven draaiingen om de z-as. Men kan laten zien dat iedere Lorentz transformatie in deze zin verkregen kan worden als resultaat van een eindig aantal elkaar opvolgende standaard Lorentz transformaties en ruimtelijke draaiingen.

We herhalen nog eens de formulering van het relativiteitsprincipe in de vorm die Einstein er aan gegeven heeft:

Alle inertiaalsystemen zijn fysisch equivalent: De natuurverschijnselen gedragen zich in ieder inertiaalsysteem op dezelfde manier. Verschillende inertiaalsystemen zijn met elkaar verbonden door Lorentz transformaties. De natuurwetten moeten daarom Lorentz-invariant zijn.

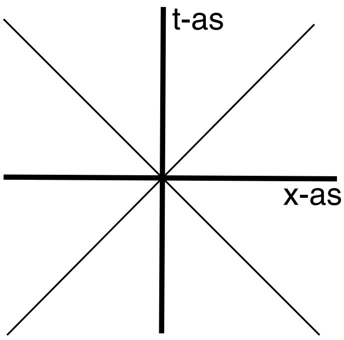
Tenslotte formuleren we een korte samenvattende conclusie en zeggen vast iets over wat verder besproken zal worden: De nieuwe interpretatie van Einstein van het relativiteitsprincipe, waarbij Lorentz transformaties zijn ingevoerd om overgangen tussen inertiaalsystemen te beschrijven, heeft er voor gezorgd dat het probleem van de constante lichtsnelheid is opgelost. Algemener blijkt te gelden dat de Maxwell theorie als geheel covariant is onder Lorentz transformaties. De Newtonse mechanica daarentegen is niet Lorentz covariant.

Omdat de Newtonse mechanica niet Lorentz-covariant is moet ze vervangen worden door een nieuw te formuleren mechanica. Ook dit is door Einstein gedaan. Het is experimenteel gebleken dat deze nieuwe mechanica de fysische realiteit nauwkeuriger beschrijft dan de mechanica van Newton, ook al blijft de laatste voor een groot gebied van fysiche verschijnselen een zeer goede benadering. We zullen de Einsteinse mechanica later in dit college bespreken, maar we willen eerst ingaan op enkele merkwaardige aspecten van de beschrijving van gebeurtenissen in de ruimte-tijd, zoals deze op eenvoudige manier uit de door Einstein gegeven gedachtengang volgt.

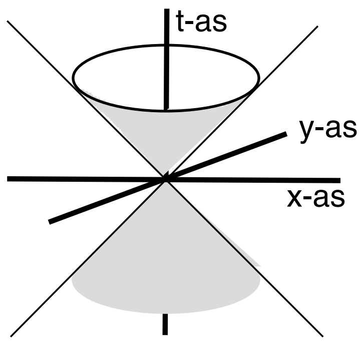
6 Verdere eigenschappen van de ruimte-tijd

We gebruiken de kwadratische vorm (5.1) om iets te zeggen over de relatie tussen twee verschillende gebeurtenissen gezien als punten in de ruimte-tijd. We tekenen weer plaatjes als hulpmiddel. Beschouw eerst alle punten die voldoen aan de vergelijking

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0. \tag{6.1}$$



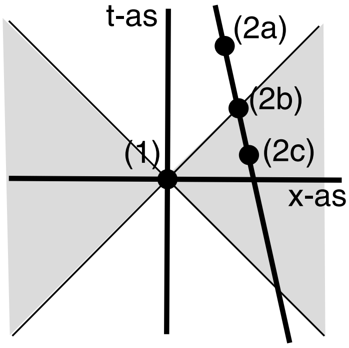
figuur 6.1



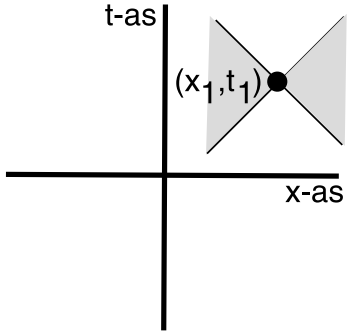
figuur 6.2

Deze verzameling vormt een "hyperkegel" (zie figuur 6.1). Dit zien we nog iets beter als we nog een extra ruimtelijke as tekenen, bijvoorbeeld de y-as (zie figuur 6.2). De kegel bestaat uit de wereldlijnen van lichtstralen die op op $t = 0$ door $x = y = z = 0$ gaan. We spreken daarom van *lichtkegel*. (Als we "aardse" eenheden van lengte en tijd als meter en seconde gebruiken zal de kegel in een plaatje als figuur 6.1 of 6.2 er natuurlijk veel "platter" uitzien dan hier getekend is.)

We bekijken nu (zie figuur 6.3) een waarnemer die zich in rust bevindt in $x = y = z = 0$. Zijn wereldlijn is de t-as. Gebeurtenis (1) is voor deze waarnemer het tijdstip $t = 0$. Daarnaast is er een tweede waarnemer die zich in een of ander voertuig bevindt dat



figuur 6.3



figuur 6.4

zich met eenparige snelheid beweegt. Op de wereldlijn van die waarnemer bekijken we drie verschillende gebeurtenisen, (2a), (2b) en (2c).

a. Voor gebeurtenis (2a) geldt

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 > 0 \tag{6.2}$$

Men zegt dat (2a) *tijdachtig* ("time-like") is ten opzichte van (1). De tweede waarnemer kan op het tijdstip van gebeurtenis (2a) vanuit (1) bereikt worden door een deeltje, bijvoorbeeld een kogel, mits het voldoende snelheid heeft.

b. Voor gebeurtenis (2b) geldt

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \tag{6.3}$$

Men zegt dat (2b) *lichtachtig* ("light-like") is ten opzichte van (1). Gebeurtenis (2b) kan vanuit (1) niet meer door een bewegend projectiel worden bereikt, maar nog wel door een lichtsignaal.

c. Voor gebeurtenis (2c) geldt

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 < 0 \tag{6.4}$$

Men zegt dat (2c) *ruimteachtig* ("space-like") is ten opzichte van (1). Gebeurtenis (2c) kan op geen enkele manier met gebeurtenis (1) verbonden worden.

We hebben in het voorafgaande het referentiepunt (1) in de oorsprong van het ruimte-tijd coördinatensysteem genomen. Algemener kunnen we twee willekeurige punten nemen, met coördinaten x_1, y_1, z_1, t_1 en x_2, y_2, z_2, t_2. We zeggen dan dat de twee punten *tijdachtig*, respectievelijk *lichtachtig*, respectievelijk *ruimteachtig* ten opzichte van elkaar zijn als de kwadratische vorm

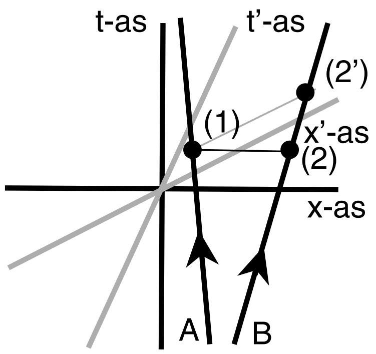
$$c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \tag{6.5}$$

groter dan nul, respectievelijk nul, respectievelijk kleiner dan nul is. Daarbij hoort een lichtkegel waarvan de basis niet meer in de oorsprong hoeft te liggen (zie figuur 6.4). Vanwege de Lorentz-invariantie van de kwadratische vorm zijn deze relaties en ook de lichtkegel onafhankelijk van het gekozen inertiaalsysteem.

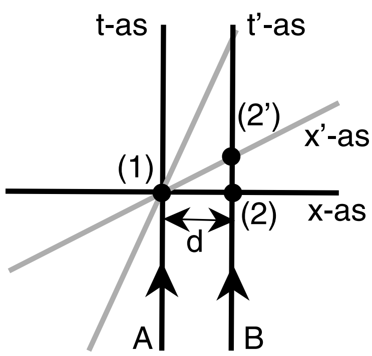
6.1 Gelijktijdigheid en tijdsdilatatie

Twee personen, A en B, bewegen zich in verschillende voertuigen en met verschillende snelheden, zoals getekend in figuur 6.5. Als we in de 4-dimensionale ruimte-tijd de beide wereldlijnen snijden met een hypervlak t =constant krijgen we gelijktijdige gebeurtenissen. In ons 2-dimensionale plaatje betekent dit het snijden van de wereldlijnen met een lijn evenwijdig aan de x-as. Veronderstel dat we van het gegeven inertiaalsysteem S overgaan naar een nieuw systeem S' dat zich met een snelheid u in de x-richting beweegt. We hebben in figuur 6.5 de coördinaat-assen van S zowel als S' getekend. Voor een waarnemer in S' zijn gebeurtenissen gelijktijdig als ze op een lijn evenwijdig aan de x'-as liggen. Voor zo'n waarnemer is de gebeurtenis (2') en niet (2) gelijktijdig met (1). We trekken daaruit de algemene conclusie:

Gelijktijdigheid van gebeurtenissen op verschillende plaatsen is géén absoluut begrip.



figuur 6.5



figuur 6.6

We berekenen het tijdsverschil tussen (2) en (2') om te zien om welke orde van grootte het bij dit verschijnsel gaat. We nemen daarvoor een iets vereenvoudigde situatie, met A en B in rust ten opzichte van S, A in de ruimtelijke oorsprong en B op een afstand d daarvan verwijderd (zie figuur 6.6). Het punt (2') is het snijpunt van de wereldlijn van B en van de nieuwe x'-as. De eerste wordt gegeven door $x = d$, de tweede door $t' = 0$, d.w.z. door de vergelijking $\gamma(u)(t - ux/c^2) = 0$. Het snijpunt (2') heeft dus als coördinaten $x = d$, en $t = ud/c^2$. Het verschil in tijd tussen de gebeurtenissen (2) en (2') is dan

$$\Delta t = ud/c^2. \tag{6.6}$$

Neem als voorbeeld daarin de afstand d gelijk aan de afstand aarde-zon, ongeveer $1,5 \times 10^8 km$, en als snelheid u van S' ten opzichte van S $10km/s$. We vinden dan $t = 1,7 \times 10^{-2} s$. Als d de afstand is van de aarde naar de dichtsbijzijnde ster, ongeveer $4,5 \times 10^{13} km$, en u weer $10km/s$, dan wordt t gelijk aan $5 \times 10^3 s$.

We kunnen ook het tijdsverschil tussen (2) en (2') berekenen zoals het door een waarnemer in S' wordt gemeten. Daarvoor moeten we de tijdscoördinaat t' van (2) in S' weten. Deze is $t' = \gamma(u)(t - ux/c^2) = -ud\gamma(u)/c^2$. Dit betekent dat het tijdsverschil tussen (2) en (2') in S' gelijk is aan

$$\Delta t' = ud\gamma(u)/c^2 \tag{6.7}$$

en de verhouding tussen Δt en $\Delta t'$

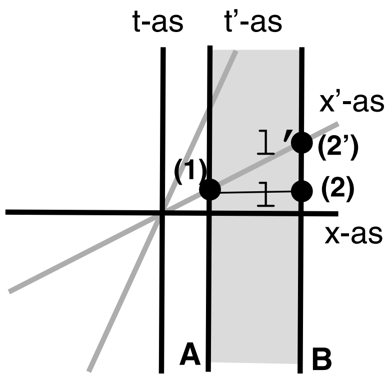
$$\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \gamma(u). \tag{6.8}$$

Conclusie:

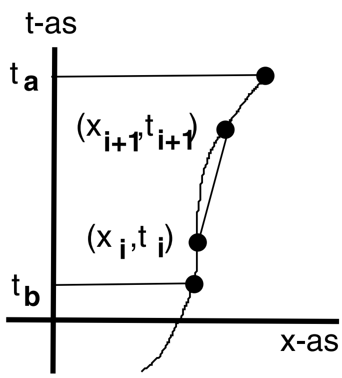
Het resultaat van een tijdmeting is afhankelijk van het inertiaalsysteem waarin we ons bevinden: Een tijdsinterval Δt in een inertiaalsysteem S wordt in een systeem S' dat zich met een snelheid u ten opzichte van S beweegt een interval $\Delta t' = \gamma(u)\Delta t = \Delta t/\sqrt{1 - u^2/c^2}$. Dit verschijnsel noemt men tijdsdilatatie.

6.2 Contractie van lengtes

We bekijken de invloed van het overgaan naar een bewegend coördinaatstelsel op de meting van lengtes. We doen dat weer aan de hand van een 2-dimensionaal ruimte-tijd plaatje (zie figuur 6.7). Het inertiaalsystem waarvan we uit gaan noemen we weer S. Daarin



figuur 6.7



figuur 6.8

bezien we een vast voorwerp, een balk, die zich in rust bevindt en die lengte ℓ heeft. De historie van de balk wordt beschreven door het gebied tussen de twee wereldlijnen A en B die horen bij de uiteinden van de balk. De lengte ℓ van de balk is het verschil van de x-coördinaten van twee punten met *dezelfde* t, bijvoorbeeld van de punten (2) en (1). Veronderstel dat de afstand van het linker uiteinde van de balk tot de oorsprong a is. We gaan over naar een nieuw inertiaalsysteem S' dat zich met de snelheid u ten opzichte van S beweegt. De lengte van de balk in S' is nu het verschil in x'-coördinaten van twee punten met gelijke t'-coördinaat, bijvoorbeeld van (2') en (1) die beide $t' = 0$ hebben. De wereldlijn B van het rechter uiteinde wordt in S gegeven door $x = a + \ell$, en omdat $x = \gamma(u)(x' + ut')$, in S' door de vergelijking $\gamma(u)(x' + ut') = a + \ell$. Het punt (2') heeft $t' = 0$, en dus $x' = (a + \ell)/\gamma(u)$. Op dezelfde manier wordt de wereldlijn A van het linker uiteinde in S' beschreven door de vergelijking $\gamma(u)(x' + ut') = a$, en heeft het punt (1) de x'-coördinaat $x' = a/\gamma(u)$. De lengte van de balk zoals die wordt gemeten in S' noemen we ℓ'. Het is het verschil van de x'-coördinaten van de gebeurtenissen (2') en (1), dus

$$\ell' = \ell/\gamma(u) = \ell\sqrt{1 - u^2/c^2}. \tag{6.9}$$

Conclusie:

Een balk die zich in zijn lengte richting met een constante snelheid u beweegt blijkt tengevolge van die beweging met een factor $\gamma^{-1}(u) = \sqrt{1 - u^2/c^2}$ korter te zijn geworden. Dit verschijnsel noemt men lengte contractie of ook wel Lorentz-FitzGerald contractie.

(G. F. FitzGerald was naast Lorentz en Poincaré een derde belangrijke voorloper van Einstein.)

6.3 Eigentijd

We hebben in hoofdstuk 4, vanaf formule (4.24), een parametrisering van de wereldlijn van een bewegend puntdeeltje gebruikt om transformatieformules voor snelheden en versnellingen af te leiden. Deze parametrisering $x(\tau)$, $t(\tau)$ was onafhankelijk van het gebruikte inertiaalsysteem, maar verder nog willekeurig.

We gaan gaan nu een heel bepaalde parametrisering van dit type invoeren, die om verschillende redenen erg handig is, en die bovendien een duidelijke fysische betekenis heeft. Beschouw de wereldlijn van een deeltje, zoals voor het 2-dimensionale geval getekend is in figuur 6.8. De snelheid van het deeltje hoeft niet constant te zijn. We benaderen de beweging door een opeenvolging van kortdurende eenparig rechtlijnige bewegingen. Voor het i-de tijdsinterval $(t_i, t_{i+1}\ )$ geldt dat de constante snelheid v_i gelijk is aan

$$v_i = (x_{i+1} - x_i)/(t_{i+1} - t_i). \tag{6.10}$$

Met behulp van de in hoofdstuk 5 ingevoerde kwadratische vorm definiëren we voor de twee punten (x_i, t_i) en (x_{i+1}, t_{i+1}) de uitdrukking

$$\Delta\tau_i = c^{-1}\sqrt{c^2(t_{i+1} - t_i)^2 - (x_{i+1} - x_i)^2} = (t_{i+1} - t_i)\sqrt{1 - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{c^2(t_{i+1} - t_i)^2}} = \Delta t_i\sqrt{1 - v_i^2/c^2}. \tag{6.11}$$

Dit getal, een soort afstand tussen de twee punten, is *onafhankelijk* van het gebruikte inertiaalsysteem. We bekijken vervolgens de som van deze getallen voor alle intervallen tussen t_a en t_b. Dit geeft ons een *langs* de wereldlijn gemeten benaderde "afstand" van t_a naar t_b, die ook nog steeds Lorentz invariant is. Als we tenslotte het aantal tussenpunten laten toenemen, gaat de som in de limiet van oneindig veel tussenpunten over in een integraal:

$$\sum_i \Delta t_i\sqrt{1 - v_i^2/c^2} \rightarrow \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{1 - v^2(t)/c^2}\ dt. \tag{6.12}$$

Op deze manier hebben we een parametrisering van de wereldlijn van een bewegend deeltje gekregen die in ieder inertiaalsysteem het zelfde is en op dezelfde eenvoudige manier berekend wordt. We noemen deze parameter τ. Voor het 4-dimensionale geval krijgen we dan voor τ als functie van t de formule:

$$\tau(t_b) - \tau(t_a) = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{1 - |\vec{v}(t)|^2/c^2}\; dt. \tag{6.13}$$

Vanwege de extra factor c^{-1} in (6.11) heeft τ de dimensie van een tijd. We zien direct uit formule (6.13) dat voor een deeltje in rust de parameter met de gewone tijd samenvalt. Algemener geldt dat voor een eenparig rechtlijnig bewegend deeltje τ de tijd is die gemeten wordt als men overgaat naar het inertiaalsysteem waarin het deeltje in rust is, d.w.z. het inertiaalsysteem dat met het deeltje meebeweegt. We noemen de parameter τ daarom de *eigentijd*.

De eigentijd is niet alleen gedefiniëerd voor deeltjes die eenparig rechtlijnig bewegen; de integraal (6.13) kan natuurlijk ook berekend worden voor de gebogen wereldlijn van een deeltje met een snelheid die niet constant is. Ook in dit algemene geval interpreteren we de eigentijd als de tijd aangewezen door een met het deeltje meebewegende klok. Daarbij moet men wel een klok hebben die niet beinvloed wordt door de bij versnelling of vertraging optredende inertiaalkrachten. Een slingeruurwerk zou niet geschikt zijn. Het menselijk hart is natuurlijk ook niet geschikt, niet alleen vanwege de geringe nauwkeurigheid, maar vooral omdat het bij te grote inertiaal-krachten zal ophouden te functioneren. Wel geschikt zijn de atoomklokken die tegenwoordig algemeen gebruikt worden voor zeer nauwkeurige tijdsbepalingen.

Samengevat is de eigentijd de tijd van de met U meereizende klok. Het is deze klok die bepaalt hoe oud U bent (hoe oud U zich voelt wordt door andere parameters bepaald). Het is duidelijk dat de tijd die de met een waarnemer meereizende klok aanwijst invariant is onder Lorentz transformatie - zo geformuleerd is het een trivialiteit. Dit kan dus gebruikt worden als een meer fysische definitie van het begrip eigentijd, en verklaart ook de naamgeving. Het is vrij eenvoudig verg. (6.13) hieruit af te leiden. Deze formule is van belang voor een waarnemer die bijvoorbeeld wil voorspellen hoe veel ouder U bent geworden als U op t_a hem verlaat, om op t_b weer terug te keren. Als we de tijd tussen twee tikken van de klok klein kiezen (en dt is willekeurig klein), mogen we de snelheid tussen twee tikken constant veronderstellen, zodat de tijd $d\tau$ van de bewegende klok (Uw klok dus), verstreken tussen twee tikken van de klok van de waarnemer, gegeven wordt door $d\tau = dt/\gamma(v(t))$. Al deze stukjes bij elkaar optellen (integreren) geeft verg. (6.13).

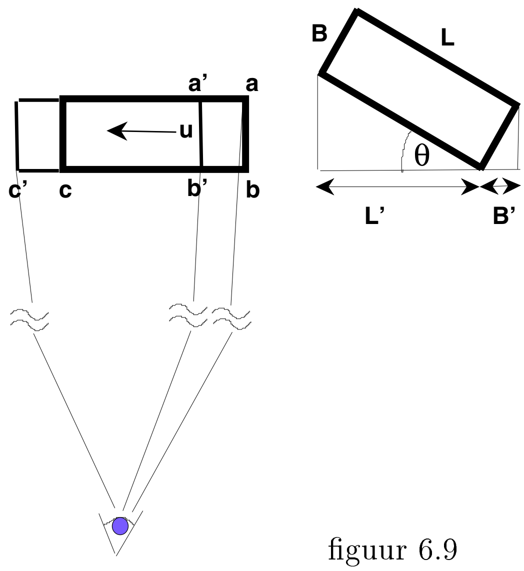
Er zijn vele *schijnbare* tegenspraken die men met de relativiteitstheorie kan construeren. De nadruk ligt op het woord schijnbaar. Vaak blijkt dat men het begrip relativiteit te losjes pleegt te hanteren. U moet maar eens lezen wat Feynman daarover in zijn befaamde lectures zegt (Vol I, par. 16-1. *Relativity and the philosophers*). De meest bekende paradox is uiteraard die van de tweeling. Maar ik zal eerst wat andere voorbeelden noemen. Laat een hardloper een polsstok van 4 meter lengte evenwijdig aan de grond dragen en stel dat hij zo hard loopt dat voor een stilstaande waarnemen de polsstok een contractie met een factor twee ondergaat. De stok past daarbij in z'n geheel in een schuur van 2 meter lengte, waar de hardloper net aan voorbij raast. Vanuit zijn perspectief wordt echter diezelfde schuur verkort met een factor 2, en is nu slechts één meter, zodanig dat zijn stok maar liefst 4 schuren nodig heeft om opgeborgen te worden. Het probleem is natuurlijk dat op het moment dat we de stok als waarnemer in de schuur *zien* passen, de uiteinden van de stok voor de hardloper zelf *niet* gelijktijdig met de uiteinden van de schuur samenvallen. Men moet zich goed afvragen wat het betekent dat de stok in de schuur *past*.

Een ander voorbeeld is dat van twee ruimteschepen die door een stevig stuk kabel aan elkaar bevestigd zijn. Zij krijgen vanuit de aarde de opdracht om gelijktijdig hun motoren te ontsteken. We gaan ervan uit dat ze precies dezelfde versnelling ondergaan op ieder moment van de tijd. Toch is de bewering dat de kabel (of een van de ruimteschepen) zal breken.

Opgave 15:

Analyseer dit heel zorgvuldig aan de hand van een ruimte-tijd diagram.

Wat betreft de Lorentz contractie is het opmerkelijk dat het 50 jaar geduurd heeft eer iemand zich heeft afgevraagd *hoe* men nu een object waarneemt als het met grote snelheid voorbij komt. Omdat een object ook een eindige afmeting in de richting loodrecht op die van de beweging heeft, die geen contractie ondergaat, zoudt U op het eerste gezicht verwachten dat het vervormd wordt. Maar laten we eens wat zorgvuldiger kijken, aannemende dat we daarbij op zeer grote afstand van het object staan zodat alle lichtstralen uitgaande van dat object ons oog vanuit dezelfde richting bereiken. Maar dat betekent dat delen die verder van de waarnemer af zijn, het waargenomen licht iets eerder uitzonden, dan de delen die het dichtste bij de waarnemer liggen. Dit is natuurlijk maar een heel klein tijdsverschil. Als het

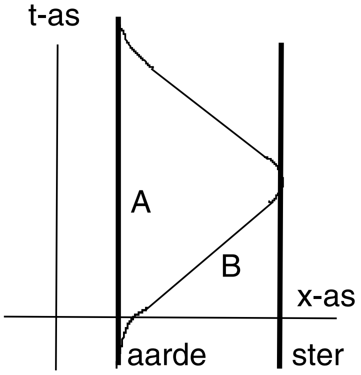


figuur 6.9

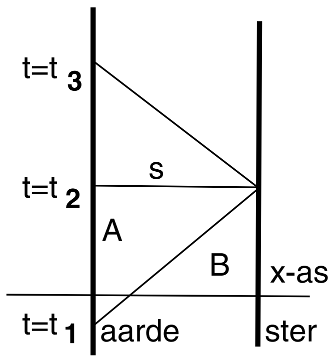
object een breedte B heeft bedraagt dit tijdsverschil $\Delta t = B/c$. Echter als de snelheid dicht bij dit van het licht komt, dan heeft in die periode het object zelf bijna dezelfde afstand B (in de richting van de snelheid) afgelegd. We zien dus een verder afgelegen hoekpunt, a in de figuur, rechts van het corresponderende (maar dichterbij gelegen hoekpunt) b. Op het moment van waarnemen zien we (gelijktijdig) de ruimte-tijd gebeurtenissen corresponderende met c', b' en a. Hierbij is dus de afstand $c' - b'$ door de Lorentz contractie verkort tot $L' = L/\gamma(u)$ en zien we de afstand $b' - a$ als de afstand $B' = u\Delta t = uB/c$. Indien we nu de hoek θ invoeren, zodanig dat $u/c = \sin\theta$, dan komen L' en B' precies overeen met de *perspectivische* verkorting van het zelfde object (in rust), waargenomen onder een hoek θ met de oorspronkelijke bewegingsrichting. Dit opmerkelijke feit hangt uiteraard samen met het feit dat $1/\gamma(u) = \sqrt{1 - u^2/c^2} = \cos\theta$. Het werd voor het eerst beschreven door J. Terrell in 1959.

6.4 De tweeling paradox

Van een tweeling onderneemt de éne broer, die we B zullen noemen, een ruimtereis. De andere broer (of zus), zeg A, blijft op aarde achter. We hebben dit enigszins schematisch getekend in figuur 6.10. B vliegt met een raket waarvan de snelheid die van het licht benadert naar een dichtbij gelegen ster en keert vervolgens weer naar de aarde terug. Hij maakt een veilige landing vlak bij het oorspronkelijke vertrekpunt en wordt daar welkom geheten door een oudere persoon, die hem bekend voorkomt. Na enig heen en weer gepraat en tot zijn grote verbazing blijkt het zijn broer A te zijn, die in zijn afwezigheid meer dan vijftien jaar ouder geworden is. B meent dat hij zelf slechts een paar maanden weg is geweest; dat leest hij af op zijn atoomklok, en zo voelt hij het zelf ook. Hij begrijpt niet hoe het mogelijk is dat A in de tussentijd zoveel ouder is geworden. A heeft jarenlang op de terugkeer van zijn broer gewacht en begrijpt er ook niets van.



figuur 6.10



figuur 6.11

We zullen nu laten zien dat het leeftijdsverschil, dat tussen de broers (of zussen) is onstaan, logisch volgt uit hetgeen we in het voorafgaande over tijdsmetingen hebben gezegd. Om de berekening zo eenvoudig mogelijk te houden bezien we een enigszins geïdealiseerde situatie. Deze is in figuur 6.11 getekend. B vertrekt op $t = t_1$ van het punt $x = 0$, bereikt onmiddelijk een constante snelheid v en komt daarmee op tijdstip $t = t_2$ aan bij een ster die zich op een afstand s van de aarde bevindt. Er geldt natuurlijk $t_2 - t_1 = s/v$. B onderneemt direct de terugreis, ook weer met de zelfde constante snelheid v, en komt op aarde op zijn beginpunt terug op tijdstip t_3. Er geldt $t_3 - t_2 = s/v$. A ziet dus zijn broer terug keren op het tijdstip t_3, na een tijdsinterval $\Delta t = 2s/v$. Dit alles is berekend in het gegeven inertiaalsysteem, het systeem waarin de aarde en dus ook A zich in rust bevinden. Om te weten welke tijden B gedurende zijn reis met zijn eigen klok gemeten heeft moeten we naar de eigentijd langs zijn wereldlijn kijken. Omdat de wereldlijn van B uit twee rechte lijnen bestaat kan de integraal in formule (6.13) eenvoudig berekend worden: Als we de eigentijd τ van B op het moment van zijn vertrek van de aarde nul stellen, dan is τ op het moment van aankomst en vertrek op de ster, gelijk aan $(t_2 - t_1)/\gamma(v) = s/(v\gamma(v))$ en vervolgens op het ogenblik van terugkeer op aarde $2s/(v\gamma(v))$.

We hebben dus gevonden dat er voor A tussen vertrek en terugkeer een tijdsinterval $\Delta t = 2s/v$ is verstreken en volgens de klok van B een korter tijdsinterval $\Delta t' = 2s/(v\gamma(v))$. Het is naïef is om te denken dat men een tegenspraak kan krijgen door de redenering dat de situatie even goed vanuit tweeling B bekeken kan worden, waardoor het B is die ouder geworden zou zijn. Zo'n redenering is niet juist. De situatie is wat de rol van A en B betreft niet symmetrisch. De beweging van B is op bepaalde momenten versneld of vertraagd, die van A niet. Dit blijft zo in ieder ander inertiaalsysteem waarin men de situatie zou kunnen bekijken.

6.5 INTERMEZZO (*gravitationel tijdsdilatatie*)

De tegenspraak is dus alleen schijnbaar omdat slechts één van de tweelingen een versnelling zal ondergaan, die nodig is om terug te keren naar zijn beginpunt. Kennelijk is het zo dat een versnelling ook aanleiding geeft tot tijdsdilatatie. Versnelling is equivalent met zwaartekracht, of zoals Einstein het formuleerde, trage massa is gelijk aan gravitationele massa. Deels komt dit door de keuze van Newton's gravitatieconstante, maar het feit dat deze gelijkheid voor *alle* materie geldig is, maakt het tot een universele wet. Hierdoor kunnen we (lokaal) geen onderscheid maken tussen een vrij vallende lift en een intertiaalstelsel. De conclusie is dus kennelijk dat in een gravitatieveld klokken langzamer lopen. Dit kan met een heel eenvoudig voorbeeld geillustreerd worden. Om in een ruimtestation gravitatie te simuleren kan men het laten ronddraaien, zodanig dat in de woon- en werkruimtes de centrifugale versnelling precies gelijk is aan de gravitatieversnelling op aarde (dus ongeveer $10\ m/s^2$). Vanuit een stilstaande waarnemer bezien, zeg iemand in het centrum van het ronddraaiende ruimtestation, waar geen centrifugale versnelling optreedt (dus waar de "zwaartekracht" nul is) bewegen de klokken in de woon- en werkruimten, bevestigd aan de roterende wand van het ruimtestation, met een snelheid die gelijk is aan $v = \omega r$, waarin ω de hoeksnelheid is. Die klokken ondergaan dus een tijdsdilatatie met een factor $1/\sqrt{1 - \omega^2 r^2/c^2}$. Dit kan ook geschreven worden als $1/\sqrt{1 - 2V_\omega(r)/c^2}$, waarin $V_\omega = \omega^2 r^2/2$ precies de centrifugale potentiaal is, ofwel de arbeid die men per massa-eenheid verricht als men tegen de centrifugale potentiaal in van een woonruimte op de wand naar het midden van het ruimtestation reist (de centrifugale versnelling bedraagt $a_\omega(r) = \omega^2 r$, zodat $\int_0^r dr' a_\omega(r') = \omega^2 r^2/2$). Volgens Einstein is dit equivalent met een gravitatieveld. Het punt dat geen kracht ondervindt bevindt zich natuurlijk niet langer in het (graviterende) centrum, maar in oneindig. Immers Newton's gravitatiewet zegt dat de kracht afvalt omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand. Om de tijdsdilatatie in een gravitatieveld te berekenen kunnen we dus de centrifugale potentiaal vervangen door de gravitationele potentiaal (per eenheid van massa), $V_{grav} = GM/r$. We concluderen dus dat de klokken in een gravitatieveld langzamer lopen en dat de tijdsdilatatie gegeven wordt door $1/\sqrt{1 - 2GM/(rc^2)}$. Dit is precies het resultaat dat men kan afleiden uit Einstein's algemene relativiteitstheorie. Merk op dat bij $r = 2GM/c^2$ de klok *stil komt te staan.* Deze straal, tegenwoordig bekend als de Schwarzschild straal, is ook de straal waar de ontsnappingsnelheid precies gelijk aan de lichtsnelheid is. Laplace had zich al gerealiseerd dat een ster mogelijk zo compact kon worden dat licht niet van haar oppervlak kan ontsnappen. Hij noemde dit zwarte sterren. Nu noemen we het zwarte gaten.

Doordat de tijd bij de Schwarzschild straal stil staat (het oppervlak dat daarmee correspondeert heet de horizon) kan niets uit het inwendige ontsnappen. Het lijkt alsof er een gat in de ruimte-tijd zit.

We kunnen eigentijd ook definiëren als er krachten op een object werken, zolang de eigentijd maar gedefinieerd wordt als de tijd gemeten in een lokaal Lorentz stelsel. Dat betekent strikt gesproken dat onze standaard tijd een heel kleine correctie behoeft om de eigentijd uit af te leiden.

Opgave 16:

Hoeveel jonger zijn we na 10 jaar dan onze tweeling, die vrij in de ruimte zweeft.

Nu een paar getallen: Als doel van de reis kiezen we Sirius, één van de sterren, die zich betrekkelijk dicht bij de aarde bevinden. De afstand van Sirius tot de aarde is 8,8 lichtjaren. (Een lichtjaar is de afstand die het licht in 1 jaar aflegt, dus $365 \times 24 \times 3600 \times 300.000 km = 9,5 \times 10^{12} km$). Voor de snelheid van het ruimteschip nemen we $v = 0,9998 \times c$. Omdat v zeer weinig van de lichtsnelheid c verschilt is Δt nagenoeg gelijk aan $2 \times 8,8 = 17,6$ jaar. De factor v/c is $1 - 2 \times 10^{-4}$, dus v^2/c^2 is nagenoeg $1 - 4 \times 10^{-4}$, dus $1 - v^2/c^2 \approx 4 \times 10^{-4}$ en $\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 2 \times 10^{-2} = 1/50$. Daarmee wordt $\Delta t'$ gelijk aan ruim 4 maanden.

Een ruimtereis, over deze afstand en met een dergelijke snelheid, ligt voorlopig nog ver buiten onze mogelijkheden. Bij minder ambitieuze proefnemingen, die men met de huidige techniek zou kunnen realiseren - denk bijvoorbeeld aan reizen met onbemande ruimtevaartuigen door het zonnestelsel - is het te verwachten effect nog veel te klein. Toch beschikken we over een rechtstreekse experimentele bevestiging van het door de tweeling paradox, of klok paradox, voorspelde tijdsverschil. Al in 1971 hebben de amerikanen Hafele en Keating dit huzarenstukje voor elkaar gekregen door met een Cesiumklok als medepassagier een vliegreis (gewoon met een lijnvliegtuig!) om de aarde te maken, zowel in westelijke als in oostelijke riching. Door de twee richtingen te nemen kan men effecten t.g.v. het gravitatieveld en de draaiing van de aarde nauwkeurig aftrekken van het resultaat en heeft men op een netto vliegtijd van bijna 100 uur (dat kan tegenwoordig toch heel wat sneller) een tijdsverschil gemeten van ongeveer 150 nanoseconden, in goede overeenstemming met de speciale relativiteitstheorie. Bij deeltjesversnellers is het dagelijkse kost deze tijdsdilatatie op een juiste manier mee te nemen, anders zouden de versnellers niet eens werken!

6.6 Doppler-effect

Het Doppler-effect kennen we uit het dagelijkse leven. De toon van de sirene van een brandweerauto klinkt hoger als de auto naar ons toe rijdt en lager als de auto zich van ons af beweegt. We horen dat goed op het moment dat de auto ons passeert.

Het Doppler-effect is een elementair fysisch verschijnsel dat optreedt bij alle trillingsverschijnselen die zich voortplanten. Een monochromatische golf die zich in de 1-dimensionale ruimte beweegt wordt beschreven door de algemene formule

$$\varphi(x,t) = A \sin(kx - \omega t) + B \cos(kx - \omega t). \tag{6.14}$$

We noemen k het golfgetal en ω de cirkelfrequentie. De constanten A en B geven de amplitude van de golf en de beginconditie. Voor de eenvoud veronderstellen we $\varphi(0,0)=0$. Dan geldt $B=0$. We hebben dan

$$\varphi(x,t)=A\sin(kx-\omega t). \tag{6.15}$$

We nemen deze formule eerst op een vast tijdstip. De maxima van φ worden gegeven door $kx-\omega t=(2n+\frac{1}{2})\pi$. De afstand tussen twee op elkaar volgende maxima noemen we de golflengte en geven we aan met λ. Het is duidelijk dat deze golflengte gelijk is aan $2\pi/|k|$. Als we vervolgens formule (6.15) voor een vaste x bekijken zien we dat de tijd tussen twee op elkaar volgende maxima gelijk is aan $2\pi/\omega$. Dit betekent dat de gewone frequentie ν gelijk is aan $\omega/(2\pi)$. Tenslotte zien we dat een maximum zich beweegt met een snelheid $v=\omega/k$. Voor de absolute waarde van v geldt dan $|v|=\nu\lambda$. We noemen v de voortplantingssnelheid van de golf. Een 1-dimensionale monochromatische golf wordt dus in het algemeen bepaald door constanten A en B, en door drie parameters λ, ν en v, waarvan er twee onafhankelijk zijn. We vatten de belangrijkste relaties nog even samen

$$\lambda=2\pi/|k|, \qquad \nu=\omega/(2\pi), \qquad v=\omega/k=\pm\nu\lambda. \tag{6.16}$$

We veronderstellen dat de waarde die de amplitude φ op een zeker moment op een bepaalde plaats aanneemt onafhankelijk is van het inertiaalsysteem waarin we ons bevinden. We kunnen dan met behulp van een Lorentz transformatie overgaan van het gegeven systeem S, met coördinaten x, t, naar een nieuw systeem S', met x', t'. In de nieuwe coördinaten wordt de golf beschreven door een nieuwe functie $\varphi'(x',t')=\varphi(x,t)$. Met de formule (4.22) voor de inverse van een Lorentz transformatie schrijven we

$$kx-\omega t=k\gamma(u)(x'+ut')-\omega\gamma(u)(t'+ux'/c^2)=\gamma(u)(k-u\omega/c^2)x'-\gamma(u)(\omega-uk)t'. \tag{6.17}$$

Daarmee wordt de uitdrukking voor φ' gelijk aan

$$\varphi'(x',t')=A\sin(k'x'-\omega't'), \tag{6.18}$$

met

$$k'=\gamma(u)(k-u\omega/c^2), \qquad \omega'=\gamma(u)(\omega-uk). \tag{6.19}$$

We hebben dus in S' een golfbeweging van dezelfde vorm, nu met golfgetal k' en cirkelfrequentie ω'.

We veronderstellen dat we te maken hebben met een electromagnetische golf, een lichtgolf of een radiogolf, die zich in het vacuum voortplant. We nemen $k>0$. Uit $|u|<c$ volgt $k'>0$. Voor electromagnetische golven geldt $\omega=c|k|$, dus hier $\omega=ck$. Voor k' hebben we dan

$$k'=\gamma(u)(k-u\omega/c^2)=\gamma(u)k(1-u/c)=k\sqrt{\frac{c-u}{c+u}} \tag{6.20}$$

en voor ω'

$$\omega'=\gamma(u)(\omega-uk)=\gamma(u)\omega(1-u/c)=\omega\sqrt{\frac{c-u}{c+u}}. \tag{6.21}$$

Voor de gewone frequentie ν vinden we op deze wijze

$$\nu' = \frac{\omega'}{2\pi} = \frac{\omega}{2\pi}\sqrt{\frac{c-u}{c+u}} = \nu\sqrt{\frac{c-u}{c+u}}. \tag{6.22}$$

Voor $u > 0$ ziet een waarnemer in S' het systeem S van zich af bewegen. Voor $u < 0$ ziet hij S juist naar zich toe bewegen. We concluderen:

Volgens de relativiteitstheorie wordt licht met frequentie ν, dat wordt uitgezonden door een lichtbron die zich met een snelheid $u > 0$ van ons af beweegt, door ons waargenomen als licht met de verlaagde frequentie

$$\nu' = \nu\sqrt{\frac{c-u}{c+u}}. \tag{6.23}$$

Als de lichtbron met een snelheid $v = -u > 0$ naar ons toe beweegt zien we de verhoogde frequentie

$$\nu' = \nu\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}. \tag{6.24}$$

Het Doppler-effect is niet iets dat alleen in een relativistische beschrijving van golfvoortplanting optreedt; we kennen het ook in de niet-relativistische fysica. Het kan immers gemakkelijk in het dagelijks leven om ons heen worden waargenomen, zoals we al aan het begin van dit hoofdstuk opmerkten. De verandering in waargenomen frequentie is natuurlijk verschillend. Om de niet-relativistische vorm van formule (6.23) te vinden gaan we opnieuw uit van de monochromatische 1-dimensionale golf van formule (6.15) die we weer beschrijven in twee inertiaal systemen S en S' . Het verband tussen deze systemen wordt nu gegeven door een Galilei transformatie (4.4). Met behulp van de inverse van deze transformatie vinden we in plaats van (6.17)

$$kx - \omega t = k(x' + ut') - \omega t' = kx' - (\omega - ku)t' \tag{6.25}$$

en dus voor de nieuwe cirkelfrequentie

$$\omega' = \omega - ku. \tag{6.26}$$

Voor een electromagnetische golf met $k > 0$ wordt dit

$$\omega' = \omega(1 - u/c). \tag{6.27}$$

Het niet-relativistische analogon van (6.23) is dus

$$\nu' = \nu(1 - u/c). \tag{6.28}$$

Het is interessant om de relativistische en niet-relativistische formules voor het Doppler-effect met elkaar te vergelijken. Als u klein is ten opzichte van c kunnen we de relativistische formule (6.23) ontwikkelen naar machten van u/c. We krijgen dan

$$\nu' = \nu\sqrt{\frac{c-u}{c+u}} = \nu\sqrt{\frac{1-u/c}{1+u/c}} = \nu\sqrt{1 - \frac{2u/c}{1+u/c}} = \nu(1 - u/c + \tfrac{1}{2}u^2/c^2 + \cdots). \tag{6.29}$$

Het Doppler-effect voor licht is bij normale snelheden zeer klein, dit in tegenstelling tot wat we bij geluidsgolven waarnemen. In de relativistische zo wel als in de niet-relativistische theorie is het van de orde u/c. Het verschil tussen het niet-relativistische en relativistische effect is nog kleiner, namelijk van orde $(u/c)^2$.

We hebben ons in het voorafgaande bezig gehouden met een 1-dimensionale situatie. Als we de resultaten daarvan vertalen naar de 3-dimensionale wereld krijgen we een beschrijving van het z.g. *longitudinale* Doppler-effect: het effect dat optreedt als de snelheid van de lichtbron, gezien vanuit ons standpunt, geen tangentiële component heeft. In de astronomie heeft men de spectra gemeten van licht dat wordt uitgezonden door zeer ver van ons verwijderde melkwegstelsels. (Denk daarbij aan afstanden van de orde van 10^8 à 10^9 lichtjaren). De spectra die men op deze wijze vindt zijn de zelfde als die men kent uit de aardse fysica; ze vertonen alleen kleine verschuivingen naar het infra-rood. Dit is het gevolg van het Doppler-effect: de melkwegstelsels bewegen zich met grote snelheid van ons af. (Men concludeert op grond van de grootte van de gemeten Dopplerverschuivingen tot snelheden in de orde van $10^4 km/s$.) We kunnen gemakkelijk met behulp van de zojuist gevonden formules nagaan wat de verschuivingen in de frequenties van bijvoorbeeld de bekende waterstoflijnen bij een dergelijke snelheid zijn. Deze verschuivingen zijn zelf goed te meten, maar ze zijn vaak te klein om het verschil te zien tussen het relativistische en het niet relativistische effect.

Het Doppler-effect werd afgeleid door te laten zien hoe een monochromatische golfbeweging, die de amplitude van de golf op ieder tijdstip in ruimte en tijd geeft, transformeert. Er werd voor de eenvoud aangenomen dat die amplitude zelf in ieder inertiaalstelsel hetzelfde is. Voor een lichtgolf, die bestaat uit electromagnetische golven zult U later in de studie leren dat dit niet het geval is. De amplitude van een lichtgolf wordt beschreven door een electrisch (en een daarmee in tegenfase zijnde magnetisch) veld. Electrische en magnetische velden transformeren niet triviaal onder een Lorentz transformatie. Echter, ook een electromagnetische golf beschrijft een trilling waaraan een golflengte en een frequentie kan worden toegekend. Deze trilling hangt van plaats en tijd af via de combinatie $kx - \omega t$ (voor een vlakke golf in de x-richting) of in het algemeen van de combinatie $\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t = \sum_{i=1}^{3} k_i x_i - \omega t$ (voor een golf in een willekeurige richting $\vec{k}$). Bij de transformatie naar een ander inertiaalstelsel zal in het algemeen de amplitude van de golf op een niet triviale wijze transformeren, maar deze transformatie is op ieder punt langs de golf dezelfde. In het getransformeerde stelsel manisfesteert de golf zich weer als een golf, afhangende van plaats en tijd via de combinatie $\vec{k}\,' \cdot \vec{x}\,' - \omega' t' = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t$. Omdat we weten hoe $\vec{x}$ en t onder een Lorentz transformatie transformeren, kunnen we bepalen hoe $\vec{k}$ en ω transformeren, zoals eerder afgeleid, zie verg. (6.19). Voor een golfbeweging in een willekeurige richting $\vec{k}$ (onder een hoek θ met de x-richting) en een Lorentz transformatie (met een snelheid u in de x-richting) geldt dus

$$k'_x = \gamma(u)(k_x - u\omega/c^2), \quad k'_y = k_y, \quad k'_z = k_z, \quad \omega' = \gamma(u)(\omega - uk_x) = \gamma(u)(1 - u\cos\theta/c)\omega. \tag{6.30}$$

Opgave 17:

Controleer dat $\vec{k}\,' \cdot \vec{x}\,' - \omega' t' = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t$.

We kunnen nu eenvoudig het Doppler-effect bepalen voor een golf langs de x-as (dus in de richting van de relative beweging tussen bron en waarnemer), of dwars daarop. Laten we eerst het laatste geval bestuderen; we spreken dan van een *transversaal* Doppler-effect. Omdat nu

$\vec{k}$ loodrecht staat op de bewegingsrichting (de x-richting) geldt $k_x = 0$, zodat $\omega' = \gamma(u)\omega$. Onder een Galilei transformatie zou de factor $\gamma(u)$ afwezig zijn, en in de Newtonse theorie is er geen transversaal Doppler-effect. We zien dus dat voor een transversaal bewegende bron (of waarnemer) de waargenomen frequentie groter is dan in het ruststelsel.

Het Doppler-effect kan ook fysisch verklaard worden door op te merken dat de tijd Δt tussen twee golfdalen precies als de duur van een tik van een klok gezien kan worden. Voor een bewegende bron nemen we een langzamer verlopende tijd waar, aanleiding gevende tot een langere periode $\Delta t' = \gamma(u)\Delta t$ tussen twee golfdalen. Maar als de bron (waarnemer) zich ook nog eens met een snelheid u van de waarnemer (bron) af beweegt, dan doet een tweede golfdal er $u\gamma(u)\Delta t/c$ langer over om aan te komen. Immers de bron (waarnemer) heeft tussen twee tikken een afstand $u\gamma(u)\Delta t$ afgelegd, en de golf doet er $u\gamma(u)\Delta t/c$ seconden over om die extra afstand te overbruggen. Als de beweging tussen bron en waarnemer niet langs de richting van waarneming plaats vindt, maar onder een hoek θ' daarmee, dan is de extra tijd tussen twee tikken uiteraard $u\gamma(u)\Delta t \cos\theta'/c$. We vinden derhalve $\Delta t' = \gamma(u)(1 + u\cos\theta'/c)\Delta t$. Met een cirkelfrequentie $\omega = 2\pi\nu$, bepaald door $2\pi/\Delta t$, volgt

$$\omega' = \omega/\left[\gamma(u)(1 + u\cos\theta'/c)\right]. \tag{6.31}$$

Voor $\theta' = 0$ vinden we nu het eerder gevonden resultaat: als de bron met een snelheid u van de waarnemenr af beweegt wordt de frequentie *kleiner* met een factor $\sqrt{(c-u)/(c+u)}$. (De golflengte wordt dus groter en we spreken van een roodverschuiving). Maar voor het transversale Doppler-effect vinden we nu dat de frequentie eveneens kleiner wordt, terwijl we eerder het omgekeerde hadden geconcludeerd.

Dat kan natuurlijk niet. Wat is hier aan de hand zult U zich afvragen? De oplossing zit hem wederom in het feit dat we ons heel goed moeten afvragen *wat* we meten. In de eerste afleiding van het transversale Doppler-effect is de hoek θ de hoek met de bewegingsrichting in het stelsel waarin de bron in rust is. In de tweede afleiding, bezien vanuit het standpunt van de waarnemer, is θ' de hoek voor de richting waaruit het signaal afkomstig is, in het stelsel waarin de waarnemer in rust is. Als de relatieve beweging tussen bron en waarnemer in de signaalrichting plaats vindt dan zijn die hoeken uiteraard gelijk ($\theta = \theta' = 0$). Bij het transversaal Doppler-effect is dit *niet* het geval.

Opgave 18:

Gegeven dat beide uitdrukkingen voor de transformatie van ω, $\omega' = \omega\gamma(u)(1 - u\cos\theta/c)$ en $\omega' = \omega/[\gamma(u)(1+u\cos\theta'/c)]$, correct zijn. Laat zien dat $\cos\theta' = (\cos\theta - u/c)/(1 - u\cos\theta/c)$.

Dit heet (relativistische) aberratie, welbekend uit de sterrenkunde, waar de varierende richting van de beweging van een aardse waarnemer door draaiing van de aarde om de zon (en in mindere mate door de draaiing om haar as) tot kleine schommelingen in de positie van de sterren aanleiding geeft (de maximale afwijking bedraagt iets meer dan 20 boogseconden).

Merk op dat $\omega' = \omega/\left[\gamma(u)(1 + u\cos\theta'/c)\right]$ ook als $\omega = \gamma(u)(1 + u\cos\theta'/c)\omega'$ geschreven kan worden. Dit is precies de inverse transformatie van S' naar S, in plaats van S naar S'. Juist deze inverse transformatie is relevant als we uitgaan van de situatie van de waarnemer! Er zijn maar weinig leerboeken die bij het transversaal Doppler-effect aandacht besteden aan de vraag wat we nu precies met transversaal bedoelen. Dat is waarom we er hier wat uitvoeriger op ingaan. Altijd weer moeten we ons vragen wat het meetproces is. Dus eerst denken, dan rekenen.

Het relativistische Doppler-effect, *inclusief* het transversale effect, werd al in 1938 nauwkeurig gemeten door Ives en Stilwell. In de jaren '60 is dit nog eens overgedaan, gebruik makende van een op de uiteinden van een rotor opgestelde bron (of detector) van gammastraling, gebruikmakende van het Mössbauer effect. Dit effect is gebaseerd op het feit dat in een vaste stof bij absorbtie van de (gamma)straling de terugstoot verdeeld wordt over het hele materiaal (door de binding van het atoom aan de rest). Hierdoor kan de energie van het foton heel nauwkeurig worden vastgelegd (er is geen verbreding van de absorbtielijn, zoals bij losse atomen in een gas).

6.7 INTERMEZZO (*gravitationele roodverschuiving*)

Als we nu terugdenken aan ons roterend ruimtestation, dan zien we dat het transversale Doppler-effect een eenduidige relatie met de zogenaamde gravitationele roodverschuiving heeft. Straling afkomst van een ster heeft een kleine roodverschuiving door het gravitatieveld van de ster. Evenzo is licht dat op het aardoppervlak wordt uitgezonden en boven in een hoge toren wordt waargenomen, ook een heel klein beetje naar het rood verschoven. Dit is de basis van een van de klassieke tests geweest van Einstein's algemene relativiteistheorie, zoals uitgevoerd door Pound en Rebka in 1960. Ook hier werd van het Mössbauer effect gebruik gemaakt. Bron en detector waren op een hoogte van 21,6 meter ten opzichte van elkaar opgesteld. Pound en Rebka waren in staat de voorspelde verschuiving, $\Delta\omega/\omega = 2,56 \times 10^{-15}$ te meten! (Probeer de grootte van dit effect zelf na te rekenen).

7 Lorentz 4-vectoren

In de 3-dimensionale ruimte kennen we het begrip vector. Een vector is iets wat niet alleen een grootte heeft maar ook een richting. Een vector $\vec{a}$ wordt dus beschreven door drie getallen, de drie componenten a_x, a_y, a_z van de vector in de richting van de drie coördinaatassen van een rechthoekig of Cartesisch ruimtelijk coördinaatsysteem met coördinaten x, y en z.

Bij overgang van één Cartesisch coördinaatsysteem C, met coördinaten x, y, en z, naar een tweede systeem C', met x', y' en z', veranderen de componenten van een vector op de dezelfde wijze als de ruimtelijke coördinaten. Stel bijvoorbeeld dat we overgaan naar een stelsel C' dat ten opzichte van C gedraaid is over een hoek θ rond de z-as. De coördinaten transformeren dan volgens

$$\begin{aligned} x' &= \cos\theta x + \sin\theta y, \\ y' &= \cos\theta y - \sin\theta x, \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{7.1}$$

De componenten van een vector $\vec{a}$ veranderen dan op dezelfde manier, nl. als

$$\begin{aligned} a'_x &= \cos\theta a_x + \sin\theta a_y, \\ a'_y &= \cos\theta a_y - \sin\theta a_x, \\ a'_z &= a_z. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Een vector $\vec{a}$ heeft een lengte, die we soms als a of $|\vec{a}|$ aangeven, en die gedefiniëerd is als

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{7.3}$$

De lengte van een vector is in ieder Cartesisch coördinaatstelsel het zelfde; voor een draaiing zoals weergegeven in de formules (7.1) en (7.2) kunnen we dat eenvoudig verifiëren. Voor twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is er een inwendig product, dat we aangeven als $\vec{a} \cdot \vec{b}$, en dat gedefiniëerd is als

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{7.4}$$

Het inwendig product, dat iets zegt over de lengte van beide vectoren en hun onderlinge hoek, is ook onafhankelijk van het gekozen Cartesisch coördinaatsysteem. Er geldt natuurlijk

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}. \tag{7.5}$$

In de niet-relativistische fysica komen veel vectorgrootheden voor; het gebruik van de bijbehorende vectornotatie maakt het mogelijk allerlei eigenschappen en relaties compact te formuleren. In de mechanica hebben we als vectoren behalve de snelheid natuurlijk ook versnelling, impuls en kracht. De plaats van een deeltje is een vector als we coördinaatstelsels met de zelfde oorsprong bekijken. In de theorie van het electromagnetisme hebben we onder meer de electrische veldsterkte.

Opmerking: Behalve vectoren zijn er ook *pseudo-vectoren*. Hierbij komt er een extra minteken voor de componenten als we naar een gespiegeld coördinatenstelsel overgaan, bijvoorbeeld $x' = -x$, $y' = -y$, $z' = -z$, of $x' = -x$, $y' = y$, $z' = z$. In de mechanica is het impulsmoment van een deeltje ten opzichte van een vaste oorsprong een pseudo-vector; in het electromagnetisme hebben we de magnetische veldsterkte als pseudo-vector. In dit inleidend college zullen we ruimtespiegelingen buiten beschouwing laten. We hoeven dan geen onderscheid te maken tussen vectoren en pseudo-vectoren, en mogen het impulsmoment en de magnetische veldsterkte als vectoren opvatten.

De tot nu toe gebruikte aanduiding voor de drie assen van rechthoekige ruimtelijke coördinaatstelsels en voor de daarbij behorende componenten van vectoren is niet erg handig, als we maximaal willen profiteren van de mogelijkheden tot compacte formuleringen, die het vectorbegrip ons biedt. Dit is vooral duidelijk bij formules waarin er over componenten gesommeerd moet worden. We zullen daarom van nu af rechthoekige ruimtelijke coördinaten niet meer aangeven als x, y en z, maar als x_1, x_2 en x_3. Deze coördinaten horen dus bij de x_1-, x_2- en x_3-as. De componenten van een vector $\vec{a}$ zullen we a_1, a_2 en a_3 noemen. We kunnen dan de lengte van een vector $\vec{a}$ en het inwendig product van een vector $\vec{a}$ met een vector $\vec{b}$ met behulp van sommatietekens wat korter schrijven als

$$|\vec{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} a_i^2}, \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i, \tag{7.6}$$

De formules die de relaties tussen twee Cartesische coördinaatsystemen beschrijven worden matrixformules. Zo schrijven we (7.1) en (7.2) als

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} D_{ij} x_j \tag{7.7}$$

en

$$a'_i = \sum_{j=1}^{3} D_{ij} a_j \tag{7.8}$$

waarbij de D_{ij} de elementen zijn van de 3×3 matrix

$$D = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.9}$$

Een draaiing over een willekeurige hoek en om een willekeurige as - dus niet noodzakelijk één der coördinaatassen - kan op deze manier met behulp van een geschikte 3×3 matrix worden beschreven. Onder zo'n draaiing blijft de lengte van de coördinaatvector onveranderd, d.w.z. er geldt

$$\sum_{i=1}^{3} {x'_i}^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 \qquad \sum_{i=1}^{3} {a'_i}^2 = \sum_{i=1}^{3} a_i^2. \tag{7.10}$$

Omgekeerd kan men nagaan dat iedere lineaire transformatie x_1, x_2, $x_3 \to x'_1$, x'_2, x'_3, die deze eigenschap heeft een draaiing is, of een draaiing gevolgd door een spiegeling. Men noemt zo'n transformatie wel een *orthogonale transformatie*, en de 3×3 matrix D_{ij}, die er volgens formule (7.7) bijhoort, een *orthogonale matrix*.

Opmerkingen:

- In de lineaire algebra wordt eenvoudig afgeleid dat een matrix orthogonaal is dan en slechts dan als de inverse van de matrix gelijk is aan zijn gespiegelde.

- In de 3-dimensionale ruimte kent men behalve vectoren ook tensoren, grootheden met 9 componenten. De vervorming van een vast voorwerp onder invloed van uitwendige krachten wordt beschreven met behulp van de elasticiteitstheorie. Als de situatie ruimtelijk anisotroop is, d.w.z. verschillend in verschillende richtingen, dan gebruikt men daarbij een z.g. elasticiteitstensor.

- Men kan ook plaatsafhankelijke vectoren gebruiken: in dat geval zijn de componenten zelf functies van x_1, x_2 en x_3. Men voert dan begrippen als gradiënt, divergentie en rotatie van vectoren in. Het werken met zulke begrippen noemt men *vector-analyse*. Er is natuurlijk ook *tensor-analyse*.

Eén van de leidende ideeën van de relativiteitstheorie is dat gebeurtenissen beschreven kunnen worden als punten van een 4-dimensionale ruimte, de ruimte-tijd. We gaan daarom in deze 4-dimensionale ruimte een aantal begrippen invoeren, die analoog zijn aan begrippen die we kennen van de gewone 3-dimensionale ruimte, en die we in het voorafgaande kort hebben samengevat. De voordelen zullen de zelfde zijn: compacte schrijfwijze van belangrijke relaties en formules. We beginnen ook hier met een betere notatie. We gebruiken natuurlijk x_1, x_2 en x_3 in plaats van x, y en z voor de ruimtelijke coördinaten van een gebeurtenis. Als vierde coördinaat nemen we niet de tijd t zelf, maar t vermenigvuldigd met de constante lichtsnelheid c. Deze vierde coördinaat noemen we x_0, dus $x_0 = ct$. Het voordeel van deze keuze is dat de vier coördinaten op deze manier de zelfde dimensie hebben, nl. de dimensie van een lengte. We schrijven dan voor een punt in de 4-dimensionale ruimte

$$\underline{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3). \tag{7.11}$$

Let daarbij op de volgorde die we gekozen hebben. Merk ook op dat de schrijfwijze $\underline{x}$, die we om practische redenen in dit college zullen gebruiken, géén standaardnotatie is. Meestal schrijft men voor het viertal gewoon x, maar dat hadden we hier al gebruikt voor de lengte van $\vec{x}$. Een andere gewoonte is de vier coördinaten aan te geven als x_μ (of als x^μ), waar bij de griekse index wordt geacht de waarden 0,1,2 en 3 aan te nemen, terwijl latijnse indices geacht worden de waarden 1,2 en 3 aan te nemen (dus alleen voor ruimtelijke componenten).

De nieuwe manier om ruimte-tijd coördinaten aan te geven maakt het mogelijk de Lorentz transformaties, die optreden als we van een gegeven inertiaalsysteem S overgaan naar een ander inertaalsysteem S', in een compacte matrixvorm te schrijven, net zo als we dat hier boven met de orthogonale transformaties in de Cartesische ruimte hebben gedaan. De standaard Lorentz transformatie in de x_1-richting van formule (4.37) wordt dan

$$x'_\mu = \sum_{\alpha=0}^{3} (L_1)_\mu{}^\alpha x_\alpha, \tag{7.12}$$

met daarin de 4×4 matrix $(L_1)_\mu{}^\alpha$ gegeven als

$$(L_1)_\mu{}^\alpha = \begin{pmatrix} \gamma(u) & -\gamma(u)u/c & 0 & 0 \\ -\gamma(u)u/c & \gamma(u) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.13}$$

Let op de gevolgen van het feit dat we de tijdcoördinaat $x_0 = ct$ voorop gezet hebben. Ook hebben we bij het aangeven van de indices van de matrix L_1 de rechter index boven gezet. Dit is niets meer dan een notatie kwestie. We zullen verderop uitleggen waarvoor dit handig is.

Op dezelfde manier schrijven we ook de standaard Lorentz transformaties in de x_2 en x_3 richting van formules (4.39) en (4.40) met matrices $(L_2)_\mu{}^\alpha$ en $(L_3)_\mu{}^\alpha$, die we uit deze formules kunnen aflezen, en die gelijk zijn aan

$$(L_2)_\mu{}^\alpha = \begin{pmatrix} \gamma(u) & 0 & -\gamma(u)u/c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma(u)u/c & 0 & \gamma(u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7.14}$$

$$(L_3)_\mu{}^\alpha = \begin{pmatrix} \gamma(u) & 0 & 0 & -\gamma(u)u/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma(u)u/c & 0 & 0 & \gamma(u) \end{pmatrix}. \tag{7.15}$$

Ook algemene Lorentz transformaties zoals besproken in Hoofdstuk 5 kunnen op deze manier worden geschreven met behulp van een 4×4 matrix L.

Merk op dat de inverse van een Lorentz transformatie met matrix L door de inverse matrix L^{-1} wordt beschreven. Als we met behulp van de matrix L van één inertiaalsysteem S naar een tweede inertiaalsysteem S' overgaan, en vervolgens met de matrix L' naar een derde systeem S'', kunnen we het totale resultaat beschrijven met de matrix $L'L$, het matrixproduct van L en L', met matrixelementen

$$(L'L)_\mu{}^\alpha = \sum_{\beta=0}^{3} (L')_\mu{}^\beta L_\beta{}^\alpha. \tag{7.16}$$

We definiëren nu algemeen een Lorentz 4-vector als een grootheid met 4 componenten die bij de overgang naar een ander inertiaalsysteem op dezelfde manier transformeren als de ruimte-tijd coördinaten x_0, x_1, x_2 en x_3. (Merk even op dat we toch maar ruimte-tijd blijven zeggen, ondanks de volgorde van x_0, x_1, x_2, x_3.) We zullen zulke 4-vectoren aangeven als $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\cdots$, met $\underline{a} = (a_0, a_1, a_2, a_3)$, $\underline{b} = (b_0, b_1, b_2, b_3)$, $\cdots$, etc. Bij een transformatie van de ruimte-tijd coördinaten $\underline{x} \to \underline{x}'$ volgens

$$x'_\mu = \sum_{\alpha=0}^{3} L_\mu{}^\alpha x_\alpha \tag{7.17}$$

hoort dus een transformatie van de componenten $\underline{a} \to \underline{a}'$ volgens

$$a'_\mu = \sum_{\alpha=0}^{3} L_\mu{}^\alpha a_\alpha \tag{7.18}$$

Als we ons beperken tot inertiaalsystemen die de zelfde oorsprong hebben, kunnen we de ruimte-tijd coördinaten van een gebeurtenis zelf ook opvatten als de componenten van een Lorentz 4-vector; in het algemenere geval vormen de *verschillen* van de coördinaten van twee gebeurtenissen een 4-vector.

We definiëren het *inwendig product* van twee 4-vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$ als

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_0 b_0 - \sum_{i=1}^{3} a_i b_i. \tag{7.19}$$

Dit inwendig product is verschillend van het 3-dimensionale inwendig product in (7.6). Dit laatste is positief definiet: $\vec{a} \cdot \vec{a}$ is groter of gelijk aan nul; uit $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ volgt bovendien $\vec{a} = \vec{0}$. Vanwege het minteken in (7.18) is dit niet meer het geval voor het 4-dimensionale inwendige product.

Het inwendig product in de ruimte-tijd is indefiniet: $\underline{a} \cdot \underline{a}$ kan negatief zijn; bovendien kan $\underline{a} \cdot \underline{a}$ nul zijn zonder dat de 4-vector $\underline{a}$ zelf nul is.

We laten nu zien waarom men voor Lorentz 4-vectoren *dit* inwendig product heeft gekozen, en niet een definiet positief inwendig product met alleen plustekens. Bekijk het inwendig product van de ruimte-tijd 4-vector $\underline{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ met zich zelf. Dit is gelijk aan

$$\underline{x} \cdot \underline{x} = x_0^2 - \sum_{i=1}^{3} x_i^2 = c^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2. \tag{7.20}$$

Dit is niets anders dan de fundamentele kwadratische vorm, die we in het begin van hoofdstuk 5 hebben ingevoerd, en verder in hoofdstuk 6 hebben gebruikt om allerlei belangrijke fysische eigenschappen van de ruimte-tijd te karakteriseren. Deze kwadratische vorm was invariant onder standaard Lorentz transformaties. Dit hing direct samen met het belangrijke fysisch gegeven dat de lichtsnelheid het zelfde was in alle inertiaalsystemen. We hebben in hoofdstuk 5 de invariantie van de kwadratische vorm in feite gebruikt om algemene Lorentz transformaties mee te definiëren.

Uit de invariantie van $\underline{x} \cdot \underline{x}$ kan men gemakkelijk afleiden dat ook $\underline{x} \cdot \underline{y}$, het inwendig product van twee ruimte-tijd 4-vectoren $\underline{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ en $\underline{y} = (y_0, y_1, y_2, y_3)$, invariant is onder Lorentz transformaties. Bekijk daartoe de inwendige producten van $\underline{x} + \underline{y}$ en $\underline{x} - \underline{y}$ met zich zelf. Beide zijn natuurlijk Lorentz invariant. Met de bilineariteit van het inwendig product schrijven we

$$\begin{aligned} (\underline{x} + \underline{y}) \cdot (\underline{x} + \underline{y}) &= \underline{x} \cdot \underline{x} + \underline{y} \cdot \underline{y} + 2\underline{x} \cdot \underline{y} \\ (\underline{x} - \underline{y}) \cdot (\underline{x} - \underline{y}) &= \underline{x} \cdot \underline{x} + \underline{y} \cdot \underline{y} - 2\underline{x} \cdot \underline{y} \end{aligned} \tag{7.21}$$

en dus

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = \{(\underline{x} + \underline{y}) \cdot (\underline{x} + \underline{y}) - (\underline{x} - \underline{y}) \cdot (\underline{x} - \underline{y})\}/4. \tag{7.22}$$

Daaruit volgt dat $\underline{x} \cdot \underline{y}$ Lorentz invariant is voor willekeurige $\underline{x}$ en $\underline{y}$. Voor de componenten van de ruimte-tijd 4-vectoren $\underline{x}$ en $\underline{y}$ kunnen we 8 willekeurige getallen nemen. Voor twee Lorentz 4-vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$ kunnen we dat ook doen. Beide stellen van 8 getallen transformeren op de zelfde manier als we met een Lorentz transformatie naar een ander inertiaalsysteem overgaan. Daaruit kunnen we een belangrijke conclusie trekken:

Het inwendig product $\underline{a} \cdot \underline{b}$ van twee willekeurige Lorentz 4-vectoren $\underline{a}$ en $\underline{b}$ is invariant onder Lorentz transformaties.

De 4-dimensionale ruimte-tijd voorzien van het inwendig product

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = x_0 y_0 - \sum_{i=1}^{3} x_i y_i \tag{7.23}$$

en de daar bij behorende kwadratische vorm

$$\underline{x} \cdot \underline{x} = x_0^2 - \sum_{i=1}^{3} x_i^2, \tag{7.24}$$

wordt wel *Minkowski-ruimte* genoemd.

We merken nog op dat het invariante inwendige procuct (kortweg ook wel *inproduct* genoemd) van twee 4-vector $\underline{x}$ en $\underline{y}$ gegeven wordt door

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = \sum_{\mu=0}^{3} x_\mu y^\mu = \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu y_\mu, \tag{7.25}$$

indien we de notatie van een *bovenindex* hebben ingevoerd,

$$(y^0, y^1, y^2, y^3) = (y_0, -y_1, -y_2, -y_3), \quad (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x_0, -x_1, -x_2, -x_3). \tag{7.26}$$

Bij het vormen van een inwendig product sommeert men dus over de componenten van de twee 4-vectoren, waarbij de ene 4-vector de index boven en de andere de index beneden heeft (vergelijk de notatie voor de 4×4 matrix L behorende bij een Lorentz transformatie). Zo'n sommatie komt zo vaak voor dat ik U niet wil onthouden wat Einstein wel gekscherend zijn belangrijkste ontdekking heeft genoemd, namelijk de sommatieconventie.

De sommatieconventie: over twee gelijke indices, waarvan een boven en een onder, wordt automatisch gesommeerd.

Dit voorkomt veel schrijfwerk en het verdient de voorkeur in de paar gevallen dat sommatie niet plaats dient te vinden, dit expliciet te vermelden.

In het geval van de 3-dimensionale Cartesische ruimte is de lengte van een vector $\vec{a}$ gelijk aan de wortel van het inwendig product van die vector met zich zelf. Voor een Lorentz 4-vector $\underline{a}$ kan het inwendig product negatief zijn. In dat geval moet men de "lengte" van $\underline{a}$ zorgvuldiger definiëren. In aansluiting op wat we in hoofdstuk 6 besproken hebben, onderscheiden we de volgende gevallen:

- $\underline{a} \cdot \underline{a} > 0$: De 4-vector $\underline{a}$ heet *tijdachtig.*
- $\underline{a} \cdot \underline{a} = 0$: De 4-vector $\underline{a}$ heet *lichtachtig.*
- $\underline{a} \cdot \underline{a} < 0$: De 4-vector $\underline{a}$ heet *ruimteachtig.*

Tijdachtige en lichtachtige 4-vectoren hebben dus een "lengte" $|\underline{a}| = \sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}}$, maar voor ruimteachtige 4-vectoren moeten we kennelijk $|\underline{a}| = \sqrt{-\underline{a} \cdot \underline{a}}$ definiëren. Omdat $\underline{a} \cdot \underline{a}$ en het teken van dit inwendig product onafhankelijk is van het stelsel waarin we het bepalen - het is invariant onder Lorentz transformaties - is voor een ruimteachtige 4-vector aldus de lengte welgedefiniëerd.

Een lichtachtige vector volgt altijd een lichtstraal. Het is een fundamenteel uitgangspunt van de relativiteitstheorie dat dit in ieder stelsel het geval is (het lichtpostulaat). Even fundamenteel is dat voor een tijdachtige vector er altijd een inertiaalstelsel te vinden is waarvoor de ruimtelijke componenten van de 4-vector gelijk aan nul zijn. Evenzo kan voor een ruimteachtige vector $\underline{a}$ altijd een stelsel gevonden worden waarvoor de tijdscomponent gelijk aan nul is. In zo'n stelsel kan men met recht over de lengte van de vector spreken ($|\vec{a}|$), die dus in een willekeurig stelsel gedefinieerd kan worden door $\sqrt{-\underline{a} \cdot \underline{a}}$.

Opgave 19:

Geef een bewijs van de uitspraken gedaan in bovenstaande paragraaf.

Uit de bespreking van het Doppler-effect is eenvoudig af te leiden dat we met golfvector en cirkelfrequentie een 4-vector kunnen samenstellen. Transformatie regels werden afgeleid door te eisen dat $\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t$ onveranderd blijft onder een Lorentz transformatie.

Opgave 20:

Laat zien dat $\underline{k} = (\omega/c, k_x, k_y, k_z)$ transformeert als een 4-vector onder Lorentz transformaties.

Hiermee hebben we dus naast het voorbeeld van de punten in de ruimte-tijd een ander expliciet voorbeeld van een Lorentz 4-vector. De golf-4-vector speelt een belangrijke rol, omdat uit vele experimenten, al voor de formulering van de relativiteitstheorie, bekend was dat licht naast een golfkarakter ook een deeltjeskarakter heeft. Het bijbehorende deeltje werd een foton genoemd. Hoewel het niet tot stilstaan gebracht kan worden (immers de lichtsnelheid is in ieder stelsel gelijk aan c), manifesteert het zich wel als een deeltje met een energie $E = h\nu = \hbar\omega$ en een impuls $\vec{p} = \hbar\vec{k}$. Impuls is hoeveelheid beweging, en voor een deeltje met massa m wordt het gegeven door $\vec{p} = m\vec{v}$. In het volgende hoofdstuk zullen we dit uitvoerig bespreken. Verder is $\hbar = h/(2\pi)$ en h de constante van Planck, $h = 6,626 \times 10^{-34} kg\ m^2/s$. Deze had h ingevoerd om tot een correcte beschrijving van de thermische straling te komen. Einstein heeft h in zijn bestudering van het fotoelectrische effect geïnterpreteerd als de constante die nodig is om te verklaren dat licht dat op een kathode valt slechts electronen met een heel bepaalde energie ($E = h\nu$) vrijmaakt. Het was hiervoor, en *niet* voor de relativiteitstheorie, dat Einstein in 1922 de Nobelprijs kreeg. De stralingsdruk kon nu gezien worden als de impulsoverdracht door deze lichtdeeltjes (een lichtbundel kan gezien worden als een stroom van lichtdeeltjes). Deze impuls is precies $\hbar\vec{k}$ (in grootte dus gelijk aan h/λ).

Om de overeenkomsten en de verschillen tussen de gebruikelijke 3-vectoren en de in dit hoofdstuk ingevoerde Lorentz 4-vectoren goed te begrijpen geven we nog een overzicht.

Overzicht:

In de 3-dimensionale ruimte gebruiken we Cartesische coördinaatstelsels.	In de 4-dimensionale ruimte-tijd gebruiken we inertiaalstelsels.
Alle Cartesische coördinaatsystemen zijn equivalent wat hun fysische betekenis betreft (isotropie van de ruimte).	Alle inertiaalsystemen zijn fysisch equivalent (het relativiteitsprincipe).
Ze zijn onderling verbonden door orthogonale transformaties (draaiingen en spiegelingen).	Ze zijn onderling verbonden door Lorentz transformaties.
Er is een positief definiet inwendig product, waar mee de lengte van een vector gedefiniëerd kan worden.	Er is een indefiniet inwendig product, dat voor tijdachtige en ruimteachtige 4-vetoren een "lengte" definiëert.
Het inwendig product en de daarvan afgeleide lengte zijn invariant onder orthogonale transformaties.	Het inwendig product en de daarvan eventueel afgeleide "lengte" zijn invariant onder Lorentz transformaties.

8 Relativistische mechanica

De basisformule van de Newtonse mechanica, de relatie $\vec{F} = m\vec{a}$, is niet invariant onder Lorentz transformaties. Dat betekent dat de Newtonse mechanica niet past in de Einsteinse relativiteitstheorie. Dit hebben we in hoofdstuk 4 expliciet laten zien door de transformatie van de versnelling te bestuderen. Zie ook de korte samenvattende conclusie aan het einde van hoofdstuk 5.

We gaan in dit hoofdstuk de basisbegrippen formuleren van een nieuwe mechanica, die aan de eisen van de speciale relativiteitstheorie voldoet, en die we daarom Einsteinse mechanica kunnen noemen. Zoals we al eerder opgemerkt hebben blijft de Newtonse mechanica bruikbaar als een zeer goede benadering voor een groot gebied van fysische verschijnselen, in feite voor de meeste verschijnselen van mechanische aard die we om ons heen kunnen waarnemen. Pas bij situaties waarbij extreem hoge snelheden optreden, zoals bijvoorbeeld in de deeltjesversnellers, die men voor experimenten in de elementaire deeltjesfysica gebruikt, moet de Newtonse mechanica vervangen worden door de nieuwe Einsteinse mechanica. (Om begrijpelijke redenen spreekt men vaak van niet-relativistische en relativistische mechanica. Strikt genomen is de aanduiding Newtonse en Einsteinse mechanica beter. Beide zijn namelijk relativistisch in de zin dat ze aan een bepaalde versie van het relativiteitsprincipe voldoen.)

We zullen ons in onze discussie beperken tot het geval van puntdeeltjes. In het tweede deel bespreken we ook de invloed van een electromagnetisch veld op geladen deeltjes. (We hebben gezien dat gelijktijdigheid van twee gebeurtenissen op verschillende plaatsen geen Lorentz invariant begrip is. Het idee van twee deeltjes die elkaar op afstand beïnvloeden door een instantane krachtswerking, hoort daarom niet thuis in het kader van de relativiteitstheorie. Wisselwerking door middel van gravitatiekrachten kan pas volledig bevredigend worden beschreven als men gebruik maakt van de algemene relativiteitstheorie, die door Einstein in 1912 is geintroduceerd, en die kan worden opgevat als een uitbreiding van zijn speciale relativiteitstheorie.)

De beweging van een puntdeeltje wordt beschreven door 3 functies van t, $x_1(t)$, $x_2(t)$ en $x_3(t)$. Op ieder moment hoort daarbij een snelheids 3-vector $\vec{v}(t)$ met componenten $v_j(t) = dx_j(t)/dt$. De basisformule van de Newtonse mechanica,

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{8.1}$$

zegt dat de verandering van deze snelheid evenredig is aan de kracht die op het deeltje wordt uitgeoefend. Voor het vinden van relativistische modificaties van niet-relativistische formules gaan we over naar een 4-dimensionale beschrijving. We proberen in het bijzonder om 3-vectoren te vervangen door Lorentz 4-vectoren. Van formules die met behulp van 4-vectoren geschreven zijn kunnen we direct zien hoe ze transformeren onder Lorentz transformaties.

We kijken naar de snelheid: We hebben de drie componenten $v_j(t) = dx_j(t)/dt$. Het ligt voor de hand om te proberen hiervan een 4-vector te maken door deze drie componenten aan te vullen met een component $v_0(t) = dx_0(t)/dt$. Omdat $x_0(t) = ct$ betekent dat $v_0(t) = c$. Dus de vraag is of

$$\underline{v} = (c, v_1, v_2, v_3) \tag{8.2}$$

een Lorentz 4-vector vormt. Dat dit niet het geval is zien we door op te merken dat $\underline{v} \cdot \underline{v} = c^2 - v^2$. Zoals gewoonlijk schrijven we $v = |\vec{v}|$ voor de lengte van de 3-snelheidsvector. Gebruiken we dat $c^2 - v^2 = c^2/\gamma^2(v)$, dan zien we dat de 4-vector

$$\underline{w} \equiv \gamma(v)\underline{v} = \gamma(v)(c, v_1, v_2, v_3) \tag{8.3}$$

wel een invariante "lengte" heeft,

$$\underline{w} \cdot \underline{w} = \gamma^2(v)\underline{v} \cdot \underline{v} = \gamma^2(v)(c^2 - v^2) = c^2. \tag{8.4}$$

Bedenk ook dat $\underline{x}$ een Lorentz 4-vector is, maar dat t niet invariant is onder Lorentz transformaties, zodat $d\underline{x}/dt$ nooit als een Lorentz 4-vector kan transformeren. Als nu τ de een willekeurige andere parameter is, waarin we de bewegingen van het deeltje beschrijven, $\underline{x}(\tau) = (ct(\tau), x_1(\tau), x_2(\tau), x_3(\tau))$, dan geeft differentiatie naar τ wel een Lorentz 4-vector, immers men heeft voor een Lorentz transformatie L (gebruik dat ${L_\mu}^\alpha$ constant is)

$$\frac{dx'_\mu(\tau)}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\left(\sum_{\alpha=0}^{3} {L_\mu}^\alpha x_\alpha(\tau)\right) = \sum_{\alpha=0}^{3} {L_\mu}^\alpha \frac{dx_\alpha(\tau)}{d\tau}, \tag{8.5}$$

en dit komt overeen met formule (7.18), die het transformatiegedrag van Lorentz 4-vectoren beschrijft. We nemen nu als parameter de in hoofdstuk 6 ingevoerde eigentijd. Met behulp van formule (6.13) vinden we

$$\frac{dx_\mu}{d\tau} = \frac{dx_\mu}{dt}\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^{-1} = \gamma(v)v_\mu = w_\mu \tag{8.6}$$

Dit betekent dat we te maken hebben met grootheden, die voor snelheden v die klein zijn ten opzichte van de lichtsnelheid c niet merkbaar verschillen van de componenten van $\vec{v}$. De volgende definitie ligt daarom voor de hand:

De 4-snelheidsvector van een bewegend puntdeeltje is een 4-vector $\underline{w}$ met de componenten $w_\mu = dx_\mu/d\tau = \gamma(v)dx_\mu/dt$, met daarin τ de eigentijd langs de wereldlijn van het deeltje.

De 4-snelheid bevat natuurlijk maar 3 onafhankelijke componenten. Dat zien we bijvoorbeeld aan het feit dat de "lengte" van $\underline{w}$ gelijk aan c is.

De definitie van de snelheids 4-vector is nog een zuiver *kinematische* aangelegenheid, nl. de beschrijving van de beweging van een deeltje. We gaan nu een stapje nemen in de richting van een relativistische *dynamica*, door naast de 4-snelheid de impuls als 4-vector nader te bestuderen. Ook in de Newtonse mechanica speelt de *impuls* een belangrijke rol. De impulsvector $\vec{p}$ van een deeltje met snelheid $\vec{v}$ en massa m is gelijk aan $m\vec{v}$. We definiëren in analogie hiermee een 4-vector:

De relativistische 4-impulsvector van een deeltje met massa m is de 4-vector $\underline{p} = m\underline{w}$ met componenten

$$p_\mu = mw_\mu = m\gamma(v)\frac{dx_\mu}{dt}. \tag{8.7}$$

Als de snelheid v van het deeltje klein is ten opzichte van de lichtsnelheid c geldt natuurlijk dat de $\mu = 1, 2, 3$ componenten van deze relativistische 4-impuls $\underline{p}$ experimenteel niet te onderscheiden zijn van de componenten van de niet-relativistische impuls $\vec{p}$. We kunnen dit expliciet maken door de factor $\gamma(v)$ naar ordes v^2/c^2 te ontwikkelen volgens

$$\gamma(v) = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}v^2/c^2 + \tfrac{3}{8}(v^2/c^2)^2 + \cdots. \tag{8.8}$$

Voor de $\mu = i = 1, 2, 3$ componenten van $\underline{p}$ geeft dit

$$p_i = mv_i + \tfrac{1}{2}mv_i v^2/c^2 + \cdots. \tag{8.9}$$

De nulde orde term is de niet-relativistische impuls, de hogere orde termen zijn correcties daarop.

De impuls is een belangrijk begrip in de Newtonse mechanica. Dat komt vooral omdat het onder geschikte omstandigheden een behouden grootheid is. Van een veeldeeltjes-systeem, dat geen uitwendige krachten ondervindt, zijn de drie componenten van de totale impuls constant in de tijd. In botsingsprocessen is de totale impuls vóór de botsing gelijk aan de totale impuls ná de botsing: Als we de deeltjes nummeren met de index k, de massa's aangeven met $m(k)$, de grootheden vóór de botsing aangeven als $\vec{v}(k)$, $\vec{p}(k)$, en ná de botsing als $\vec{v}\,'(k)$, $\vec{p}\,'(k)$, betekent dit

$$\sum_k \vec{p}(k) = \sum_k \vec{p}\,'(k), \tag{8.10}$$

of uitgeschreven

$$\sum_k m(k)\vec{v}(k) = \sum_k m(k)\vec{v}\,'(k). \tag{8.11}$$

De wet van het behoud van impuls kan afgeleid worden uit de bewegingsvergelijkingen van Newton; het is een belangrijke *dynamische* eigenschap van niet-relativistische systemen.

We nemen aan dat er iets soortgelijks geldt voor het relativistische geval:

We veronderstellen dat in de relativistische mechanica de j = 1,2,3 componenten van de 4-impuls $\underline{p}$, zoals gedefiniëerd in (8.7), onder geschikte omstandigheden behouden grootheden zijn.

Voor een botsingsproces betekent dat

$$\sum_k p_j(k) = \sum_k p_j'(k), \tag{8.12}$$

of anders geschreven

$$\sum_k m(k)\gamma(v(k))\vec{v}(k) = \sum_k m(k)\gamma(v'(k))\vec{v}\,'(k). \tag{8.13}$$

Het is experimenteel gebleken, dat formule (8.11) niet meer geldig is bij botsingsprocessen waarbij de deelnemende deeltjes zeer hoge snelheden hebben. In plaats daarvan vindt men dat bij zulke processen voldaan wordt aan de zojuist geformuleerde relativistische behoudswet. Formule (8.13) beschrijft dus een belangrijke dynamische eigenschap van *relativistische systemen.*

De 4-impulsvector $\underline{p}$ heeft vier componenten. We hebben er tot dusver maar drie besproken. Wat is de fysische betekenis van de vierde component p_0? Daartoe ontwikkelen we cp_0 naar v^2/c^2 met behulp van (8.8). Dat geeft

$$cp_0 = mc\gamma(v)dx_0/dt = mc^2\gamma(v) = mc^2 + \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{3}{8}mv^4/c^2 + \cdots . \tag{8.14}$$

Afgezien van een constante term mc^2, die alleen afhangt van de massa, dus van het soort deeltje, vinden we de niet-relativistische (kinetische) energie van het deeltje $\frac{1}{2}mv^2$, en tenslotte termen van hogere orde in v^2/c^2, die we als relativistische correctietermen kunnen opvatten. Dit maakt aannemelijk dat we cp_0 de relativistische (kinetische) energie noemen:

De energie van een vrij bewegend puntdeeltje is volgens de relativiteitstheorie gelijk aan cp_0, met p_0 de vierde component van de relativistische 4-impulsvector $\underline{p}$.

Bij een botsingproces van deeltjes met hoge snelheden is het deze grootheid die behouden is, zoals uit vele experimenten is gebleken. De wet van energiebehoud luidt dus

$$\sum_k m(k)\gamma(v(k))c^2 = \sum_k m(k)\gamma(v'(k))c^2 \tag{8.15}$$

en *niet*

$$\sum_k \tfrac{1}{2}m(k)(v(k))^2 = \sum_k \tfrac{1}{2}m(k)(v'(k))^2. \tag{8.16}$$

Opmerking: In de relativiteitstheorie zijn impuls en energie nauw met elkaar verbonden: er is één 4-vectorgrootheid, de energie-impuls 4-vector. Deze is uit de vier afzonderlijke grootheden opgebouwd. Het onderscheid tussen wat energie is en wat impuls hangt van de bewegingstoestand van de waarnemer af, net als bij het onderscheid tussen tijd en ruimte in de Minkowski ruimte.

Aan het eind van het vorige hoofdstuk hebben we gezien dat voor een foton $E = h\nu$ en $p = |\vec{p}| = h/\lambda$. Hieruit leiden we eenvoudig af dat

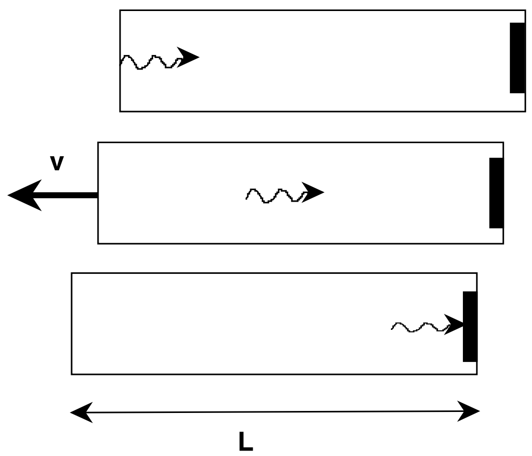
$$E = pc. \tag{8.17}$$

We kunnen dan verwachten dat begrippen als energie en impuls enige aanpassing behoeven, omdat volgens de Newtonse mechanica kinetische energie van een massief deeltje gegeven wordt door $E_{kin} = \frac{1}{2}pv$. De vraag is echter of we aan een foton wel een massa kunnen toekennen. De massa wordt voor een gewoon deeltje gedefinieerd door de wet van Newton, die uitspraken doet over de toename van de snelheid met de werking van een kracht. Bij een foton zal de snelheid altijd die van het licht zijn. Zonder toename van snelheid geen massa. Anderzijds kan massa ook bepaald worden door energieverlies in een gravitatieveld en als een foton een energie heeft zou er geen reden zijn om geen energieverlies te ondergaan. Een deel van de afbuiging van het licht van een ster aan de zon bij een zonsverduistering (een andere belangrijke test van de algemene relativiteitstheorie) kan aldus verklaard worden. Inderdaad hebben we bij het transversaal Doppler-effect gezien dat er ook een gravitationeel Doppler-effect is waarbij de frequentie van licht dat uit een gravitationele put moet klimmen afneemt, zodanig dat ook de energie afneemt, immers $E = h\nu$.

Als er één natuurkundige wet is die iedere leek kent, dan is het wel de beroemde wet van equivalentie tussen massa en energie

$$E = mc^2. \tag{8.18}$$

Er is een eenvoudig gedachtenexperiment waarmee Einstein deze equivalentie aantoonde, zoals in de figuur weergegeven. Er wordt een foton verzonden aan de linker kant van een doos, dat aan de rechter kant wordt geabsorbeerd. Door de terugstoot van het uitgezonden foton, dat een impuls $E/c = \hbar\omega/c$ heeft, krijgt de doos een kleine snelheid naar links, bepaald door de eis dat impuls behouden blijft, dus $v = -E/(cM)$. Hierin is M de massa van de doos en we mogen gevoeglijk aannemen dat v te verwaarlozen is t.o.v. de lichtsnelheid. Op het moment dat het foton wordt geabsorbeerd, wordt de terugstoot weer teniet gedaan en komt de doos tot stilstand. Intussen heeft de doos zich echter wel over een afstand $x = vt = vL/c$ verplaatst, waarbij L de lengte van de doos is. Dus de doos heeft zich over een afstand $x = -EL/(Mc^2)$ verplaatst, maar omdat op de doos geen uitwendige krachten werken moet het zwaartepunt van de doos op zijn plaats blijven. Het foton is van links naar rechts gegaan, en heeft in ieder geval energie getransporteerd. Voor een kogel zou er ook massa verplaatst zijn. Kennelijk moeten we aan een foton ook een trage massa toekennen, die er voor zorgt dat het zwaartepunt op zijn plaats blijft. Als we de massa van het foton m noemen dan is de verplaatsing van het zwaartepunt $mL + Mx$. Uit de eis dat het zwaartepunt op zijn plaats moet blijven volgt $mL + Mx = 0$, en we vinden $m = E/c^2$.

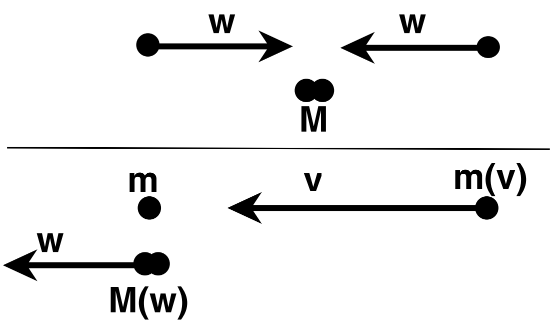


figuur 8.1

Omgekeerd correspondeert massa met energie, en is dus de conclusie dat zelfs een deeltje in rust een energie heeft. Omdat c zo groot is, is die energie gigantisch en ligt $E = mc^2$ aan de basis van het verkrijgen van energie uit kernreacties, zowel bij fusie als bij splijting. Anderzijds, als we een deeltje een snelheid v geven neemt zijn energie toe. Naast de rustenergie mc^2 komt er de kinetische energie bij, $E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$. Deze energie vertegenwoordigt op zijn beurt een massa $m(v) = (1 + \frac{1}{2}v^2/c^2)m$. We hebben al eerder gezien dat de Newtonse wetten alleen geldig zijn bij kleine snelheden, zodat we verwachten dat de formule voor $m(v)$ alleen geldig is voor snelheden klein t.o.v. de lichtsnelheid. Tot in laagste orde komt bovenstaande resultaat overeen met $m(v) = \gamma(v)m$. Deze formule is juist daarom acceptabel omdat het verklaart waarom een deeltje niet sneller dan de lichtsnelheid kan gaan. De trage massa $m(v)$

wordt steeds groter met toenemende snelheid en gaat bij nadering van de lichtsnelheid naar oneindig, zodanig dat een versnelling alleen nog maar ten goede komt aan de toenemende massa $m(v)$ maar niet meer aan een toenemende snelheid.

Een eenvoudig bewijs van deze formule voor $m(v)$ kan gegeven worden door gebruik te maken van het feit dat de impuls en de energie behouden moet blijven bij een botsing. Men heeft wel eens geprobeerd deze behoudswetten omver te werpen. Vooral bij het beta (of radioactieve) verval zat men lange tijd met het probleem dat impuls- en energiebehoud met elkaar in tegenspraak waren, tot dat Pauli op het idee kwam dat dit wel eens zou kunnen komen doordat men blind was voor een extra deeltje dat bij het vervalsproces betrokken was, namelijk het neutrino. Dit heeft zulke zwakke interacties met andere materie (het heeft geen electrische lading en mogelijk geen rustmassa, in welk geval het zich altijd met de lichtsnelheid voortbeweegt), dat we het niet zien. Er is een belangrijke reden om behoud van energie en impuls als onschendbare wetten te beschouwen. Ze zijn een consequentie van het feit dat ruimte en tijd homogeen zijn. We nemen aan dat de natuurwetten invariant zijn onder translatie in ruimte en tijd. (Evenzo volgt uit de isotropie van de ruimte, oftewel de invariantie onder een draaiing, dat het impulsmoment behouden moet zijn.) We bekijken nu de botsing van twee identieke deeltjes met massa m en exact tegengestelde snelheden w. De deeltjes zijn voorzien van zeer sterke kleefpasta, zodanig dat ze niet meer los van elkaar kunnen komen en dus na de botsing als één deeltje stil blijven liggen. Immers de totale impuls voor de botsing was nul. We nemen aan dat er geen wrijving is opgetreden en dat bij het aan elkaar kleven geen warmte wordt geproduceerd. We gaan nu over van het zwaartepuntstelsel naar het ruststelsel van één van de twee deeltjes (zie de figuur). Klassiek



figuur 8.2

zou het andere deeltje nu een snelheid $2w$ hebben, maar uit het relativistisch optellen van de snelheden volgt dat in dit nieuwe stelsel het andere deeltje beweegt met een snelheid

$$v = 2w/(1 + w^2/c^2). \tag{8.19}$$

We noemen de nader te bepalen massa $m(v)$. Na de botsing hebben de twee samenklittende deeltjes een snelheid w en een massa $M(w)$ (immers het zwaartepuntstelsel heeft een snelheid w t.o.v. het nieuwe stelsel). Uit behoud van energie en impuls volgt

$$m(v)c^2 + mc^2 = M(w)c^2, \quad m(v)v = M(w)w. \tag{8.20}$$

Uit deze twee vergelijkingen kunnen we $M(w)$ elimineren, waartoe we de vergelijking voor energiebehoud met w/c^2 vermenigvuldigen, $(m + m(v))w = M(w)w$. Dit substituren in de vergelijking voor impulsbehoud geeft dus $(m(v) + m)w = m(v)v$.

Samen met $v = 2w/(1 + w^2/c^2)$ volgt dus (ga na!)

$$m(v) = m\frac{(1 + w^2/c^2)}{(1 - w^2/c^2)} = \gamma(v)m. \tag{8.21}$$

Hoewel we dit resultaat hebben verkregen zonder te bepalen wat $M(w)$ in werkelijkheid is, is het toch interessant deze te berekenen.

Opgave 21:

Laat zien dat $M(w) = m(v)v/w = 2m/(1-w^2/c^2)$ en dat $M = 2\gamma(w)m$ in het zwaartepuntstelsel. Verklaar kwalitatief en kwantitatief de reden voor het verschil tussen M en $2m$.

We hebben nu gezien dat $E = m(v)c^2$ en $\vec{p} = m(v)\vec{v}$ en dat we deze grootheden kunnen combineren in een 4-vector, genoemd de 4-impuls $\underline{p} = (E/c, p_1, p_2, p_3)$, die zich onder Lorentz transformaties op de juiste manier gedraagt. Dit in analogie met de situatie voor het foton. De "lengte" van deze *tijdachtige* 4-vector is precies de rustmassa maal de lichtsnelheid, een resultaat dat onafhankelijk is van het stelsel (dus van de snelheid v). Het stelsel waarin de ruimtelijke componenten verdwijnen is precies het lokale inertiaalstelsel, dat ook gedefinieerd is in aanwezigheid van gravitatiekrachten.

Opgave 22:

Laat zien dat $\underline{p} \cdot \underline{p} = p_\mu p^\mu = m^2c^2$ en dat voor een foton ($\underline{p} = \hbar\underline{k}$) dit leidt tot de uitspraak dat het geen rustmassa bezit.

Opmerking: We kunnen de relativistische energie E uitdrukken in de $j = 1, 2, 3$ componenten van de 4-impuls. We gebruiken hiervoor het resultaat uit opgave 22. Met $p \equiv |\vec{p}|$ lossen we E op uit $m^2c^2 = \underline{p} \cdot \underline{p} = E^2/c^2 - p^2$. Dit geeft de *relativistische energie-impuls relatie*

$$E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}. \tag{8.22}$$

Een belangrijke eigenschap van het boven ingevoerde energiebegrip is de aanwezigheid van de constante term mc^2 in de uitdrukking van de energie van een vrij deeltje: zoals we eerder zagen betekent het dat er ook een energie wordt toegekend aan een deeltje dat in rust is. Omdat het hier om een constante gaat die alleen van het soort deeltje afhangt, zou men kunnen denken dat men deze rustenergie ook wel weg zou kunnen laten. Dit is niet het geval. Integendeel, de extra term heeft te maken met een zeer belangrijk fysische aspect van de relativiteitstheorie dat nog niet ter sprake gekomen is.

Bij het spreken over botsingsprocessen onderscheiden we enerzijds *elastische* processen waarbij men voor en na de botsing dezelfde deeltjes heeft, alleen met andere snelheden en zich in andere richtingen bewegend. In die situatie kan men in formule (8.15), zijnde de behoudswet voor de relativistische energie in een botsingsproces, de rustenergietermen van de linkerkant en van de rechterkant aftrekken, zonder dat de geldigheid van de formule wordt aangetast. Dit geeft dan behoud van bewegingsenergie.

Anderzijds (zie bijv. figuur 8.2) kent men ook *niet-elastische* processen waarbij ingaande en uitkomende deeltjes verschillend zijn. Zo kan in de kernfysica en elementaire deeltjesfysica er *creatie en annihilatie* van deeltjes plaatvinden. Denk bijvoorbeeld aan een geval waarbij er twee deeltjes a en b ingaan, en er tengevolge van wisselweking tijdens de botsing drie andere deeltjes A, B en C uitkomen. Dit is typisch een situatie waarbij de relativiteitstheorie gebruikt moet worden. Er is behoud van energie in de relativistische zin, d.w.z. er geldt

$$m(a)\gamma(v(a))c^2+m(b)\gamma(v(b))c^2 = m(A)\gamma(v(A))c^2+m(B)\gamma(v(B))c^2+m(C)\gamma(v(C))c^2. \quad (8.23)$$

Als we in deze formule de termen voor de rustenergie van linker en rechterlid aftrekken, geldt het gelijkteken in het algemeen niet meer. Dat betekent dat in dit geval de rustenergie essentiëel is voor de geldigheid van het principe van energiebehoud.

We kunnen dit ook nog een beetje anders zien: In een proces zoals beschreven in (8.23) is het mogelijk dat de totale massa verandert; $m(a) + m(b)$ hoeft niet gelijk te zijn aan $m(A) + m(B) + m(C)$. Wat het zelfde blijft is de totale energie; de massa maakt daar deel van uit. Dat er inderdaad fysische processen mogelijk zijn, waarbij daadwerkelijk massa in energie en energie in massa kan worden omgezet, is pas vele jaren na het formuleren van de speciale relativiteitstheorie, bij het tot ontwikkeling komen van de kernfysica en later de elementaire deeltjesfysica, duidelijk geworden.

We vatten dit belangrijke aspect van de relativiteitstheorie kort samen:

Volgens de speciale relativiteitstheorie is massa een vorm van energie. Massa en energie kunnen in principe in elkaar overgevoerd worden volgens de relatie $E = mc^2$. De kernfysica en de elementaire deeltjesfysica hebben dat ook daadwerkelijk mogelijk gemaakt.

Opmerking: Men gebruikt soms twee massabegrippen naast elkaar, nl. een rustmassa die men aangeeft als m_0, en die overeenkomt met wat wij de massa m hebben genoemd, en een massa m gedefiniëerd als $m = \gamma(v)m_0$ die wij $m(v)$ hebben genoemd. In dat geval kan men zeggen dat de massa van een deeltje afhangt van zijn snelheid.

We hebben in dit hoofdstuk enkele grondbegrippen van de relativistische mechanica ingevoerd aan de hand van behoudswetten voor energie en impuls. Voor een deeltje, dat zich in een electromagnetisch veld beweegt, is het mogelijk om verder te gaan. Men kan in dat geval een 4-dimensionale generalisatie geven van de formule $\vec{F} = m(d\vec{v}/dt)$, de basisformule van de Newtonse mechanica. Hierbij voert men een 4-dimensionale versie van het begrip kracht in. We zullen er in het volgende hoofdstuk enkele opmerkingen over maken.

We geven een overzicht van de belangrijkste resultaten:

De relativistische energie en impuls van een deeltje met massa m worden beschreven door één Lorentz 4-vector $\underline{p}$. Er geldt: $\underline{p} \cdot \underline{p} = m^2c^2$.

De componenten van $\underline{p}$ zijn: $p_\mu = mw_\mu = mdx_\mu/d\tau = m\gamma(v)dx_\mu/dt$.

Voor snelheden v die veel kleiner zijn dan de lichtsnelheid c kunnen we naar v^2/c^2 ontwikkelen: $p_0 = m\gamma(v)c = c^{-1}(mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \cdots)$, $\quad p_i = m\gamma(v)v_i = mv_i + \cdots$.

De energie van het deeltje kan worden uitgedrukt in $\vec{p}$ volgens: $E = p_0c = c\sqrt{m^2c^2 + \vec{p}\cdot\vec{p}}$.

8.1 Relativistische kracht

Eén van de grondgedachten van de relativiteitstheorie is dat ruimte en tijd nauw met elkaar verbonden begrippen zijn. Ze vormen samen één 4-dimensionale ruimte, waarvan de punten bestaan uit gebeurtenissen. Deze zijn in verschillende inertiaalsystemen voorzien van verschillende ruimte-tijd coördinaten, die door Lorentz transformaties zijn verbonden. In overeenstemming hiermee kan men in de relativiteitstheorie voor allerlei begrippen en grootheden een 4-dimensionale vorm kiezen. Dit heeft grote voordelen. We krijgen compacte en transparante formuleringen en de relativistische eigenschappen worden duidelijk zichtbaar. We hebben dat bijvoorbeeld gezien bij de begrippen energie en impuls die we in één Lorentz 4-vector konden samenvatten.

We gaan uit van de bewegingsvergelijking (8.1), die we schrijven als

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \tag{8.24}$$

met de $\vec{p} = m\vec{v}$ de impuls. Newton heeft zelf al zijn wet geformuleerde als *kracht is de verandering van impuls*. Duidelijk is dat deze wet geldig is bij lage snelheden. We weten dat $\vec{p}$ deel is van een 4-vector $\underline{p}$, en evenals bij de bepaling van de snelheids 4-vector is duidelijk dat $d\underline{p}/d\tau$ weer een Lorentz 4-vector is. We kunnen aldus een Lorentz 4-vector $\underline{K}$ invoeren, die de rol van relativistische kracht moet spelen

$$\frac{d\underline{p}}{d\tau} = \underline{K}\ . \tag{8.25}$$

Aangezien

$$\frac{d\underline{p}}{d\tau} = \gamma(v)\frac{d\underline{p}}{dt} = \underline{K}\ , \tag{8.26}$$

zodat kennelijk

$$\vec{K} = \gamma(v)\vec{F}. \tag{8.27}$$

Net als de impuls 4-vector $\underline{p}$, heeft de relativistische kracht slechts drie *onafhankelijke* componenten. Immers, $dp_0/dt = c^{-1}dE/dt$ en dE/dt is de verrichtte arbeid per tijdseenheid. Arbeid is kracht maal afgelegde afstand, zodat arbeid per tijdseenheid gegeven wordt door kracht maal snelheid

$$\frac{dE}{dt} = c\frac{dp_0}{dt} = \vec{v}\cdot\vec{F}. \tag{8.28}$$

Inderdaad kunnen we dit afleiden uit verg. (8.24):

$$\vec{v}\cdot\frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma^{-1}(v)\vec{w}\cdot\frac{d(m\vec{w})}{dt} = \tfrac{1}{2}m\gamma^{-1}(v)\frac{d(\vec{w}\cdot\vec{w})}{dt} = \tfrac{1}{2}m\gamma^{-1}(v)\frac{d(\gamma^2(v)c^2)}{dt} = \frac{dE}{dt}. \tag{8.29}$$

Hierbij gebruikten we dat $\vec{p} = m\vec{w}$, $\vec{v} = \gamma^{-1}(v)\vec{w}$, $2\vec{w}\cdot d\vec{w}/dt = d(\vec{w}\cdot\vec{w})/dt$ (dit bewijst men eenvoudig door het inwendig product in componenten uit te schrijven) en $\underline{w}\cdot\underline{w} = \gamma^2(v)c^2 - \vec{w}\cdot\vec{w} = c^2$, zodat $\vec{w}\cdot\vec{w} = \gamma^2(v)c^2 - c^2$. Aangezien $d\vec{p}/dt = \vec{F}$, is nu het bewijs van verg. (8.28) rond. In termen van $\underline{K}$ hebben we dus

$$K_0 = \frac{dp_0}{d\tau} = c^{-1}\gamma(v)\frac{dE}{dt} = c^{-1}\gamma(v)\vec{v}\cdot\vec{F} = \vec{K}\cdot\vec{v}/c. \tag{8.30}$$

Een *willekeurige relativisitische* kracht wordt kennelijk verkregen door, uitgaande van het (lokale) ruststelsel, te transformeren met de Lorentz transformatie van verg. (4.41), gebruikmakende van een snelheid $\vec{u} = -\vec{v}$ (*in de richting van de kracht*). In het ruststelsel wordt de (gewone) Newtonse kracht, $\vec{F} \equiv \vec{F}^o$, gebruikt (de index o is om te benadrukken dat $\vec{F}^o$ de kracht in het ruststelsel is gedefinieerd). De 4-vector $\underline{K}$ wordt dan gegeven door $(0, F_1^o, F_2^o, F_3^o)$. Dus verg. (8.25) kan als een relativistische bewegingsvergelijking gezien worden. In deze formulering is het duidelijk dat de wet van Newton niet fout is; het is alleen van belang duidelijk te maken in welk stelsel deze kan worden toegepast - in het lokale Lorentz stelsel (ruststelsel) dus, dat uiteraard tijdens de beweging verandert.

Een van de postulaten van de relativiteitstheorie, bevat in de definitie van een intertiaalstelsel is, dat een deeltje waar geen krachten op werken, zich eenparig rechtlijnig voortbeweegt, dus met constante snelheid. Is nu $\vec{F}$ een willekeurige andere kracht, zodanig dat in het ruststelsel de krachten precies in balans zijn, dan is er ook een balans in alle andere stelsels.

Beschouw als voorbeeld een ruimteschip, dat een constante versnelling ondergaat, d.w.z. de raketmotor geeft in het ruststelsel van het ruimteschip een constant stuwkracht. We kunnen constante versnelling ($d\vec{p}/dt = \vec{F}$, $d\vec{F}/dt = 0$) ook bekijken vanuit een intertiaalstelsel (zoals voor de hand ligt bij een geladen deeltje met een electrische lading q in een constant electrisch veld $\vec{E}$, waarvoor de kracht gegeven wordt door $\vec{F} = q\vec{E}$, zie verg. (8.36) in de volgende paragraaf). We kiezen de kracht in de x-richting en definiëren $a = F/m$. Gebruikmakende van $w_1 = p_1/m$ volgt dus dat

$$dw_1(t)/dt = a, \tag{8.31}$$

zodat $w_1(t) = at + w_1(t = 0)$. Met $\vec{v}(t) = (v(t), 0, 0)$ vinden we $w_1(t) = v(t)\gamma(v(t))$, en als we de beginvoorwaarden $x(t = 0) = v(t = 0) = 0$ opleggen dan volgt dus dat

$$v(t)\gamma(v(t)) = at. \tag{8.32}$$

We kunnen hieruit de snelheid $v(t) = dx(t)/dt$ oplossen,

$$\frac{dx(t)}{dt} = at/\sqrt{1 + a^2t^2/c^2}. \tag{8.33}$$

Dit geeft een differentiaalvergelijking voor $x(t)$ en deze heeft als oplossing (ga dit na):

$$x(t) = \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1 + a^2t^2/c^2} - 1\right). \tag{8.34}$$

Voor t klein, geeft dit het niet-relativistische resultaat, $x(t) = \frac{1}{2}at^2$. Uit verg. (8.33) zien we eenvoudig dat de snelheid, $v(t) = dx(t)/dt$, begrensd is door de lichtsnelheid, die voor $x \to \infty$ van onderen wordt benaderd. De oplossing in verg. (8.34) kan ook geschreven worden in de vorm

$$[1 + ax(t)/c^2]^2 - [at/c]^2 = 1. \tag{8.35}$$

Dit is de baan van een hyperbool in het (x, t) vlak, met als asymptoot $x(t) = c(t - c/a)$, hetgeen inderdaad weergeeft dat de snelheid nooit groter wordt dan c.

8.2 Electromagnetische velden

Het formuleren van een geunificeerde beschrijving van electrische en magnetische verschijnselen is één van de grote prestaties van de negentiende eeuwse natuurkunde geweest. Deze beschrijving heeft zijn uiteindelijke vorm gekregen in de theorie van Maxwell, waarin als basisgrootheden de van ruimte en tijd afhankelijke 3-dimensionale vectorgrootheden voor electrische ($\vec{E}(\vec{x},t)$) en magnetische velden ($\vec{B}(\vec{x},t)$) optreden, die door middel van een stelsel differentiaal vergelijkingen met elkaar zijn verbonden Hiermee kan een breed scala van fysische effecten worden begrepen. In het bijzonder is gebleken dat licht een electromagnetisch golfverschijnsel is.

Eén van de consequenties van de theorie van Maxwell is dat de voortplantingssnelheid van lichtgolven in vacuum in ieder inertiaalsysteem dezelfde waarde heeft. Zoals we gezien hebben, heeft dit feit in het begin van de 20e eeuw geleid tot de speciale relativiteitstheorie van Einstein. De Maxwell vergelijkingen die het gedrag van het electromagnetische veld beschrijven zijn al relativistisch invariant. Dit is echter niet direct duidelijk in de formulering van de theorie zoals we haar meestal leren, en zoals ze in feite oorspronkelijk door Maxwell werd opgesteld.

Aanpassing van de Maxwell theorie aan de speciale relativiteitstheorie betekent *niet* dat ze veranderd moet worden, maar dat ze in een 4-dimensionale vorm wordt gebracht, die de Lorentz invariantie onmiddelijk zichtbaar maakt. We hebben in hoofdstuk 7 opgemerkt dat er naast vectoren ook tensoren zijn. In de 4-dimensionale Minkowski ruimte is een Lorentz 4-tensor een grootheid die bestaat uit 16 getallen. Deze getallen, de componenten van de 4-tensor, moeten bij overgang naar een ander inertiaal systeem getransformeerd worden op een manier die wat ingewikkelder is dan wat we kennen van 4-vectoren, maar die toch ook weer bepaald wordt door de bij de overgang behorende Lorentz transformatie.

De kracht die een geladen deeltje met electrische lading q ondervindt in een electrisch en magnetisch veld wordt beschreven door de *Lorentz kracht.* In zg. Gaussische (cgs) eenheden,

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}/c). \tag{8.36}$$

(Voor SI (mks) eenheden, vervang overal in deze paragraaf $\vec{B}$ door $c\vec{B}$.) Het *uitwendig product*, $\vec{a} \times \vec{b}$, van twee 3-dimensionale vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is een 3-dimensionale vector met componenten gegeven door

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b})_1 &= a_2 b_3 - a_3 b_2, \\ (\vec{a} \times \vec{b})_2 &= a_3 b_1 - a_1 b_3, \\ (\vec{a} \times \vec{b})_3 &= a_1 b_2 - a_2 b_1. \end{aligned} \tag{8.37}$$

Het is opmerkelijk dat in ieder stelsel $\vec{F}$ gegeven wordt door verg. (8.36). Dit betekent dat het electromagnetische veld zich op een héél speciale manier onder Lorentz transformaties gedraagt. In principe kunnen we dat afleiden uit de transfromatie van de kracht. Pas later in de studie kan volledig recht gedaan worden aan de formulering van het electromagnetische veld, we zullen hier volstaan met een korte bespreking.

De centrale grootheid in de Minkowski formulering van de Maxwell theorie is de z.g. electromagnetische veldtensor. Deze wordt gewoonlijk aangeduid als $F_{\mu\nu}$. De indices μ en

ν doorlopen ieder apart de gebruikelijke waarden 0, 1, 2 en 3. Deze veldtensor is antisymmetrisch in μ en ν, en heeft daarom maar zes onafhankelijke componenten. Dit zijn precies de drie componenten van $\vec{E}(\vec{x},t)$ plus de drie componenten van $\vec{B}(\vec{x},t)$.

$$\begin{array}{ll} F_{01} = -F_{10} = E_1, & F_{12} = -F_{21} = B_3, \\ F_{02} = -F_{20} = E_2, & F_{23} = -F_{32} = B_1, \\ F_{03} = -F_{30} = E_3, & F_{31} = -F_{13} = B_2. \end{array} \tag{8.38}$$

Op deze manier vormen twee 3-dimensionale grootheden één 4-dimensionale grootheid. Het transformatiegedrag van deze ene grootheid onder Lorentz transformaties is aanzienlijk eenvoudiger dan dat van de twee afzonderlijke 3-dimensionale grootheden.

$$F'_{\mu\nu} = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} L_\mu{}^\alpha L_\nu{}^\beta F_{\alpha\beta}. \tag{8.39}$$

Bovendien zien de Maxwell vergelijkingen er in termen van deze tensor veel eenvoudiger uit ($\sum_{\mu=0}^{3} \partial F_{\mu\nu}/\partial x_\mu = 0$). We besluiten door op te merken dat de bewegingsvergelijking t.g.v. de Lorentz kracht eenvoudig geschreven kan worden als

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = -\frac{q}{c}\sum_{\nu=0}^{3} F_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}. \tag{8.40}$$

(Probeer zelf na te gaan dat dit inderdaad het juiste resultaat geeft.)

Tenslotte bespreken we nog kort het geval van de beweging van een geladen deeltje in een constant magnetisch veld. Wellicht weet U nog van de middelbare school dat volgens de Newtonse mechanica het geladen deeltje een cirkel- of spiraalbeweging uitvoert met een hoekfrequentie gegeven door $\omega = qB/(mc)$, de zg. Larmor frequentie. We laten eerst zien dat de *grootte* van de snelheid constant is. Daartoe is het voldoende aan te tonen dat E constant is (immers $\vec{v}\cdot\vec{v} = c^2(1-(mc^2/E)^2)$). Met verg. (8.28) volgt

$$dE/dt = \vec{v}\cdot\vec{F} = \vec{v}\cdot q(\vec{v}\times\vec{B})/c = 0. \tag{8.41}$$

Immers de Lorentz kracht in een magnetisch veld staat loodrecht op de snelheid (denk aan de kurketrekkerregel), zoals ook eenvoudig uit een expliciete berekening volgt. (Ga na!) Dit betekent dat we de bewegingsvergelijking kunnen schrijven als

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m(v)\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v}\times\vec{B}/c, \tag{8.42}$$

hetgeen precies de *niet-relativistische* bewegingsvergelijking is, met de massa m vervangen door $m(v)$, hier te beschouwen als een constante. Voor de cirkelfrequentie vinden we daarom

$$\omega = qB/(m(v)c) = qB/(m\gamma(v)c), \tag{8.43}$$

hetgeen de relativistische Larmor frequentie is.

Opgave 23:

Kies het magneet veld langs de z-as en laat zien dat $v_z(t) = 0$, als $v_z(0) = 0$ (m.a.w. dat het deeltje in één vlak loodrecht op het magnetisch veld beweegt). Laat ook zien dat de baan van het deeltje een cirkel volgt. Bewijs de formule voor de cirkelfrequentie, verg. (8.43), en bepaal de straal van deze cirkel. Wat is de baan van het deeltje als $v_z(0) \neq 0$?

We vatten nog even de resultaten aangaande de relativistische kracht samen:

Uit de eis dat de wet van Newton in het ruststelsel geldig is volgt $d\underline{p}/d\tau = \underline{K}$, *waarbij* $K_0 = \vec{v} \cdot \vec{K}/c$ *en* $\vec{K} = \gamma(v)\vec{F}$, *zodat* $d\vec{p}/dt = \vec{F}$.
Voor een geladen deeltje met een electrische lading q *in een electromagnetisch veld wordt de Lorentz kracht in* **ieder** *stelsel gegeven door* $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}/c)$.

EINDE

Extra opgaven ter oefening van de stof.

1. Gegeven twee inertiaalsystemen S en S', met ruimte-tijd coordinaten (x, y, z, t) en (x', y', z', t'). Het stelsel S' beweegt t.o.v. het stelsel S met een constante snelheid u in de positieve y richting. We veronderstellen daarbij *niet* dat de oorsprong van S' samenvalt met de oorsprong van S; de oorsprong van S' heeft t.o.v. S de coordinaten $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ en $t = t_0$.

   a. Geef de transformatie formules van S naar S' en van S' naar S.

   b. Beschouw vervolgens een puntdeeltje dat zich t.o.v. van S beweegt volgens de formules
   $x(t) = v_x t + b_x$,
   $y(t) = v_y t + b_y$,
   $z(t) = v_z t + b_z$,

      i. Wat zijn de formules van deze beweging t.o.v. S'?

      ii. Druk de nieuwe snelheidscomponenten v'_x, v'_y en v'_z uit in v_x, v_y, v_z en c.

      iii. Neem nu $v_x = v_z = 0$, en ga na dat het resultaat voor v'_y in overeenstemming is met de transformatieformule (4.23) voor de snelheid in de syllabus.

2. We bevinden ons in een inertiaalstelsel S, met ruimte-tijd coordinaten (x, y, z, t). Een staaf beweegt zich in zijn lengte richting langs de x-as, met constante positieve snelheid v. De in S gemeten lengte noemen we ℓ. Er is een tweede inertiaalstelsel S', met coördinaten (x', y', z', t'), dat zich met een snelheid u in de x-richting beweegt.

   a. Wat is de snelheid v' van de staaf, zoals gemeten in S'?

   b. Wat is de lengte ℓ' van de staaf, zoals gemeten in S'?

   c. Voor welke waarden van u is ℓ' kleiner dan ℓ, groter dan ℓ, gelijk aan ℓ? Voor welke waarden van u heeft ℓ' een minimum of een maximum? Teken de grafiek van ℓ'/ℓ als functie van u, voor vaste v. Wat zou men de "eigen lengte" van de staaf kunnen noemen?

3. We bevinden ons in een inertiaalstelsel S, met ruimte-tijd coördinaten (x, y, z, t) en gaan van daaruit over op een inertiaalstelsel S', met coördinaten (x', y', z', t'), dat zich t.o.v. S in de x-richting beweegt met een snelheid u_x. Vervolgens gaan we vanuit S' over naar een derde inertiaalstelsel $S"$, met $(x", y", z", t")$, dat zich t.o.v. S' in de y'-richting beweegt met een snelheid u'_y.

   a. Bereken de transformatie van S naar $S"$.

   b. Bereken de snelheid $(\tilde{u}_x, \tilde{u}_y, \tilde{u}_z)$ van een vast punt van S", met coördinaten $x" = a$, $y" = b$, $z" = c$, t.o.v. S.

   c. De transformatie $S \to S'$ noemen we een standaard Lorentz transformatie in de x-richting, die van S' naar $S"$ een standaard Lorentz transformatie in de y'-richting. Is de samengestelde transformatie $S \to S"$ weer een standaard Lorentz transformatie in één of andere richting, bijvoorbeeld in de richting van de onder

(b) gevonden snelheid $(\tilde{u}_x, \tilde{u}_y, \tilde{u}_z)$? Vergelijk voor de beantwoording van deze vraag de onder (a) gevonden formules met de algemene formules (4.41) in de syllabus. Zie ook opgave 14 van de syllabus.

4. Een Lorentz 4-vector heeft in het inertiaalstelsel S de componenten $a_0 = a_1 = 2$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$ (in $kg.m/s$).

   a. Is dit een tijdachtige, lichtachtige of ruimteachtige 4-vector? Geef de zeer eenvoudige korte berekening die tot het antwoord op deze vraag leidt. Kan deze 4-vector de energie-impuls vector van een bewegend deeltje met massa $m > 0$ zijn? Zo ja, bereken deze massa.

   b. We gaan over naar een nieuw inertiaalstelsel S' dat zich t.o.v. van S beweegt met een snelheid u in de positieve x-richting. Bereken (a_0', a_1', a_2', a_3') in dit nieuwe stelsel. Is de 4-vector nu tijdachtig, lichtachtig of ruimteachtig? Geef het antwoord door een directe berekening als bij (a) én door gebruik te maken van algemene argumenten.

5. Een ruimteschip, met aan boord Kirk en Spock, beweegt zich rechtlijnig met een constante snelheid $v > 0$ in de x-richting van ons intertiaalstelsel S. Op het tijdstip $t = t_0$, als het ruimteschip zich op de plaats $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ bevindt, stapt Spock in een ruimtependel en vertrekt met een constante snelheid v_P, veel groter dan v, in de x-richting naar een verafgelegen ster, welke we in ons inertiaalstelsel als vast zullen beschouwen. Op $t = t_0$ is de door ons gemeten afstand tussen ruimteschip en ster d. Spock komt op $t = t_1$ bij deze ster aan, doet snel (neem aan instantaan) enkele waarnemingen (helaas geen planeet van M-class) en gaat met de zelfde snelheid terug. Hij bereikt het moederschip op het tijdstip $t = t_2$, om verslag te doen aan Kirk die achter was gebleven, en rustig met constante snelheid v zijn schip op koers heeft gehouden.

   a. Druk t_2 en de plaats van ontmoeting, $x = x_2$, uit in de gegeven grootheden x_0, t_0, v, v_P en d. Bij dit alles spelen de ruimtelijke coördinaten y en z geen rol. We kunnen daarom de beschrijving van de gebeurtenissen verhelderen door gebruik te maken van een twee dimensionaal ruimte-tijd plaatje in het (x, t) vlak. Teken zo'n plaatje.

   b. Kirk en Spock hebben allebei een atoomklok bij zich die voor ieder de eigentijd aangeeft en die bij het vertrek van Spock met elkaar gesynchroniseerd worden. Wat zijn de eigentijden die Kirk en Spock bij terugkomst van Spock aflezen? Wat is de verhouding $\Delta\tau(Spock)/\Delta\tau(Kirk)$ van de gedurende de reis verlopen tijdsintervallen (t_0, t_1 en t_2, zijnde de specifieke gebeurtenissen van vertrek, keren bij de ster en terugkomst). Wie van Kirk of Spock is bij de terugkomst ouder?

6. Een deeltje met een massa m_1 bevindt zich in rust; een tweede deeltje met massa m_2 beweegt zich met een snelheid $\vec{v} = (v, 0, 0)$, en botst op het eerste deeltje. We veronderstellen v en uiteraard m_1 en m_2 positief. Tengevolge van deze botsing worden de twee deeltjes geannihileerd en wordt er één nieuw deeltje gecreëerd, met massa m' en met snelheid $\vec{v}\,'$.

a. Stel de balans op voor de componenten van de totale relativistische impuls en energie, vóór en na de botsing.

b. Laat hiermee zien dat $v'_2 = v'_3 = 0$.

c. Druk $v' = v'_1$ uit in v, m_1 en m_2.

d. Wanneer hangt v' niet af van de massa's m_1 en m_2?

7. Doppler-effect voor radar.

   a. Langs een snelweg staat radar-apparatuur voor snelheidscontrole. Een uitgezonden signaal heeft een frequentie van 2400 MHz, de echo van een naderende auto blijkt 600 Hz *verschoven* te zijn. Hoe groot was de snelheid van de auto in km/uur? Had de echo een hogere of lagere frequentie dan het uitgezonden signaal?

   b. Een ruimteschip nadert een planeet met een constante snelheid ter grootte van $c/11$ en stuurt een radarsignaal van 2500 MHZ uit. Welke frequentie heeft de echo voor de planeet-bewoner en welke voor het ruimteschip?

8. Uit een hoge-energie versneller komt een bundel π-mesonen, waarvan de intensiteit tot de helft gedaald is op $37m$ vanaf het trefplaatje waar zij gevormd zijn. Neem aan dat alle mesonen een snelheid van $0,99c$ hadden. De halveringstijd van een stilstaand π-meson is $1,78 \times 10^{-8}s$.

   a. Kontroleer de afstand van $37m$ door deze met de tijdsdilatatie te berekenen.

   b. Doe hetzelfde uitgaande van de Lorentz contractie.

9. We beschouwen inertiaalstelsels S en S' die t.o.v. elkaar in de x-richting bewegen met een snelheid v.

   a. Een waarnemer in het stelsel S' passeert een klok in S op $x = 1m$ van de oorsprong. Synchronisatie van de klokken heeft als gewoonlijk plaats als de oorsprong van de twee stelsels met elkaar samenvallen. Wat wijzen de klok in S (op $x = 1m$) en de eigen klok van S' (op $x' = 0$) dan aan als $\gamma(v) = 5/4$?

   b. Gegeven is dat $\gamma(v) = 2$. Als de eigen klok van S (in $x = 0$) op 10 minuten staat kijkt een waarnemer in S op dezelfde plaats ($x = 0$) door een telescoop naar de klok van S' (in $x' = 0$). Welke tijd leest de waarnemer af op deze klok?

10. Een deeltje met snelheid $0,6c$ in het laboratorium emitteert een electron, dat in het ruststelsel van het oorspronkelijke deeltje een snelheid $0,75c$ heeft. Bereken de snelheid van het electron in het laboratorium

    a. als het in voorwaartse richting wordt waargenomen.

    b. als het loodrecht in het ruststelsel van het oorspronkelijke deeltje wordt uitgezonden.

    c. als het loodrecht op de bewegingsrichting van het oorspronkelijke deeltje in het laboratorium wordt waargenomen.

11. We beschouwen twee ruimte-tijd voorvallen met coördinaten
$\mathrm{I} : (x; y; z; t) = (0,3m; 0,5m; 0m; 2 \times 10^{-9}s)$,
$\mathrm{II} : (x; y; z; t) = (0,4m; 0,7m; 0m; 3 \times 10^{-9}s)$.

    a. Kan II veroorzaakt zijn door I (of omgekeerd)?

    b. Is er een stelsel S' waarin I en II gelijktijdig zijn? Zo ja, specificeer dat stelsel en vindt de afstand tussen I en II in dat stelsel.

    c. Is er een stelsel S" waarin I en II gelijke ruimtelijke posities hebben? Zo ja, specificeer dat stelsel en vindt de tijd die verstreken is tussen I en II in dat stelsel.

    d. Beantwoord dezelfde vragen voor twee gebeurtenissen
    $\mathrm{I} : (x; y; z; t) = (0,7m; 0,5m; 0m; 5 \times 10^{-9}s)$,
    $\mathrm{II} : (x; y; z; t) = (0,4m; 0,6m; 0m; 4 \times 10^{-9}s)$.

12. Vaak is niet de snelheid maar wel de kinetische energie (T) van een deeltje bekend, bijv. bij een versneller waar we weten hoeveel energie we aan het deeltje hebben meegegeven tijdens het proces van versnelling. Als mogelijk criterium om te bepalen of men het deeltje relativistisch moet behandelen kan dienen de waarde van $(T_{rel} - T_{klas})/T_{klas}$.

    a. Stel dat deze correctie 1% mag bedragen om nog als klassiek te mogen worden beschouwd. Hoe groot mag dan T/E_0, waarin E_0 de rustenergie is, ongeveer zijn?

    b. Hoe groot is v/c bij die grens?

    c. Rustmassa's van elementaire deeltjes worden vaak in electron-Volts (eV) uitgedrukt. Een eV is de energie die een electron krijgt bij het doorlopen van het potentiaalverschil van 1 Volt. De rustmassa wordt dus verkregen door deze energie door c^2 te delen. Daarom is de massa van het electron 511 keV/c^2 en de massa van het proton 938 MeV/c^2 (hier staan uiteraard keV voor kilo-electron-Volt en MeV voor Mega-electron-Volt), maar vaak wordt de c^2 weggelaten. Bereken de toegestane kinetische energie T voor electron en proton in eV, gebaseerd op het 1% criterium.

13. Bij botsingsreakties geldt *wel* behoud van energie, maar *niet* behoud van massa (rustenergie). Zie bijv. opgave 21 van de syllabus.

    a. Een deeltje met rustmassa m en kinetische energie $2mc^2$ botst met een stilstaand deeltje met rustmassa $2m$. Na de botsing gaan de twee deeltjes als één nieuw deeltje verder. Bereken de rustmassa en de snelheid van dit nieuwe deeltje.

    b. Een foton met een energie E wordt geabsorbeerd door een stilstaand deeltje met rustmassa m. Welke snelheid krijgt het deeltje?

14. We hebben voor de test van het transversale Doppler-effect het Mössbauer principe genoemd en het principe van resonante absorbtie. We zullen dat hier eens iets nader bekijken om er wat meer inzicht in te krijgen.

    a. Een deeltje, in rust in het laboratorium, verkeert in een aangeslagen toestand, waarin het een rustenergie E_0' heeft. Het kan door het uitzenden van een foton overgaan in een toestand met rustenergie E_0. De rustenergie neemt dus af met $\Delta E_0 = E_0' - E_0$. De energie van het foton ($h\nu_1$) zal iets *kleiner* dan ΔE_0 zijn. Verklaar dit! Leid af dat

$$h\nu_1 = \Delta E_0 (1 - \frac{\Delta E_0}{2E_0'})$$

en maak een schatting voor $\Delta E_0/(2E_0')$ voor het geval dat het om zichtbaar licht en om gammastraling gaat.

b. Omgekeerd beschouwen we een rustend deeltje met energie E_0, dat door absorbtie van een foton met frequentie ν_2 overgaat naar een aangeslagen toestand met rustenergie E_0'. Nu zal $h\nu_2$ iets *groter* moeten zijn dan ΔE_0. Verklaar ook dit! Leid af dat

$$h\nu_2 = \Delta E_0 (1 + \frac{\Delta E_0}{2E_0})$$

c. Als we twee atomen van dezelfde soort hebben, bijv. natrium atomen, waarvan er een zich in de eerste aangeslagen toestand bevindt, kan het atoom dat zich in de grondtoestand bevindt dan het foton absorberen dat door het aangeslagen atoom wordt uitgezonden (zoiets heet resonante absorbtie)? (Uit de quatummechanica volgt dat de verschillende aangeslagen toestanden - zolang er nog geen ionisatie heeft plaatsgevonden - slechts heel bepaalde, voor het atoom specifieke, *discrete* energiewaarden kan aannemen.) Als we op de onderdelen (a) en (b) afgaan zou het antwoord op deze vraag nee zijn, omdat de fotonenerie met een factor $(1 - \Delta E_0/(2E_0'))/(1 + \Delta E_0/(2E_0)) \sim 1 - \Delta E_0/E_0$ te klein zou zijn om geabsorbeerd te kunnen worden. Dit zou betekenen dat materie transparant zou zijn voor zijn eigen straling! Noem zoveel mogelijk redenen waarom i.h.b. voor een gas, zoals bij de zon, resonante absorptie wel degelijk kan optreden.

d. Waarom is resonante absorptie wel mogelijk bij het Mössbauer effect, en wat is de voorwaarde die daarbij aan de emissie moet worden gesteld. Waarom willen we bij de test van het transversale Doppler-effect *niet* dat de emissie plaatsvindt bij precies dezelfde energie als de absorptie? Bereken de omloopsnelheid die nodig is om de verschuiving van de frequentie van gammastralen van 412 keV (uitgezonden door ^{198}Hg), tengevolge van de terugstoot bij emissie te compenseren door het transversale Doppler-effect.

15. Bereken de bindingsenergie in MeV van een koolstofatoom ^{12}C uit het feit dat per definitie de massa van het koolstofatoom 12 atomaire massa eenheden is, terwijl de massa van een waterstof atoom en een neutron respectievelijk 1,007825 en 1,008665 atomaire massa eenheden bedraagt. Een atomaire massa eenheid is $1,66053 \times 10^{-27} kg$. Waarom is dit niet gelijk aan de massa van het proton, zoals gegeven in opgave 12 hierboven (gebruik dat $c = 2,997925 \times 10^8 m/s$ en $e = 1,60219 \times 10^{-19} C$). Vergelijk het antwoord voor de bindingsenergie met de rustenergie van een electron, eveneens gegeven in opgave 12. Welke fout maken we door onze berekening te baseren op neutrale koolstof en waterstof atomen? Geef een ruwe schatting van deze fout.